Invariants tropicaux raffinés

Tangi Pasquer

Mai 2024

Résumé

Ce mémoire d'introduction au domaine de recherche présente certains problèmes de géométrie énumérative, ainsi que les méthodes tropicales qui permettent de les résoudre. Nous allons expliquer les problèmes historiques qui motivent les grandes questions du domaine, les développements récents qui permettent de les résoudre, ainsi que les questions actuelles qui découlent de ces découvertes.

1 Introduction

Une courbe algébrique plane est dite *rationnelle* quand il existe un paramétrage de ses points par une fonction rationnelle

$$f(t) = \left(\frac{p_1(t)}{q_1(t)}, \frac{p_2(t)}{q_2(t)}\right)$$

où p_1, q_1, p_2 et q_2 sont des polynômes. En particulier, les courbes rationnelles sont irréductibles.

FIGURE 1 – Deux cubiques rationnelles du plan

La figure 1 présente les lieux réels de deux cubiques rationnelles : la première peut être paramétrée par

$$t \mapsto \phi_1(t) = (1+t^2, t(1+t^2))$$

et la deuxième par

$$t \mapsto \phi_2(t) = (t^2, t(t^2 - 1)).$$

Ici t peut prendre une valeur complexe mais on obtient le lieu réel de l'image en ne conservant que les paramètres t tels que $\phi_j(t) \in \mathbb{R}^2$, i.e $t \in \mathbb{R} \cup \{\pm i\}$ pour ϕ_1 et $t \in \mathbb{R}$ pour ϕ_2. On voit en particulier que le point $(0, 0)$ de la première courbe, et le point $(1, 0)$ de la deuxième, sont des points *doubles*, obtenus chacun pour deux valeurs de t.

Le problème suivant concerne des courbes rationnelles, et sera notre fil rouge :

Problème 1. Soit d un entier positif. Étant donné un ensemble $\mathcal{P} = \{a_1, \ldots, a_{3d-1}\}$ de $3d-1$ points du plan, que vaut $N_d(\mathcal{P})$, le nombre de courbes algébriques rationnelles complexes de degré d passant par $a_1, \ldots, a_{3d-1}$?

Lorsque $d = 1$, on sait qu'il y a une unique droite passant par deux points distincts, donc $N_1(\mathcal{P}) = 1$ si $\#\mathcal{P} = 2$, mais dès que $d > 1$ la réponse n'est pas forcément évidente. Nous verrons qu'il existe un ouvert U dense dans l'espace des ensembles de $3d - 1$ points tel que pour tout $\mathcal{P} \in U$, ce nombre $N_d(\mathcal{P}) = N_d$ est fini et ne dépend pas du choix de $\mathcal{P}$.

Ce problème est un problème de **géométrie énumérative** : il s'agit de compter des objets géométriques (ici des courbes rationnelles) soumis à des contraintes particulières (ici, le passage par des points donnés du plan).

La géométrie énumérative regroupe des questions de dénombrement très diverses, dont certaines remontent à l'Antiquité : on peut par exemple citer le problème des cercles d'Apollonius (cf. figure 2, [Mel08]), ou le problème du comptage des coniques du plan passant par 5 points. La réponse de ce dernier est connue depuis cette époque, et donne une première réponse non triviale ($N_2 = 1$) à notre problème 1.

L'introduction des méthodes algébriques en géométrie au XVIIe siècle permet de résoudre plus facilement ce genre de problèmes, qui se ramènent alors à une résolution d'équations polynomiales. Cette époque marque un tournant dans l'étude des problèmes de géométrie énumérative, et annonce les développements futurs de la géométrie algébrique. François Viète, par exemple, résout en partie le problème des cercles d'Apollonius avec ces outils.

De nouveaux problèmes se posent au XVIIIe siècle comme la détermination du nombre de points communs de deux courbes algébriques dans le plan (dont la réponse est aujourd'hui connue sous le nom de théorème de Bézout), ce qui nécessite une nouvelle compréhension des multiplicités des points d'intersections de courbes. Euler, Maclaurin et Cramer s'intéressent aussi à des configurations de points comme celle que forme l'intersection de deux courbes, ou des configurations de droites comme celles du théorème de Braikenridge–Maclaurin.

Au XIXe siècle, notamment grâce aux apports de Plücker, Schubert et Cayley, les mathématiciens disposent d'un cadre plus cadre général pour comprendre les intersections de variétés, et les dispositions de sous-espaces linéaires dans des variétés. On peut notamment citer le célèbre théorème des 27 droites sur une surface cubique lisse,

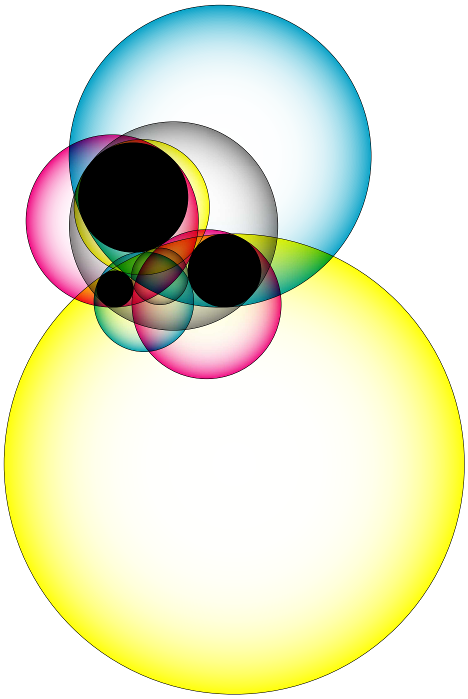

Figure 2 – Solutions du dernier problème d'Apollonius : combien y a-t-il de cercles tangents aux trois disques noirs ?

conséquence du calcul de Schubert. Hilbert propose, dans son quinzième problème, de poser des bases rigoureuses pour ce nouveau type de raisonnements. Concernant le problème des courbes rationnelles de degré d passant par $3d-1$ points du plan, Steiner et Zeuthen calculent respectivement $N_3 = 12$ et $N_4 = 640$.

En parallèle, les débuts de géométrie algébrique moderne, notamment les travaux de l'école italienne, entretiennent des liens étroits avec la géométrie énumérative. Francesco Severi introduit notamment une notion de degré permettant de comprendre l'invariance du compte de courbes dans le plan. D'autres mathématiciens italiens contribuent grandement à l'essor de la géométrie algébrique, mais c'est Oscar Zariski qui propose un cadre solide à l'aide du langage de la géométrie commutative, et parvient à rendre rigoureux quelques résultats de ses prédécesseurs.

Le problème du calcul de N_d pour tout d fait partie de ce que l'on pourrait appeler aujourd'hui la "géométrie énumérative naïve", notamment parce qu'il ne nécessite pas les notions modernes de schéma, champ, espace de modules, etc. introduites à partir des années 60. Nous allons donc nous placer pour une bonne partie de l'exposition dans un formalisme de variétés algébriques proche de celui de Zariski.

2 Formalisation des problèmes

Commençons par quelques définitions.

Définition 2. Une *courbe algébrique C plane, complexe, projective* de *degré d* est la donnée d'un polynôme à trois variables $f(X, Y, Z)$ non nul, homogène et à coefficients complexes, de degré d, pris à constante près. Les *points complexes* de C sont les points $P \in \mathbb{CP}^2$ de coordonnées homogènes $[x : y : z]$ telles que $f(x, y, z) = 0$; ces points forment l'ensemble $\mathbb{C}C$. Lorsque l'on peut choisir f à coefficients réels, on dit que la courbe est *réelle*, et l'ensemble de ses *points réels* $\mathbb{R}C$ est constitué des points $[x : y : z] \in \mathbb{C}C$ qui se trouvent dans $\mathbb{RP}^2$.

Une fois cette définition acquise, on peut se demander quelle structure porte l'ensemble $\mathcal{C}_d$ des courbes algébriques planes complexes projectives de degré d. Il s'agit en fait d'un autre espace projectif : comme les coefficients d'un polynôme f définissant une telle courbe C sont considérés à une constante multiplicative non nulle près, ils fournissent des coordonnées homogènes pour C. Cette observation permet de renverser le point de vue habituel : au lieu de regarder les points d'une courbe, on s'intéresse à l'ensemble des courbes f passant par un point $[x : y : z]$, ce que résume l'équation $f(x, y, z) = 0$.

Remarque 3. L'avantage que confère ce point de vue est que la condition $f(x, y, z) = 0$, bien que non linéaire en $[x : y : z]$, est linéaire en f, c'est-à-dire en ses coefficients. On peut montrer aisément que pour N points $p_j = [x_j : y_j : z_j]$ de $\mathbb{CP}^2$ en position générique, les conditions linéaires $p_j \in \mathbb{C}C$ sont indépendantes, et définissent donc un sous-espace projectif de $\mathcal{C}_d$ de codimension N.

Un dénombrement simple permet de calculer la dimension de $\mathcal{C}_d$:

Proposition 4. *Pour tout $d \geq 1$, $\mathcal{C}_d$ est un espace projectif de dimension $\frac{d(d+3)}{2}$.*

Comme les coniques irréductibles du plan sont toutes rationnelles, on en déduit :

Proposition 5.

$$N_2 = 1.$$

Démonstration. L'espace des coniques réductibles, i.e des paires de droites, est un fermé de dimension 4, alors que $\mathcal{C}_2$ est de dimension 5 : l'ensemble des coniques irréductibles est donc un ouvert dense. Les conditions linéaires données par 5 points $a_1, \ldots, a_5$ du plan projectif représentent 5 équations linéaires indépendantes, qui définissent donc un point dans $\mathbb{CP}^5 = \mathcal{C}_2$. Il y a donc une unique conique passant par $a_1, \ldots, a_5$, et elle est irréductible car les points choisis sont génériques. □

Les choses se corsent lorsque l'on souhaite des courbes de degré au moins 3. En effet, ces courbes ne sont plus toutes rationnelles, mais leur genre est génériquement donné par la formule suivante :

Proposition 6. *Une courbe algébrique plane complexe C lisse est irréductible, et le genre de la surface topologique $\mathbb{C}C$ que forment ses points complexes est égal à*

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

où d est le degré de C.

Bien que les courbes lisses forment un ouvert de Zariski non vide (et donc dense) de $\mathcal{C}_d$, il est possible qu'une courbe irréductible de degré d ne soit pas lisse : ce sont alors ses singularités, ou points doubles, qui vont permettre de calculer son genre. Un point $p \in \mathbb{C}C$ est dit *singulier* si

$$\partial_X f(x,y,z) = \partial_Y f(x,y,z) = \partial_Z f(x,y,z) = 0$$

pour un choix de coordonnées homogènes $p = [x : y : z]$.

On peut toujours paramétrer une courbe irréductible C par une certaine surface de Riemann S, qui est une surface topologique compacte, orientée et connexe d'une certain genre g. C est alors l'image d'une application holomorphe immersive $\phi \colon S \to \mathbb{CP}^2$. Cet entier g est indépendant du paramétrage choisi, et il est possible de le calculer dans le cas où les points doubles de C sont dits nodaux. Une singularité $p = [x : y : z] \in \mathbb{C}C$ est dite *nodale* si la matrice hessienne de f en (x,y,z) est de rang 2.

Proposition 7. *Soit C une courbe algébrique complexe plane projective irréductible, de degré d. Supposons que C a un nombre fini δ de points doubles, tous nodaux. Alors, le genre g de C est donné par la formule*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta.$$

Comme le genre d'une surface est toujours positif, ce résultat montre que les courbes algébriques rationnelles sont les courbes irréductibles qui ont le plus de singularités : on a alors $\delta = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

La présence de δ singularités sur une courbe algébrique représente une condition de codimension 1, mais, cette fois-ci, elle est *non linéaire*. On pourra penser au problème analogue en dimension 1, où la présence d'une racine double est détectée par l'annulation du discriminant du polynôme.

Formellement, le sous-espace de $\mathcal{C}_d$ formé des courbes ayant au moins δ singularités i.e un genre $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$ est un sous-ensemble localement fermé V_d^g de codimension δ. Compte tenu de la remarque 3, il faut fixer $\frac{d(d+3)}{2} - \delta = 3d - 1 + g$ points génériques dans $\mathbb{CP}^2$ pour obtenir un nombre fini N_d^g de courbes de genre g et de degré d passant par ces points. De plus,

Proposition 8. *Le nombre N_d^g est invariant par choix des points.*

Démonstration. Il s'agit du degré de la sous-variété fermée $\overline{V_d^g}$, dit *degré de Severi*. Ce degré peut être défini comme cardinal de l'intersection avec un sous-espace projectif générique de dimension complémentaire, et ne dépend pas du sous-espace projectif choisi d'après le théorème de Bézout. □

Comment peut-on calculer ces nombres N_d^g ? Il aura fallu plusieurs décennies aux mathématiciens pour avancer sur ce sujet, peu de progrès ayant été faits entre le calcul de N_4 et celui de N_d pour tout $d \geq 1$, au début des années 90.

3 Les grandes avancées des années 90

La découverte en 1994 par Kontsevich et Manin [KM94] d'une relation récursive reliant les nombres $N_d = N_d^0$ et permettant leur calcul remet au goût du jour ce genre de problèmes de géométrie énumérative.

Théorème 9. *Pour tout $d \geq 2$,*

$$N_d = \sum_{\substack{d_A + d_B = d \\ d_A, d_B \geq 1}} \binom{3d-4}{3d_A-2} d_A N_{d_A} d_B N_{d_B} d_A d_B - \binom{3d-4}{3d_A-1} d_A^2 N_{d_A} N_{d_B} d_A d_B.$$

Démonstration. Voici le plan général de la preuve donnée dans [KV06] :

- Kontsevich change de point du vue sur les courbes : au lieu de considérer des polynômes homogènes de degré d ayant un nombre fixé de singularités, il s'intéresse à une variété $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$ dont les points sont des applications $\mu\colon C \to \mathbb{CP}^2$ de degré d, où C est une courbe algébrique dont n points sont marqués.
- Tout comme pour la définition du degré de Severi, il faut compactifier cet espace pour espérer comprendre sa théorie de l'intersection. En effet, ce sont dans les espaces compacts que l'on dispose de produits d'intersections, qui permettent de définir des classes d'intersections invariantes par déformation. La courbe C est alors autorisée à être réductible, l'application μ devant rester sans automorphisme.
- On peut ensuite calculer l'intersection d'une courbe dans l'espace $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$ avec son "bord", ce qui représente différentes façons de compter des courbes algébriques réductibles de degré $d_A, d_B < d$: ce bord est en effet composé de diviseurs qui vérifient des relations utiles et s'identifient à des espaces de modules $\overline{M}_{0,m}(\mathbb{P}^2, d)$ pour des entiers $m < n$.

$\square$

En 1998, les nombres N_d^g sont à leur tour calculés par Caporaso et Harris [CH98], une fois encore grâce à une relation de récurrence. Leur approche consiste à généraliser le problème en utilisant des variétés de Severi généralisées, dont les points sont des courbes soumises à des conditions de degré, de genre, mais aussi de multiplicité d'intersection avec une droite fixée de $\mathbb{P}^2$.

Dès lors, on pourrait considérer le problème initial résolu, mais une question proche et tout aussi intéressante est la suivante : qu'en est-il du nombre de courbes *réelles* ?

Soient $d \geq 1$ et $g \geq 0$ des entiers. Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{RP}^2$ une configuration générique réelle de $3d - 1 + g$ points. On note $N_{d,\mathbb{R}}^g(\mathcal{P})$ le nombre de courbes réelles irréductibles C de genre g et de degré d vérifiant $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}C$. Remarquons que ce sont en particulier des courbes complexes, et comme $\mathcal{P} \subseteq (\mathbb{CP}^2)^{3d-1}$ est une configuration de points générique, $N_{d,\mathbb{R}}^g(\mathcal{P}) \leq N_d^g$ est donc fini, et ces deux nombres ont même parité.

L'argument qui montre l'invariance de N_d^g par choix de $\mathcal{P}$ est ici invalide : le degré d'une sous-variété réelle fermée de dimension n de l'espace projectif n'est pas toujours égal au nombre de point d'intersections qu'a son lieu réel avec un sous-espace projectif réel générique de codimension n. Il est en fait vite compris que le nombre de courbes réelles n'est en général pas un invariant : parmi les 12 cubiques rationnelles à travers 8 points génériques de $\mathbb{RP}^2$, selon la position des points, 8, 10 ou 12 d'entre elles sont réelles (voir [DK00], digression page 50).

En revanche, il existe une façon de compter les courbes rationnelles réelles de degré d passant par $3d-1$ points génériques de $\mathbb{RP}^2$ de façon invariante par choix des points. Découverte par Welschinger [Wel03], elle consiste à attribuer à chaque courbe une multiplicité égale à $(-1)^e$, où e est le nombre de ses points doubles isolés, et à remplacer le nombre de courbes par la somme de ces multiplicités. Pour les courbes de la figure 1, les multiplicités de Welschinger sont -1 pour la première, et 1 pour la deuxième.

L'invariant de Welschinger pour les courbes de degré d, noté W_d, est en particulier une borne inférieure pour le nombre de courbes rationnelles réelles de degré d passant par $3d-1$ points : pour toute configuration générique $\mathcal{P} \subseteq (\mathbb{RP}^2)^{3d-1}$, on a

$$W(d) \leq N^0_{d,\mathbb{R}}(\mathcal{P}).$$

Pour que cette borne inférieure soit intéressante, il faudrait déjà que $W(d)$ soit positif, ce qui n'est pas évident au vu de sa définition. C'est pourtant le cas : en 2003, Itenberg, Kharlamov et Shustin [IKS03] démontrent que pour tout $d \geq 1$, on a $W(d) \geq d!/2$. Leur preuve utilise un outil nouveau : la *géométrie tropicale*.

4 Géométrie tropicale

La géométrie tropicale est l'étude des variétés tropicales, qui sont des objets de nature convexe ayant des propriétés proches des variétés algébriques. Dans notre cas, ce sont surtout de courbes tropicales dont il sera question.

Définition 10. Une *courbe tropicale plane* est un graphe pondéré (C, w) où $C \subseteq \mathbb{R}^2$ est un graphe fini dont certaines arêtes sont infinies, et $w\colon e \mapsto w_e \in \mathbb{N}^2$ est une fonction de poids sur les arêtes de C. On demande que chaque arête e soit située sur une droite ayant un vecteur directeur primitif $v_e \in \mathbb{Z}^2$. Ces nombres et vecteurs doivent en outre vérifier une *relation d'équilibrage* : pour tout sommet v, si $e_1, \ldots, e_m$ (resp. $e'_1, \ldots, e'_n$) sont les arêtes adjacentes à v entrantes (resp. sortantes), on a

$$\sum_{i=1}^{m} w_{e_i} v_{e_i} = \sum_{j=1}^{n} w_{e'_j} v_{e'_j}. \tag{1}$$

On appellera aussi *valence* du sommet v l'entier $m+n$.

Une arête e adjacente à un sommet v est dite entrante (resp. sortante) si $e \subseteq v - \mathbb{R}v_e$ (resp. $e \subseteq v + \mathbb{R}v_e$).

On définit la *multiplicité* (complexe) d'un sommet trivalent v de (C, w) par la formule suivante :

$$m(C, v) = w_{e_1} w_{e_2} |\det(v_{e_1}, v_{e_2})|, \tag{2}$$

où e_1, e_2 sont deux arêtes distinctes quelconques qui contiennent v. La relation d'équilibrage 1 en v permet de voir que tout choix d'une paire d'arêtes donne le même résultat.

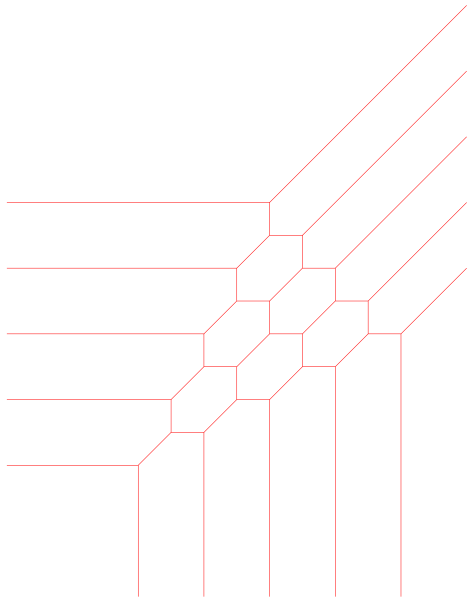

FIGURE 3 – Une courbe tropicale

Une courbe tropicale C est dite *irréductible* si elle ne peut pas s'écrire comme réunion de deux courbes tropicales $C', C'' \subsetneq C$.

On peut définir une notion de *genre* pour une courbe tropicale irréductible (C, w) ; comme pour le cas des courbes algébriques, cela fait appel à des paramétrages, et le genre de la courbe est alors celui d'un paramétrage "minimal". Ici, les courbes tropicales sont paramétrées par des graphes, et le genre d'un graphe est le nombre de cycles indépendants qu'il possède.

Étant donnée une courbe tropicale (C, w), on peut définir son *polygone de Newton* $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$, dont les sommets sont dans $\mathbb{Z}^2$, et qui est muni d'une subdivision polygonale $S(C, w)$, appelée *subdivision duale* de (C, w).

Cette subdivision S est duale dans le sens suivant : il existe une bijection $\ast\colon C \amalg \pi_0(\mathbb{R}^2 \setminus C) \to S$ telle que :

— pour tout sommet v de C, v^* est un polygone ;

— pour toute arête e de C, e^* est une arête de S orthogonale à e ;

— pour toute composante connexe U de $\mathbb{R}^2 \setminus C$, $U^* \in \mathbb{Z}^2$ est un sommet de v ;

— $\ast$ renverse la relation d'incidence.

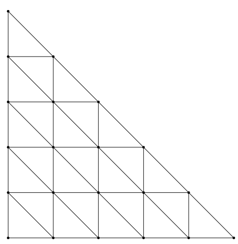

FIGURE 4 – La subdivision duale de la courbe tropicale figure 3

On note $b(\Delta)$ le nombre de points de $\mathbb{Z}^2$ situés sur le bord de Δ, ainsi que $\mathcal{M}_\Delta$

l'ensemble des courbes tropicales ayant pour polygone de Newton Δ.

Cette subdivision duale encode les propriétés combinatoires de la courbe tropicale, les données restantes étant métriques :

Proposition 11 (Lemme 3.14 dans [Mik05]).
Les courbes tropicales (C, w) dont la subdivision duale est S forment un domaine convexe polyédral $\mathcal{M}_S \subseteq \mathcal{M}_\Delta$ qui est ouvert dans son enveloppe affine.

De la même façon que pour la géométrie énumérative algébrique, on calcule la dimension de l'espace des courbes tropicales de polygone de Newton Δ et de genre g, qui est $b(\Delta) - 1 + g$, et on met en évidence un ensemble de configurations tropicales de $\mathbb{R}^{b(\Delta)-1+g}$: ici c'est un G_δ dense. Les courbes tropicales (C, w) de genre g et de polygone de Newton Δ qui passent par ces configurations de points sont irréductibles, et *simples*, i.e que la subdivision $S(C, w)$ n'est formée que de triangles et de parallélogrammes. La proposition précédente permet de voir qu'il y a un nombre fini de courbes tropicales qui passent par ces points (cf lemme 4.13 in [Mik05]).

Le théorème suivant, démontré pour la première fois par Mikhalkin dans [Mik05], montre que le compte des courbes tropicales sujettes aux conditions précédentes, munies des multiplicités 2, permet de compter des courbes algébriques complexes.

Théorème 12 (Théorème 1 dans [Mik05]).

— *Le compte des courbes tropicales (C, w) de genre g et de polygone de Newton Δ passant par une collection générique de points $\mathcal{Q}$, munies des multiplicités*

$$m(C, w) = \prod_{v \in V_3(C)} m(C, v),$$

où $V_3(C)$ est l'ensemble des sommets trivalents de C, ne dépend pas du choix de $\mathcal{Q}$.

— *Il existe une configuration de points $\mathcal{P} \in (\mathbb{C}^*)^2$ telle que le nombre de courbes algébriques irréductibles complexes de genre g et de polygone de Newton Δ passant par $\mathcal{P}$ soit $N^g_{\Delta,trop}$.*

Le polygone de Newton d'un polynôme

$$p(z, w) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} a_{i,j} z^i w^j$$

est défini comme l'enveloppe convexe des couples $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a_{i,j} \neq 0$. Le polygone Δ définit une certaine surface algébrique, dite *surface torique*, où vit une compactification naturelle de la courbe $\{p(z, w) = 0\} \subseteq (\mathbb{C}^*)^2$.

Les courbes projectives planes de degré d correspondent aux courbes dont le polygone de Newton est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, d)$ et $(d, 0)$. Ce résultat permet donc de calculer les degrés de Severi N^g_d pour les courbes dans $\mathbb{P}^2$, mais aussi des invariants similaires comptant des courbes dans des surfaces toriques qui n'étaient pas encore connus.

Démonstration. L'approche de Mikhalkin consiste à étudier les amibes d'une courbe algébrique complexe $\mathcal{C} \subseteq (\mathbb{C}^*)^2$: ce sont les ensembles

$$\mathcal{A}_t(\mathcal{C}) = \{(\log_t |z|, \log_t |w|),\ (z, w) \in \mathcal{C}\}$$

pour des valeurs de $t > 0$ de plus en plus grandes. Il s'avère que cette famille $(\mathcal{A}_t(\mathcal{C}))_{t>0}$ converge quand $t \to \infty$ vers une certaine courbe tropicale. Il faut ensuite comprendre quelles sont les courbes algébriques dont les amibes dégénèrent vers une courbe tropicale donnée C, et voir quelles conditions supplémentaires on peut imposer à ces courbes algébriques. □

Mikhalkin propose aussi dans [Mik05] d'autres résultats, notamment des méthodes de calcul plus combinatoires, et des façons de calculer les invariants de Welschinger et le nombre de courbes réelles dans certaines configurations de points, qu'utiliseront les auteurs de [IKS03] pour montrer le résultat annoncé à la fin de la section 3.

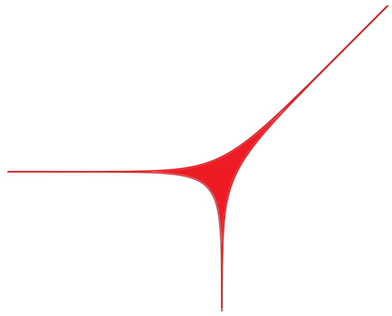

FIGURE 5 – Une amibe

Pour une introduction détaillée sur le sujet, voir par exemple [Bru+15].

5 Les problèmes actuels

Invariants de Block-Göttsche Dans [BG15], Block et Göttsche introduisent des nouvelles multiplicités tropicales, dites *raffinés* : il s'agit de polynômes de Laurent $G_d^g(q)$ symétriques à coefficients dans $\mathbb{N}$, définis comme les invariants tropicaux $N_{d,\text{trop}}^g$ mais en remplaçant la multiplicité $m(C, v)$ définie en 2 par son *q-analogue*

$$G(C, v) = \frac{q^{m(C,v)/2} - q^{-m(C,v)/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}.$$

L'évaluation de ces polynômes en $q = 1$ donne $N_{d,\text{trop}}^g$, tandis que leur évaluation en $q = -1$ permet de retrouver un invariant de Welschinger tropical.

Ces idées se placent dans le cadre des conjectures de Göttsche et Shende [GS14], qui définissent deux raffinements des degrés de Severi et conjecturent leur égalité pour des grands degrés de courbes. Göttsche et Block [BG15] ont donné une description tropicale de ces raffinements, puis Itenberg et Mikhalkin ont montré dans [IM13] que le compte des courbes tropicales raffiné de cette façon est encore un invariant, généralisant le théorème 12.

Les mêmes auteurs utilisent ces nouveaux invariants pour démontrer une majoration du nombre $N^g_{d,\mathbb{R}}(\mathcal{P})$ pour d assez grand pour des configurations de points $\mathcal{P}$ "proches de la limite tropicale" : la connaissance du coefficient dominant de $G^g_d(q)$ montre qu'il y a toujours une courbe tropicale particulière C dont la multiplicité complexe est un grand nombre, qu'il n'est pas possible d'atteindre pour la multiplicité réelle compte tenu du faible nombre de sommets de C.

L'étude de ces invariants et des correspondances énumératives établies entre les mondes algébrique et tropical représente aujourd'hui une part importante des recherches sur les interactions entre géométrie énumérative et géométrie tropicale. Deux interprétations géométriques aux invariants de Block-Göttsche sont au cœur de mon sujet de thèse : l'article de Mikhalkin [Mik17] et celui de Bousseau [Bou18] où l'auteur relie des fonctions génératrices d'invariants log Gromov-Witten, sortes de "comptes virtuels" de courbes de genre supérieur, aux invariants de Block-Göttsche.

D'autres façons de compter Comme vu dans la section 3, on peut paramétrer les courbes que nous voulons compter par d'autres espaces que des variétés de Severi $\overline{V}^g_d$. On peut ensuite calculer des invariants de ces espaces plus compliqués que le degré, par exemple des groupes de cohomologie [BG15] ou certaines classes de Chern [Bou18] qui ont un sens géométrique particulier. Dans ces directions, on peut citer la théorie des invariants de Gromov-Witten, des invariants BPS, de Donaldson-Thomas... Ces théories sont les plus étudiées pour la géométrie énumérative en dimension au moins 3 : dans ces situations, les intuitions sur la dimension des espaces sont parfois fausses, et une notion de *classe fondamentale virtuelle* est requise pour définir rigoureusement les invariants. Les interactions entre ces différentes théories énumératives sont nombreuses, et leur relation au monde tropical dans le cas des variétés toriques reste encore à comprendre.

Géométrie symplectique Les invariants de Gromov-Witten précédemment cités sont en fait définis de manière symplectique, tout comme les invariants de Welschinger, i.e que ces nombres sont aussi invariants par choix d'une structure presque complexe compatible avec la forme symplectique des espaces étudiés (cf. [Wel03 ; GZ18]). Cette approche s'offre comme alternative dans les problèmes énumératifs de la section 2 de ce mémoire, mais certaines formulations de la symétrie miroir en lien avec la géométrie énumérative s'expriment en des termes purement symplectiques, comme la conjecture SYZ [Gro12].

Géométrie énumérative réelle Les invariants de Welschinger ont été généralisés par [GZ18] via la théorie de Gromov-Witten réelle.

Des formules analogues à celles de Caporaso-Harris ont été démontrées pour les invariants de Welschinger dans certaines surfaces toriques [IKS06].

Dans une philosophie de catégorification, les auteurs de [Jar24 ; Kas+23] proposent une nouvelle façon de calculer des invariants énumératifs réels à l'aide de formes quadratiques, en lien avec la théorie de l'homotopie motivique.

Enfin, Mikhalkin développe dans [Mik17] une notion d'indice quantique qui concerne certaines courbes algébriques réelles dans une surface torique, et l'utilise pour relier le nombre de solutions à un problème énumératif, raffiné par cet indice quantique, aux invariants de Block-Göttsche.

Les autres applications de la géométrie tropicale La géométrie tropicale, en tant qu'étude des dégénérescences des familles de variétés algébriques, peut être comprise comme simplification d'une géométrie non archimédienne [BJ17]. En particulier, il existe une application de tropicalisation définie sur les sous-variétés affines d'un espace vectoriel sur un corps non archimédien, et dans un certain sens, la limite des tropicalisations des plongements affines fournit une autre interprétation de l'analytification de Berkovich. [Pay08]

La géométrie tropicale permet aussi de définir des compactifications de certains espaces comme des espaces de modules [AN21] ou des variétés de caractères [JSY20].

Références

[Mel08] Melchoir. 15 mai 2008. eprint : `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4056136`.

[KM94] Maxim Kontsevich et Yuri Manin. « Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry ». In : *Communications in Mathematical Physics* 164.3 (août 1994), p. 525-562. doi : `10.1007/bf02101490`.

[KV06] Joachim Kock et Israel Vainsencher. *An Invitation to Quantum Cohomology. Kontsevich's Formula for Rational Plane Curves.* 1re éd. T. 249. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, MA, 24 oct. 2006.

[CH98] Lucia Caporaso et Joe Harris. « Counting plane curves of any genus ». In : *Inventiones mathematicae* Volume 131, revue 2 (fév. 1998), p. 345-392. doi : `10.1007/s002220050208`.

[DK00] Alex Degtyarev et Viatcheslav Kharlamov. « Topological properties of real algebraic varieties : du coté de chez Rokhlin ». In : *Russian Mathematical Surveys* 55.4 (août 2000), p. 735-814. doi : `10.1070/rm2000v055n04abeh000315`.

[Wel03] Jean-Yves Welschinger. « Invariants of real rational symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry ». In : *Comptes Rendus Mathematique* 336.4 (2003), p. 341-344. doi : `https://doi.org/10.1016/S1631-073X(03)00059-1`.

[IKS03] Ilia Itenberg, Viatcheslav Kharlamov et Eugenii Shustin. « Welschinger invariant and enumeration of real rational curves ». In : *International Mathematics Research Notices* 2003.49 (jan. 2003), p. 2639-2653. doi : `10.1155/S1073792803131352`.

[Mik05] Grigory Mikhalkin. « Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$ ». In : *Journal of the American Mathematical Society* 18.2 (avr. 2005), p. 313-377. doi : `10.1090/S0894-0347-05-00477-7`.

[Bru+15] Erwan Brugallé, Ilia Itenberg, Grigory Mikhalkin et Kristin Shaw. « Brief introduction to tropical geometry ». In : *Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference 2014*. 2015, p. 1-75. eprint : `https://gokovagt.org/proceedings/2014/ggt14-brugitenmikhshaw.pdf`.

[BG15] Florian Block et Lothar Göttsche. « Refined curve counting with tropical geometry ». In : *Compositio Mathematica* 152.1 (août 2015), p. 115-151. doi : `10.1112/s0010437x1500754x`.

[GS14] Lothar GÖTTSCHE et Vivek SHENDE. « Refined curve counting on complex surfaces ». In : *Geometry & Topology* 18.4 (oct. 2014), p. 2245-2307. DOI : 10.2140/gt.2014.18.2245.

[IM13] Ilia ITENBERG et Grigory MIKHALKIN. « On Block–Göttsche Multiplicities for Planar Tropical Curves ». In : *International Mathematics Research Notices* 2013.23 (2013), p. 5289-5320. DOI : 10.1093/imrn/rns207.

[Mik17] Grigory MIKHALKIN. « Quantum indices and refined enumeration of real plane curves ». In : *Acta Mathematica* 219.1 (2017), p. 135-180. DOI : 10.4310/ACTA.2017.v219.n1.a5.

[Bou18] Pierrick BOUSSEAU. « Tropical refined curve counting from higher genera and lambda classes ». In : *Inventiones mathematicae* 215.1 (oct. 2018), p. 1-79. DOI : 10.1007/s00222-018-0823-z.

[GZ18] Penka GEORGIEVA et Aleksey ZINGER. « Real Gromov-Witten theory in all genera and real enumerative geometry : Construction ». In : *Annals of Mathematics* 188.3 (2018), p. 685-752. DOI : 10.4007/annals.2018.188.3.1.

[Gro12] Mark GROSS. « Mirror Symmetry and the Strominger-Yau-Zaslow conjecture ». In : *Current Developments in Mathematics 2012* 2012 (déc. 2012), p. 67. DOI : 10.4310/CDM.2012.v2012.n1.a3.

[IKS06] Ilia ITENBERG, Viatcheslav KHARLAMOV et Eugenii SHUSTIN. « A Caporaso-Harris type formula for Welschinger invariants of real toric Del Pezzo surfaces ». In : *Commentarii Mathematici Helvetici* 84 (sept. 2006). DOI : 10.4171/CMH/153.

[Jar24] Andrés JARAMILLO PUENTES. *A Wall Crossing Formula for Motivic Enumerative Invariants*. 2024. arXiv : 2403.17681 [math.AG].

[Kas+23] Jesse Leo KASS, Marc LEVINE, Jake P. SOLOMON et Kirsten WICKELGREN. *A quadratically enriched count of rational curves*. 2023. arXiv : 2307.01936 [math.AG].

[BJ17] Sébastien BOUCKSOM et Mattias JONSSON. « Tropical and non-Archimedean limits of degenerating families of volume forms ». en. In : *Journal de l'École polytechnique — Mathématiques* 4 (2017), p. 87-139. DOI : 10.5802/jep.39.

[Pay08] Sam PAYNE. « Analytification is the limit of all tropicalizations ». In : *Mathematical Research Letters* 16 (mai 2008). DOI : 10.4310/MRL.2009.v16.n3.a13.

[AN21] Omid AMINI et Noema NICOLUSSI. *Moduli of hybrid curves and variations of canonical measures*. 2021. arXiv : 2007.07130 [math.AG].

[JSY20] Philipp JELL, Claus SCHEIDERER et Josephine YU. « Real Tropicalization and Analytification of Semialgebraic Sets ». In : *International Mathematics Research Notices* 2022.2 (mai 2020), p. 928-958. DOI : 10.1093/imrn/rnaa112.