

Introduction au domaine de recherche : valeurs propres et fonctions propres du Laplacien sur une variété riemannienne compacte

Ambre Chabert (elle / iel)

30 septembre 2024

1 Introduction

Dans cette note, je vais présenter une introduction brève à un domaine de recherche originaire de la Physique et riche de plus d'un siècle d'éminentes contributions, et entremêlant la géométrie différentielle, la théorie spectrale, l'analyse harmonique, la théorie des nombres, ou encore l'analyse microlocale. Il s'agit de l'étude des valeurs propres et fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété riemannienne compacte, qui compose une très grande partie du domaine dit de la Géométrie Spectrale.

La formule suivante, titre d'un article de Mark Kac datant de 1966 ([Kac66]), est devenue emblématique du domaine : "Can One Hear the Shape of a Drum?"¹. Plus précisément, étant donné une variété riemannienne compacte (exemple : une surface serait un "tambour"), on démontre qu'il existe une suite discrète de fréquences de "résonance" qui est propre à la variété, et il existe un lien entre des informations de nature ondulatoire (les fréquences de résonance, les normes L^p des fonctions propres, etc.) et des informations géométriques sur la variété (son volume, sa courbure, etc.) par des formules asymptotiques.

Pour faciliter la lecture de la présente note, le-a lecteur-ice notera que seules les trois premières sections constituent à proprement parler une introduction, dont la difficulté et les prérequis vont croissants. En particulier, je mentionnerai quelques mots clés concernant les preuves des théorèmes, que le-a lecteur-ice non familier-ère du domaine pourra passer. J'ai choisi d'ajouter en guise d'extra la dernière section afin de pouvoir tout de même formuler le problème précis sur laquelle j'ai moi-même travaillé en M2, ainsi que l'état de mes recherches. En particulier, cette section nécessite sans doute plus de prérequis pour être utilement lue.

1.1 Du modèle d'une corde vibrante à l'équation de Dirichlet

Commençons par l'étude d'un modèle 1D élémentaire, issu de la théorie de l'élasticité : le modèle de la corde vibrante, introduit par les mathématicien-nes du XVIIIe siècle. Précisément, considérons une corde de longueur $L > 0$, fixée à ses deux extrémités, qui peut évoluer librement selon la verticale. Phénoménologiquement, il est connu depuis les observations de Jean Bernoulli qu'une telle corde évolue en propageant des déformations sinusoïdales. Jean Le Rond d'Alembert, en 1746, a dérivé mathématiquement l'équation de ce modèle. Son comportement peut être décrit par son *profil* $y(x, t)$, représentant la hauteur de la corde au dessus du point x , avec $y = 0$ au repos, la variable x variant dans l'intervalle $[0, L]$, et t étant une variable de temps à valeurs dans \mathbb{R} . Sous un modèle assez simple sans frottement, le mouvement de la corde dans le temps (i.e. la fonction $y(x, t)$ avec t la variable de temps) est déterminé par l'équation de propagation des ondes, dite de d'Alembert, i.e. les déformations se propagent de proche en proche à une vitesse $c > 0$ finie caractéristique de la corde

$$(1.1) \quad \partial_t^2 y - c^2 \partial_x^2 y = 0.$$

On s'intéresse alors à un type particulier de solutions, que l'on peut qualifier d'onde *stationnaire*. Physiquement, cela correspond au cas où la déformation ne se "propage pas", au sens où ce que l'on voit est un profil fixe qui oscille identiquement au-dessus de chaque point, sans déplacement global. Mathématiquement, cela correspond au cas d'une solution vérifiant la propriété de *séparation des variables*

$$(1.2) \quad y(x, t) = g(t)f(x)$$

On trouve alors aisément que f et g satisfont une équation différentielle linéaire du second ordre triviale, à savoir qu'il existe une fréquence spatiale k telle que

1. "Est-ce que l'on peut entendre la forme d'un tambour?"

$$(1.3) \quad \begin{aligned} f''(x) + k^2 f(x) &= 0 \\ g''(t) + \omega^2 g(t) &= 0 \end{aligned}$$

où la fréquence temporelle ω de l'onde est donnée par la *relation de dispersion* $c^2 k^2 - \omega^2 = 0$. Ainsi, nécessairement,

$$(1.4) \quad \begin{aligned} f(x) &= a \sin(kx) + b \cos(kx) \\ g(t) &= c \sin(\omega t) + d \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Mais alors, en écrivant l'annulation aux extrémités en tout temps, i.e. $y(0, t) = y(L, t) = 0$, on voit que, nécessairement, le coefficient b s'annule, et également que $kL \in \pi\mathbb{Z}$. En d'autres termes, seules certaines fréquences spatiales k , appelées fréquences *propres*, sont autorisées pour les solutions stationnaires de l'équation de d'Alembert. Ces fréquences *propres*, sont déterminées par la relation

$$(1.5) \quad k = \frac{n\pi}{L} \quad n \in \mathbb{N}$$

Ainsi, dans ce modèle élémentaire, nous voyons apparaître comment une information de nature *ondulatoire*, à savoir les fréquences résonnantes qui peuvent être propagées sur l'intervalle $[0, L]$, est directement reliée à une information *géométrique*, à savoir quelle est la longueur de l'intervalle. Ce, par le biais d'une formule *asymptotique* : la n -ième fréquence résonante est exprimable à partir de la longueur de l'intervalle.

En dimension supérieure $d \geq 1$, à présent, l'équation des ondes (1.1) se généralise par l'équation sur $y(x, t)$ à valeurs complexes

$$(1.6) \quad \partial_t^2 y - c^2 \Delta y = 0$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_i^2$ est l'opérateur de Laplace usuel sur \mathbb{R}^d .

Cette équation, décrivant la propagation libre d'une onde, est probablement l'une des plus transversales dans la Physique. En effet, on la rencontre tant en mécanique des milieux continus, qu'en mécanique des fluides, ou encore dans l'étude des ondes électromagnétiques, entre autres.

Par analogie avec le cas de la corde vibrante, étant donné un domaine, i.e. un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ relativement compact, on peut alors étudier le problème de trouver les solutions en ondes stationnaires de l'équation (1.6) qui s'annulent sur le bord de Ω $\partial\Omega$. De même, en séparant les variables, on se ramène à étudier les nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ et les fonctions f suffisamment régulières sur Ω qui sont solution du *problème de Dirichlet*

$$(Dirichlet) \quad \begin{cases} \Delta f(x) + \lambda^2 f(x) = 0 & x \in \Omega \\ f(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

En effet, alors, la fonction

$$(1.7) \quad y(t, x) := e^{\pm i\lambda ct} f(x)$$

est une onde stationnaire solution de l'équation des ondes sur Ω (et ce sont les seules ondes stationnaires). Ce problème a été longuement étudié, depuis les observations pionnières de Debye et Weyl en 1911, avec la contribution notable de Ivrii en 1980. Cependant, nous ne donnons pas les énoncés dans ce contexte précis. En effet, dans cette note, nous n'étudierons pas directement le problème de Dirichlet, mais plutôt son équivalent dans le cas *sans bord*. Ainsi, avant de donner les principales questions et les principales réponses au problème, nous en donnons la définition dans le cadre plus abstrait d'une variété riemannienne compacte sans bord.

1.2 Deux exemples explicites d'équation aux valeurs propres

La définition du Problème au valeurs propres dans le cas d'une variété riemannienne compacte sans bord étant assez abstraite, nous commençons par l'introduire dans deux cas très explicites. Ces deux cas nous serviront dans les sections suivantes de modèle, afin de faire dialoguer une approche intuitive et accessible, sur des exemples concrets, avec une approche plus théorique qui soit exhaustive et plus fidèle au domaine. De la sorte, le·a lecteur·ice ne connaissant que des rudiments de géométrie riemannienne comme celui qui est plus aguerri·e pourra retirer quelque chose d'utile de la présentation.

1.2.1 Le cas du tore plat

L'exemple peut-être le plus élémentaire de variété compacte sans bord sur laquelle exprimer le problème de Dirichlet est le *tore plat* de dimension $d \geq 1$. Pour $L > 0$, nous définissons

$$(1.8) \quad \mathbb{T}_L^d := \left(\frac{\mathbb{R}}{L\mathbb{Z}} \right)^d$$

Le Laplacien est bien défini sur le tore à partir de sa définition usuelle sur \mathbb{R}^d . Ainsi, nous pouvons formuler le problème aux valeurs propres suivant

Problème 1. *Quels sont les couples (ν, f) où $\nu \in \mathbb{R}$ et f est une fonction lisse à valeurs complexes sur \mathbb{T}_L^d tels que*

$$(1.9) \quad \forall x \in \mathbb{T}_L^d \quad \Delta f(x) = \nu f(x)$$

Observons que ce problème revient à trouver les solutions lisses de l'équation $\Delta f = \nu f$ définies sur \mathbb{R}^d qui sont périodiques sur le réseau $(L\mathbb{Z})^d$.

Par analogie avec le cas de la corde vibrante, il est naturel d'essayer de trouver les solutions en *ondes planes*. Pour un certain vecteur d'onde $k \in \mathbb{R}^d$, définissons

$$(1.10) \quad e_k : x \in \mathbb{R}^d \rightarrow e^{ik \cdot x}$$

Une telle fonction est alors solution de

$$(1.11) \quad \Delta e_k = -|k|^2 e_k$$

Pour obtenir une solution du Problème (1), il s'agit d'imposer que e_k soit *périodique* sur le réseau $(L\mathbb{Z})^d$. Cela est équivalent à imposer

$$(1.12) \quad k \in \left(\frac{2\pi}{L} \mathbb{Z} \right)^d$$

Ainsi, nous trouvons déjà une famille de solution au Problème (1), donnée par $\{e_k\}$, $k \in \left(\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}\right)^d$. Le·a lecteur·ice aura sans doute remarqué que cette famille n'est autre que la base canonique qui permet de définir la *transformée de Fourier* sur le tore \mathbb{T}_L^d . Cela n'a rien d'un hasard : sur \mathbb{R}^d , les ondes planes $x \rightarrow e^{ix\xi}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ sont à la fois la famille de solutions de l'équation aux valeurs propres $\Delta f = -|\xi|^2 f$, et la "base" sur laquelle toute fonction se décompose via la transformée de Fourier. Ainsi, il s'agit d'un analogue discret du phénomène présent dans le cas continu.

Réciproquement, donnons-nous (ν, f) une solution du Problème aux valeurs propres (1). Alors, nous pouvons prendre la transformée de Fourier de f sur la base des (e_k) (une fois correctement renormalisée), et trouver

$$(1.13) \quad \forall k \in \left(\frac{2\pi}{L} \mathbb{Z} \right)^d \quad -|k|^2 \hat{f}(k) = \nu \hat{f}(k)$$

Nécessairement, il existe un unique k_0 tel que $\nu = -|k_0|^2$, et alors $\hat{f}(k) = 0$ pour tout k tel que $|k| \neq |k_0|$. En particulier, nous trouvons que f appartient à l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les $\{e_k, |k| = |k_0|\}$. Grâce à la transformée de Fourier, on peut donc complètement résoudre le Problème (1)

Solution 1. *Les solutions du Problème (1) sont exactement les couples (ν, f) tels que*

i. Il existe $k_0 \in \left(\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}\right)^d$ tel que

$$(1.14) \quad \nu = -|k_0|^2$$

ii. f est un élément quelconque de l'espace vectoriel engendré par les e_k tels que $|k| = |k_0|$.

En guise de premier commentaire, observons les similarités avec le cas de la corde vibrante : les fréquences résonantes forment une famille *discrète*, dont la répartition asymptotique dépend de la géométrie de \mathbb{T}_L^d d'une part par la dimension, et d'autre part par son côté L .

1.2.2 Le cas de la sphère

Un exemple moins élémentaire mais d'importance fondamentale en Physique est celui de la sphère S^2 . Pour commencer, il convient de définir l'équation aux valeurs propres sur la sphère, i.e. de définir le Laplacien. Pour ce faire, commençons par rappeler la réduction usuelle qui est pratiquée dans les problèmes présentant une symétrie sphérique, en physique, introduite par les *coordonnées sphériques* sur \mathbb{R}^3 , (r, θ, ϕ) . Alors, on sait que le Laplacien usuel Δ s'écrit dans ces coordonnées

$$(1.15) \quad \Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Mais alors, si nous voyons une fonction $f \in C^\infty(S^2)$ comme une fonction lisse sur $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ qui est indépendante de la coordonnée r , l'expression précédente prise en $r = 1$ donne naturellement la formule pour le Laplacien sur S^2

$$(1.16) \quad \Delta_{S^2} f(\theta, \phi) := \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Où l'on munit la sphère S^2 des coordonnées (hors des pôles) données par la *colatitude* $\theta \in [0, \pi]$ et par la *longitude* $\phi \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$. Ainsi, nous pouvons, grâce à cette expression, exprimer le problème aux valeurs propres sur la sphère S^2

Problème 2. *Quels sont les couples (ν, f) , où $\nu \in \mathbb{R}$ et f est une fonction lisse sur S^2 à valeurs complexes, tels que*

$$(1.17) \quad \Delta_{S^2} f = \nu f$$

Observons tout de suite un problème de définition : a priori, l'expression du Laplacien que nous avons donnée, (1.16), n'est valable qu'hors des pôles où $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Cela n'est pas surprenant, puisqu'en réalité, (θ, ϕ) n'est un système de coordonnées que sur la sphère privée des pôles (autrement, la sphère serait difféomorphe à un tore...). En effet, pour définir correctement le Laplacien aux pôles, il est en réalité nécessaire d'introduire un système de coordonnées près des pôles. Je passe pour le moment cette difficulté sous le tapis, et renvoie le-a lecteur-ice à la sous-section 1.3., où nous donnerons la "vraie" définition du Laplacien en coordonnées locales, ce qui permet de définir correctement l'équation aux valeurs propres.

La résolution du problème (2) est encore explicite, quoique nettement plus technique que celle du problème équivalent sur le tore (1). Je vais présenter une idée de la preuve, sans la détailler.

Premièrement, cherchons une solution sur S^2 privée des pôles, où nous disposons des coordonnées (θ, ϕ) et d'une expression explicite du Laplacien. Alors, on peut encore chercher une solution aux *variables séparées* sous la forme $f(\theta, \phi) = F(\theta)g(\phi)$. En injectant dans l'équation aux valeurs propres (1.17) avec l'expression (1.16), on trouve que F et g vérifient des équations différentielles séparées

$$(1.18) \quad \begin{aligned} g''(\phi) + Mg(\phi) &= 0 \\ \sin(\theta) \frac{d}{d\theta} (\sin(\theta) F'(\theta)) - MF(\theta) &= \nu F \end{aligned}$$

pour une certaine constante $M \in \mathbb{R}$. L'équation sur g se résoud explicitement ; en écrivant de plus que g est définie sur $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ i.e. doit être 2π -périodique, on trouve aisément que $M = m^2 \geq 0$ et que $g(\phi) = e^{im\phi}$. Nécessairement, enfin, m doit être un entier naturel pour avoir la 2π -périodicité. L'expression pour g n'est finalement pas surprenante : en effet, la *symétrie de révolution* est à comparer avec la situation d'un tore 1-dimensionnel.

Ainsi, l'équation sur F se réduit à une équation différentielle linéaire. Le point est le suivant : étant donné $M = m^2$ avec $m \in \mathbb{Z}$, pour quelles valeurs de ν existe-il une solution qui *se prolonge correctement* en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, de sorte à finalement fournir une solution lisse à l'équation aux valeurs propres ? La réponse, quoique classique, n'a rien d'évidente : la "bonne idée" est d'introduire un changement de variable, et de chercher

$$(1.19) \quad F(\theta) = P(\cos(\theta))$$

Alors, on trouve pour P une équation polynomiale bien connue, dont les solutions se construisent à partir des *polynômes de Legendre*. Je ne détaillerai pas cette méthode, mais renvoie plutôt pour référence à la résolution complète du problème des *orbitales atomiques* de l'atome d'hydrogène telle que présentée dans [CTL73]. Finalement, on peut montrer que

Solution 2. Les solutions du Problème (1.17) sont les couples (ν, f) tels que

i. Il existe un entier $l \geq 0$ tel que $\nu = l(l+1)$

ii. f appartient à l'espace vectoriel engendré par les harmoniques sphériques de nombre quantique l , $Y_{l,m}(\theta, \phi)$, où $m = -l, -l+1, \dots, l$ et $Y_{l,m} = c_{l,m} P_{l,m}(\cos(\theta)) e^{im\phi}$ avec $P_{l,m}$ sont les polynômes associés de Legendre et $c_{l,m}$ une constante de normalisation

iii. Par ailleurs, les fonctions $Y_{l,m}$ forment une base orthonormée de l'espace hilbertien $L^2(S^2)$.

Observons premièrement que, de nouveau, les fréquences propres forment une famille discrète, dont la répartition asymptotique est différente du cas du tore, même de dimension 2, notamment car il y a une grande dégénérescence du nombre de solutions lorsque la fréquence propre tend vers l'infini. En outre, on notera qu'il existe une famille de fonctions propres qui génèrent entièrement les solutions de l'équation aux valeurs propres, et qui est une base orthonormée de l'espace $L^2(S^2)$, ce qui est à rapprocher de l'existence de la transformée de Fourier sur le tore \mathbb{T}_L^d (voire le cas du tore en sous-section 1.2). Le lecteur familier avec la théorie spectrale aura reconnu dans ces deux exemples une situation typique de la *diagonalisation d'un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte*. Nous allons à présent donner les énoncés dans le cas général, qui font nécessairement appel à cette théorie.

1.3 L'équation aux valeurs propres pour une variété riemannienne compacte

Le bon cadre théorique pour définir le problème aux valeurs propres est celui d'une variété riemannienne compacte sans bord. Nous rappelons la définition suivante

Definition 1.1. Soit M une variété lisse compacte de dimension d . Une métrique de Riemann g sur M est la donnée d'une forme symétrique définie positive lisse sur le fibré tangent de M . Précisément, en tout point $x \in M$, on équipe l'espace tangent $T_x M$ d'un produit scalaire $g(x)$ tel que $x \rightarrow g(x)$ est lisse.

Si (x^i) , $i = 1, \dots, d$ est un jeu de coordonnées locales, cela correspond à la donnée d'une matrice symétrique définie positive $(g^{ij}(x))$, $i, j = 1, \dots, d$ qui soit lisse en x .

Dans ce cadre, l'opérateur de Laplace Δ se généralise naturellement par l'opérateur dit de *Laplace-Beltrami* Δ_g , qui est défini en coordonnées locales x^i par

$$(1.20) \quad \Delta_g := \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left[\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \right]$$

où la sommation sur i, j est implicite, et $|g|$ est le déterminant de la matrice $(g^{ij})_{i,j}$. Si cette formule peut paraître très compliquée, elle est équivalente à écrire, par comparaison avec le cas de \mathbb{R}^d , que $\Delta_g = \text{div}_g \circ \nabla_g$, où la définition des opérateurs de gradient et de divergence associés à une métrique riemannienne est canonique. On pourra également observer que l'on retombe exactement sur la formule (1.16) dans le cas de la sphère munie de la métrique induite par la métrique plate sur \mathbb{R}^2 .

Alors, nous pouvons définir le *problème aux valeurs propres* sur la variété riemannienne (M, g) comme suit

Problème 3. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte et Δ_g l'opérateur de Laplace-Beltrami associé. Déterminer les couples (λ, f) , où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in C^\infty(M)$, tels que

$$(1.21) \quad \forall x \in M \quad \Delta_g f(x) = -\lambda^2 f(x)$$

Donnons tout de suite quelques commentaires sur ce problème.

Premièrement, il s'agit de la formulation abstraite, sur une variété, du problème de trouver les ondes stationnaires présenté dans la sous-section 1.1. En effet, toute solution (λ, f) du Problème génère une onde stationnaire solution de l'équation des ondes sur M par la formule (1.7). Ce problème arrive naturellement en Physique, par exemple lorsque l'on étudie les fréquences résonnantes d'une surface courbée, ou encore en Mécanique Quantique (j'ai par exemple déjà mentionné le lien entre la diagonalisation du Laplacien sur la sphère et la résolution des orbitales atomiques de l'atome d'hydrogène).

Deuxièmement, j'ai à dessein exclu le cas d'une fonction f vérifiant, pour un certain réel $\lambda > 0$, l'équation

$$(1.22) \quad \Delta_g f(x) = +\lambda^2 f(x)$$

En effet, cette équation n'admet pas de solution non nulle. Pour le comprendre, il est nécessaire d'introduire la notion d'opérateur symétrique positif. Cette notion, usuelle dans le cas d'un opérateur linéaire sur un espace euclidien de dimension finie, se généralise très naturellement dans le cas d'un espace hilbertien comme suit

Definition 1.2. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Soit $P : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ un opérateur linéaire. On dit que P est symétrique si, pour le produit scalaire L^2 sur M ,

$$(1.23) \quad \forall f, h \in C^\infty(M), \quad \langle Pf, h \rangle_g = \langle f, Ph \rangle_g$$

où l'on rappelle que le produit scalaire est défini par

$$(1.24) \quad \langle f, h \rangle_g := \int_M f(x) \overline{g(x)} dVol_g$$

Vol_g étant la forme volume canonique associée à la métrique g . On dit de plus que P est positif si, de plus, pour tout f on a

$$(1.25) \quad \langle Pf, f \rangle_g \in \mathbb{R}_+$$

Une première observation est que, si P est un opérateur symétrique positif, et que ν est une valeur propre (i.e. il existe f telle que $Pf = \lambda f$) alors $\lambda \geq 0$, ce qui est montré en écrivant la positivité de $\langle Pf, f \rangle_g$ comme en dimension finie. Or, un calcul direct d'intégration par partie, en utilisant la *formule de Stokes*, montre que $-\Delta_g$ est un opérateur symétrique positif. C'est pourquoi le problème aux valeurs propres (3) est écrit pour des valeurs propres $\nu = -\lambda^2 \leq 0$.

En utilisant des notions de théorie spectrale que nous ne définirons pas, à savoir que $-\Delta_g$ est un opérateur *auto-adjoint* sur $L^2(S^2)$ à *résolvante compacte*, et des notions de *régularité elliptique*, on peut alors montrer que la situation du tore \mathbb{T}_L^d ou de la sphère S^2 est générale.

Theorem 1.1. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte lisse sans bord. Il existe une suite $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$ telle que $\lambda_n \rightarrow \infty$, et une suite de fonctions $(\phi_j)_{j \geq 0} \subset C^\infty(M)$ telles que

$$(1.26) \quad \forall j \geq 0 \quad \Delta_g \phi_j = -\lambda_j^2 \phi_j$$

Par ailleurs, (ϕ_j) est une base orthonormée de l'espace de Hilbert $L^2(M, Vol_g)$

La suite (λ_j) (ou (λ_j^2) en fonction des conventions) est appelée le *spectre* de la variété M . Il s'agit de l'objet de départ de la théorie de la géométrie spectrale. Les fonctions ϕ_j , quant à elle, sont appelées les *fonctions propres*. Il est à noter que, contrairement au spectre, la famille (ϕ_j) n'est *pas* uniquement définie, à cause du phénomène de *dégenescence* des valeurs propres (i.e. l'espace propre associé à la valeur propre λ_j n'est pas de dimension 1), que nous avons déjà rencontré dans le cas de la sphère. Dans les sections suivantes, nous allons présenter les principales questions et résultats de la Géométrie Spectrale. Nous fixons jusqu'à la fin (M, g) une variété riemannienne lisse compacte sans bord, de dimension $d \geq 1$.

2 La répartition des valeurs propres

Le premier type de problèmes concerne l'étude de la répartition asymptotique du spectre de M , et sa relation avec des informations géométriques de M .

2.1 La loi de Weyl et la question du reste

Afin d'estimer cette répartition, Weyl a introduit dans son article pionnier [Wey12] la *fonction de comptage*, définie pour $\lambda > 0$ par

$$(2.1) \quad N(\lambda) := \text{Card}\{j \geq 0 \text{ tels que } \lambda_j \leq \lambda\}$$

Alors, l'ordre principal de la fonction (2.1) est calculable à partir d'informations géométriques.

Theorem 2.1 (Loi de Weyl). La fonction de comptage $N(\lambda)$ vérifie l'asymptotique suivante

$$(2.2) \quad N(\lambda) = (2\pi)^{-d} \omega_d Vol_g(M) \lambda^d + R(\lambda)$$

où ω_d est le volume de la boule unité dans \mathbb{R}^d , $Vol_g(M)$ est le volume de la variété M pour la métrique g , et le reste $R(\lambda) = o(\lambda^d)$

Weyl conjectura par ailleurs que le reste était d'ordre $O(\lambda^{d-1})$. Cela fut établi d'abord avec une perte logarithmique par Richard Courant en 1922, et sans perte par Boris Levitan in 1952 ([Lev53]). Dans le cas du problème de Dirichlet pour un ouvert de \mathbb{R}^d (Dirichlet), un ordre supplémentaire du développement a été donné sous condition assez générale sur le bord $\partial\Omega$ dans l'article fondamental de Ivrii [Ivr80]. Observons que, plus ce reste est "petit", plus le spectre est *bien réparti asymptotiquement*.

Je n'introduirai pas la preuve, qui est très délicate, mais me contenterai d'indiquer que la manière "moderne" de prouver ce résultat passe par l'estimée similaire sur la *fonction de comptage locale* définie par

$$(2.3) \quad N(\lambda, x) := \sum_{\lambda_j \leq \lambda} |\phi_j(x)|^2$$

En effet, en utilisant la normalisation des ϕ_j , on observe que

$$(2.4) \quad N(\lambda) = \int_M N(\lambda, x) dVol_g$$

Or, la théorie de l'analyse microlocale, et en particulier des Opérateurs Intégraux de Fourier, développée depuis les années 1950 (voir [Hör09], [DH72], [Hör71]), permet de donner une autre expression de la fonction de comptage locale sous la forme d'une Intégrale Oscillante, qui peut ensuite être estimée. Cette approche est celle de l'article pionnier de Hörmander [Hör68], et le·a lecteur·ice pourra en trouver une excellente présentation dans ([Sog17, Chapitre IV]). Notons enfin que cette approche a permis d'établir que, dans le cas *générique* (précisément, dans le cas où l'ensemble des *géodésiques périodiques* est de mesure nulle dans le fibré cotangent T^*M), le reste $R(\lambda)$ dans la loi de Weyl est un $o(\lambda^{d-1})$. Cela est prouvé dans l'un des articles les plus profonds et fondateur du domaine, à savoir [DG75]. Ainsi, l'étude a été ensuite raffinée en l'estimée sous divers types de conditions du reste $R(\lambda)$.

2.2 Nos deux exemples explicites

Revenons à un cadre bien moins abstrait et bien plus accessible : le cas du tore \mathbb{T}_L^d et de la sphère S^2 . Le·a lecteur·ice, à partir des Solutions explicites (1) et (2), pourra déjà observer que la loi de Weyl est bien vérifiée, au moins au niveau des ordres, i.e. que $N(\lambda)$ est bien d'ordre λ^2 . Intéressons nous maintenant au reste $R(\lambda)$ dans ces deux cas, qui, d'après la loi de Weyl, est un $O(\lambda)$.

Dans le cas du tore, et à une constante de normalisation près dépendant de L et de la dimension, la Solution (1) nous montre que le calcul de $N(\lambda)$ est exactement équivalent au *problème du cercle de Gauss* (généralisé en dimension d), à savoir

Problème 4 (Gauss). *Quel est le nombre $N(\lambda)$ de points à coordonnées entières à l'intérieur d'une boule de rayon λ ? Précisément, on sait que pour une constante dimensionnelle c_d ,*

$$(2.5) \quad N(\lambda) = c_d \lambda^d + R(\lambda)$$

Quelle est alors la meilleure estimation possible de $R(\lambda)$?

Ce problème, non résolu, est l'un des plus connus de la *théorie des nombres*. En dimension 2, qui est la formulation originale du problème par Gauss, une célèbre conjecture de Hardy formulée en 1916 dans [Har17a] est que

$$(2.6) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad R(\lambda) = O_\varepsilon(\lambda^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$$

A l'inverse, Hardy a prouvé dans [Har17b] que

$$(2.7) \quad \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-\frac{1}{2}} R(\lambda) = +\infty$$

A l'heure actuelle, la meilleure borne supérieure est $O\left(\lambda^{\frac{131}{208}}\right)$, prouvée en 2002 par Huxley dans [Hux02]. Notons que le problème du reste de Weyl est ainsi connecté à des problèmes d'arithmétiques extrêmement fondamentaux !

Le cas de la sphère se trouve être la situation exactement opposée : il n'y a pas d'amélioration à la borne théorique $O(\lambda)$! En effet, reprenons la Solution (2). On voit alors que, pour la valeur propre $\lambda = \sqrt{l(l+1)} \sim l$, il y a exactement $2l + 1$ (qui est du même ordre) éléments de la suite λ_j tels que $\lambda_j = \lambda$. Cela empêche instantanément d'obtenir un reste meilleur que $O(\lambda)$, comme on peut s'en apercevoir en effectuant la différence $N(\lambda+1) - N(\lambda)$. Ainsi, ce cas est devenu également très célèbre, puisqu'il fournit le contre-exemple le plus simple au fait qu'il puisse exister une amélioration sans condition à la loi de Weyl. En particulier, il est très important de comprendre ce qui est spécifique à la sphère et empêche d'avoir une meilleure répartition du spectre.

3 La taille des fonctions propres

Le deuxième type de problèmes concerne l'étude des propriétés asymptotiques des fonctions propres (ϕ_j) . Nombre de questions peuvent être posées : où s'annulent-elles (théorie des domaines nodaux) ? Comment se répartit la "masse" des fonctions propres (qui sont normalisées dans $L^2(M, g)$) ? Où peuvent-elles se concentrer ? Nous nous intéresserons aux deux dernières questions, qui peuvent être résumées par la question de l'estimation des normes L^p des fonctions propres pour $p > 2$. En effet, si la norme L^∞ explose asymptotiquement, cela indique typiquement une concentration sur un point des fonctions propres. A l'inverse, l'explosion des normes L^p pour p proche de 2 indique plutôt une concentration sur des ensemble de dimension 1 ou plus. Des bornes optimales ont été introduites par Christopher Sogge dans les années 1980, [Sog85] et [Sog88].

3.1 La borne supérieure de Christopher Sogge

Afin de définir correctement le problème, il est nécessaire d'adresser le problème d'indéfinition de la suite des fonctions propres. Sogge introduit, pour λ une valeur propre, l'espace vectoriel de dimension finie

$$(3.1) \quad V_\lambda := \{\phi_\lambda \in L^2(M) \text{ telle que } -\Delta\phi_\lambda = \lambda^2\phi_\lambda\}$$

Alors, on peut mesurer la taille dans L^p des fonctions propres par

$$(3.2) \quad L^p(\lambda, g) := \sup_{\|\phi_\lambda\|_{L^2}=1} \|\phi_\lambda\|_{L^p} \quad 2 < p \leq \infty$$

qui est bien un nombre fini puisque V_λ est un espace vectoriel de dimension finie.

Theorem 3.1 (Sogge). *Supposons $d \geq 2$. Alors, il existe une constante $C(M)$ telle que, pour $p > 2$, et pour tout λ ,*

$$(3.3) \quad L^p(\lambda, g) \leq C(1 + \lambda)^{\delta(p)}$$

où

$$(3.4) \quad \delta(p) = \begin{cases} d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{2} & \frac{2(d+1)}{d-1} \leq p \leq \infty \\ \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) & 2 \leq p \leq \frac{2(d+1)}{d-1} \end{cases}$$

Enfin, cette borne est optimale dans le cas général.

Donnons quelques commentaires sur ce théorème, avant de donner les très grandes lignes de la preuve

Premièrement, pour $p = \infty$, on trouve la borne suivante, très connue, sur les fonctions propres

$$(3.5) \quad \forall j \geq 0 \quad \|\phi_j\|_{L^\infty}^2 \leq C\lambda_j^{d-1}$$

La question de l'amélioration de cette borne, dans des cas particuliers, a été une source féconde de questionnement dans les 30 dernières années. Notamment, il est prédit par Bourgain [Bou93] que dans le cas dit *complètement intégrable* on puisse avoir une amélioration polynomiale i.e. une borne $\lambda_j^{d-1-\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Malheureusement, Bourgain n'a écrit à ce sujet qu'une brève note, assez obscure, jamais reprise en article depuis. Une conséquence de mes recherches est de montrer une telle amélioration dans un cas extrêmement particulier, celui des surfaces de révolution.

Notons la séparation entre deux régimes par l'exposant dit *de Stein-Thomas*

$$(3.6) \quad p_{ST} := \frac{2(d+1)}{d-1}$$

Pour $p \geq p_{ST}$, on montre que les fonctions propres saturant la borne vont typiquement se concentrer sur des points. Au contraire, pour $2 \leq p \leq p_{ST}$, cette borne va être saturée par des fonctions propres se concentrant sur une *géodésique périodique*. La différence entre ces deux comportements, et le fait qu'on n'en a pas exhibé pour l'heure d'autre, est l'un des mystères les plus intéressants de la théorie.

Notons que l'optimalité du théorème est à nouveau obtenue... par l'exemple de la sphère! En effet, l'étude des harmoniques sphériques (voir (2)) permet de montrer que, pour $m = 0$, $Y_{l,0}$ tend à se concentrer aux pôles, où elle atteint la borne donnée par le théorème. A l'inverse, pour $m = l$, on peut montrer que $Y_{l,l}$ est très grande près de l'Equateur, et, en intégrant, que sa norme L^6 (l'exposant de Stein-Thomas) sature la borne du théorème.

Concernant la preuve, elle passe en réalité par la preuve du résultat similaire sur les *projecteurs spectraux*, que nous introduirons à la Section 4. Je me contenterai de dire que, d'une part, il suffit par les théorèmes *d'interpolation complexe* (voir par exemple le cours d'analyse harmonique de Tao) de montrer les cas $p = \infty$ et $p = p_{ST}$.

Dans le cas $p = \infty$, la preuve par l'analyse microlocale présentée dans [Sog17][Chapitre 4] fournit l'estimée souhaitée, qui est en fait un Lemme intermédiaire dans la preuve de la loi de Weyl

Dans le cas $p = p_{ST}$, la preuve historique utilise, outre l'analyse microlocale, des théorèmes très fins issus de l'analyse harmonique, et notamment le Théorème de Carleson-Sjölin. C'est notamment ce théorème qui permet de comprendre comment apparaît l'exposant de Stein-Thomas (Elias Stein est d'ailleurs le directeur de thèse de Christopher Sogge). Mon directeur de mémoire (puis de thèse) Pierre Germain m'a indiqué qu'une manière beaucoup plus élémentaire d'aborder le problème avait été obtenue en utilisant plutôt des outils de type estimées de Strichartz, dans [BGT03].

3.2 Le problème inverse de la borne inférieure

De même que l'étude du reste dans la loi de Weyl est devenue la source principale de travaux depuis plus d'un demi-siècle dans l'étude du spectre, de même les recherches plus récentes se sont concentrés sur la question de l'optimalité de la borne donnée par le Théorème (3.1). Je serai très allusive dans cette Sous-section, me contentant d'énoncer quelques résultats en renvoyant aux articles pour les définitions.

D'une part, de nombreux-ses auteur-ices ont cherché des conditions nécessaire et suffisante pour que la borne soit *atteinte*. Sogge lui-même a démontré dans les années 2000 ([Sog01], [SZ02]) une condition *nécessaire* pour que la borne soit atteinte. Précisément, Sogge prend le cas d'une variété riemannienne telle que l'ensemble des *lacets géodésiques* (i.e. des courbes géodésiques qui repassent deux fois par le même point, sans nécessairement être périodiques). C'est une condition similaire, mais plus forte, à la condition de Duistermaat et Guillemin pour obtenir un reste $o(\lambda^{d-1})$ dans la loi de Weyl [DG75]. Alors, Sogge a montré que l'on a

$$(3.7) \quad \sup_{\phi \in V_\lambda} \frac{\|\phi\|_{L^p(M)}}{\|\phi\|_{L^2(M)}} = o\left(\lambda^{\delta(p)}\right) \quad p > \frac{2(n+1)}{n-1}$$

L'interprétation de ce résultat est que, pour que M ait la propriété de *croissante maximale des fonctions propres*, i.e. pour que $L^\infty(\lambda_j, g) \approx \lambda_j^{\frac{d-1}{2}}$ le long d'une sous-suite, alors il est nécessaire qu'il existe au moins un point $x \in M$ tel que les géodésiques de M se croisent "beaucoup" en x . Un tel phénomène arrive notamment lorsqu'il existe des *points conjugués* sur M (on peut penser au cas d'une sphère : toutes les géodésiques partant d'un point passent par le point antipodal, et inversement). A nouveau, on trouve un lien entre les propriétés spectrales de M et des propriétés géométriques extrêmement fines, i.e. à quel point les géodésiques de M repassent par les mêmes points.

D'autre part, quelques résultats existent pour obtenir l'existence d'une suite de fonctions propres exhibant une grande croissance de norme L^p . Le principal résultat, étudié dans [TZ02], [TZ03a], [TZ03b], est que, sous une certaine hypothèse de type *complète intégrabilité* sur M , et sous l'hypothèse que M n'est pas plat (i.e. non isométrique à un tore plat), alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite de fonctions propres normalisées dans L^2 ϕ_k telles que

$$(3.8) \quad \begin{cases} \|\phi_k\|_{L^\infty} \geq C(\varepsilon)\lambda_k^{\frac{1}{4}-\varepsilon} \\ \|\phi_k\|_p \geq C(\varepsilon)\lambda_k^{\frac{p-2}{4p}-\varepsilon} \end{cases}$$

4 Un problème intermédiaire : estimer les projecteurs spectraux sur de fins intervalles de fréquence

Dans cette section, je présente brièvement le problème d'estimation des projecteurs spectraux sur de fins intervalles de fréquence, qui peut être vu comme une relaxation à la fois du problème de répartition du spectre de M , et du problème de borner supérieurement les normes L^p des fonctions propres. Pour une présentation complète, je renvoie à l'excellent article de review de Pierre Germain [Ger23]. Comme il s'agit d'une présentation sur des résultats de recherche contemporaine, je ne détaillerai pas les définitions usuelles.

4.1 Énoncé du problème et théorème de Sogge

Soient $\lambda, \delta > 0$.

Definition 4.1. *Le projecteur spectral sur l'intervalle de fréquence $[\lambda - \delta, \lambda + \delta]$ est le projecteur orthogonal sur l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les fonctions propres ϕ_j avec valeurs propres λ_j telles que $\lambda_j \in [\lambda - \delta, \lambda + \delta]$, i.e. sur*

$$(4.1) \quad \cup_{\lambda_j \in [\lambda - \delta, \lambda + \delta]} V_{\lambda_j}$$

Le-a lecteur·ice plus familier·ère de la théorie spectrale remarquera que, de façon équivalente, il est plus usuel de définir $P_{\lambda, \delta}$ par le calcul fonctionnel, i.e.

$$(4.2) \quad P_{\lambda, \delta} := 1_{[\lambda - \delta, \lambda + \delta]}(\sqrt{-\Delta})$$

où $1_{[\lambda - \delta, \lambda + \delta]}$ est l'indicatrice du segment $[\lambda - \delta, \lambda + \delta]$.

Alors, on s'intéresse au problème suivant

Problème 5. *Étant donné M , pour $p \geq 2$, quelle borne a-t-on lorsque $\lambda \gg 1$ et $\delta \ll 1$ sur la norme de $P_{\lambda, \delta}$, vu comme opérateur de $L^2(M, g)$ dans $L^p(M, g)$? À quel point peut-on choisir δ petit (notamment par rapport à λ) ?*

Remarquons que, d'une part, avec la notation (2.3), on peut montrer que

$$(4.3) \quad \begin{aligned} N(\lambda + \delta, x) - N(\lambda - \delta, x) &= \sum_{\lambda_j \in [\lambda - \delta, \lambda + \delta]} |\phi_j(x)|^2 \\ &= P_{\lambda, \delta}(x, x) \end{aligned}$$

où $P_{\lambda, \delta}(x, y)$ est le *noyau de Schwartz* de l'opérateur $P_{\lambda, \delta}$. À partir de cette observation, le calcul de la fonction spectrale locale peut être obtenu à partir du projecteur spectral, et par des *théorèmes taubériens*. C'est d'ailleurs l'approche choisie par Sogge dans sa présentation de la loi de Weyl.

D'autre part, pour tout $\delta > 0$, on a aisément que

$$(4.4) \quad L^p(\lambda, g) \leq \|P_{\lambda, \delta}\|_{L^2(M) \rightarrow L^p(M)}$$

Ainsi, toute borne sur les projecteurs spectraux implique instantanément une borne supérieure sur la taille des fonctions propres. En effet, le théorème de Sogge (3.1) est en réalité énoncé pour des projecteurs spectraux, comme nous allons le voir. En effet, le principal résultat connu, pour le cas $\delta = 1$ est le Théorème de Sogge ([Sog88]).

Theorem 4.1 (Sogge). *Dans le cas $\delta = 1$, on a*

$$(4.5) \quad \|P_{\lambda, 1}\|_{L^2 \rightarrow L^p} \leq C_p \lambda^{\delta(p)}$$

où $\delta(p)$ est défini par (3.4). De plus, cette borne est optimale au sens où il existe une constante R_0 telle que pour tout λ_0 il existe λ avec $|\lambda - \lambda_0| < R_0$ et

$$(4.6) \quad \|P_{\lambda, 1}\|_{L^2 \rightarrow L^p} \geq c_p \lambda^{\delta(p)}$$

4.2 Le cas $\delta \ll 1$

La question de trouver une borne supérieure² dans le cas où $\delta \ll 1$, et notamment dans le cas intéressant où $\delta \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, est largement ouverte. Les principaux obstacles sont

- i. La mauvaise répartition du spectre, i.e. il n'y a pas d'amélioration possible au terme de reste dans la loi de Weyl
- ii. La concentration des fonctions propres, i.e. il existe des fonctions propres avec une très grande norme L^p

Dans le cas de l'espace euclidien \mathbb{R}^d , où $P_{\lambda,\delta}$ est défini par le calcul fonctionnel (4.2), on a l'estimée

$$(4.7) \quad \forall p \geq p_{ST}, \forall \lambda \geq 1, \forall \delta \geq 0, \|P_{\lambda,\delta}\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \delta^{\frac{1}{2}} \lambda^{\delta(p)}$$

ce qui reflète la bonne répartition à la fois du "spectre" et de la "masse spectrale" dans un sens généralisé où l'on peut voir les fonctions $x \rightarrow e^{ix\xi}$ $\xi \in \mathbb{R}^d$ comme les fonctions propres, de valeur propre $|\xi|$.

Dans le cas de courbure nulle, Pierre Germain et Simon Rydin Myerson ont étudié le cas du tore d -dimensionnel non nécessairement droit, i.e. \mathbb{R}^d/Λ où Λ est un réseau de \mathbb{R}^d , dans [GR22] et [GR23]. Ils ont proposé la conjecture

$$(4.8) \quad \|P_{\lambda,\delta}\|_{L^2 \rightarrow L^p} \leq C_p \left(\lambda^{\frac{d-1}{2} - \frac{d}{p}} \delta^{\frac{1}{2}} + (\lambda\delta)^{\frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)} \right) \quad 2 \leq p \leq \infty$$

La conjecture a été montrée dans un certain nombre de cas, qui incluent notamment le cas du tore plat \mathbb{T}^d dans le cadre $p \geq \frac{2(d-1)}{d-3}$ et $d \geq 4$ (Bourgain et Demeter [BD15]), et dans le cas d'un réseau général Λ si $p \leq p_{ST}$ ou si $p \geq p_{ST}$ et $\delta > \lambda^{-\frac{(d-1)p - dp_{ST} + 2}{(d+1)p - dp_{ST} - 2}}$ (Germain et Rydin-Myerson).

Par ailleurs, les mêmes auteurs ont prouvé une borne supérieure essentiellement optimale dans le cas (non compact) du cylindre $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ dans [GM22].

Dans le cas de courbure négative, la question a été résolue pour l'espace hyperbolique standard de dimension d dans [CH18] et [GL23]. On a

$$(4.9) \quad \|P_{\lambda,\delta}\|_{L^2 \rightarrow L^p} \leq C_p \left(\lambda^{\frac{d-1}{2} - \frac{d}{p}} + \lambda^{\frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)} \right) \delta^{\frac{1}{2}}$$

Notons également que, dans le cas de courbure négative, certaines améliorations ont été obtenues dans le cas où δ est *logarithmiquement* petit par rapport à λ , ce qui implique des améliorations *logarithmique* sur la taille des fonctions propres (voir [Ger23] et les références qui sont citées).

4.3 Le cas de courbure positive

Dans le cas de courbure positive, quasiment aucun résultat n'est connu, à part le résultat non quantitatif esquissé dans [Bou93]. En effet, pour la sphère S^2 , on a aisément que $P_{\lambda,\delta} = P_{\lambda,\frac{1}{2}}$ pour tout $\delta \ll 1$. En particulier, aucune amélioration à la borne donnée par le théorème de Sogge (4.1) ne peut arriver pour $\delta \rightarrow 0$.

L'objet de mon mémoire de M2 était alors d'étudier le cas d'une *surface de révolution* qui ne soit *pas* la sphère, par exemple le cas d'un *ellipsoïde de révolution*. D'une part, ce cas est encourageant, car Yves Colin de Verdière a montré (entre autres) dans le très important [Col73] le Théorème suivant

Theorem 4.2 (Colin de Verdière). *Soit (S^2, g) une surface de révolution, i.e. la métrique g est invariante par rotation d'axe vertical sur S^2 . Génériquement, le terme de reste dans la loi de Weyl (2.2) vérifie la borne*

$$(4.10) \quad R(\lambda) = O(\lambda^{\frac{2}{3}})$$

Ainsi, génériquement, le *spectre* d'une surface de révolution est bien réparti au moins sur une taille $\delta = \lambda^{-\frac{1}{3}}$. Cela est en particulier un signe encourageant d'amélioration possible de la borne supérieure.

D'autre part, un résultat plus décourageant est la persistance du phénomène de *concentration des fonctions propres aux pôles* présent dans le cas de la sphère. En effet, en s'appuyant sur les articles de Donnelly [Don01] et [Don78], on peut montrer que, si p est le pôle Nord ou le pôle Sud d'une surface de révolution, alors

2. Une borne inférieure est toujours vraie, et se déduit très facilement de la borne inférieure dans le Théorème de Sogge

$$(4.11) \quad \sup_{\lambda_j \leq \lambda} |\phi_j(p)| \geq c\lambda^{\frac{1}{2}}$$

ce qui implique l'existence d'une suite de fonctions propres exhibant une *croissance maximale* en norme L^∞ .

Néanmoins, on peut obtenir une amélioration *polynomiale* de la borne supérieure de Sogge, dans le cas $p = \infty$ (et donc dans le cas $p > p_{ST}$ par interpolation), pour peu que l'on exclue les pôles de l'estimée. Cela est l'objet d'un (très long) article en voie de finition, que j'ai écrit à la suite de mon mémoire de M2. J'y montre précisément, sous un ensemble d'hypothèses non vide (contenant en particulier tous les ellipsoïdes de révolution hors la sphère), le résultat suivant pour \mathcal{S} une surface de révolution convenable

Theorem 4.3. *Soit $\varepsilon > 0$ et K_ε l'ensemble des points de \mathcal{S} à distance au moins ε des deux pôles. Alors pour tout $\lambda \gg 1$,*

$$(4.12) \quad \forall \delta \geq \lambda^{-\eta} \quad \|P_{\lambda,\delta}\|_{L^2(\mathcal{S}) \rightarrow L^\infty(K_\varepsilon)} \leq C\lambda^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}$$

En outre, on peut calculer explicitement un exposant $\eta > 0$ (non optimal) pour lequel la borne est vraie

Comme principale conséquence, j'obtiens, de façon similaire à [Bou93], une amélioration polynomiale à la borne supérieure sur la norme L^∞ des fonctions propres pour cette classe de surfaces de révolution (hors des pôles), cette amélioration étant de plus *quantifiable*.

Références

- [Bou93] Jean BOURGAIN. *Eigenfunction bounds for compact manifolds with integrable geodesic flow*. Institut des Hautes Etudes Scientifique, 1993.
- [BD15] Jean BOURGAIN et Ciprian DEMETER. « The proof of the L^2 decoupling conjecture ». In : *Annals of mathematics* (2015), p. 351-389.
- [BGT03] Nicolas BURQ, Patrick GÉRARD et Nikolay TZVETKOV. « The Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation on a compact manifold ». In : *Journal of Nonlinear Mathematical Physics* 10.Suppl 1 (2003), p. 12-27.
- [CH18] Xi CHEN et Andrew HASSELL. « Resolvent and spectral measure on non-trapping asymptotically hyperbolic manifolds II : spectral measure, restriction theorem, spectral multipliers ». In : *Annales de l'Institut Fourier*. T. 68. 3. 2018, p. 1011-1075.
- [CTL73] Claude COHEN, B Diu TANNOUDI et F LALOË. « Mécanique quantique ». In : *Vol. I-II, Collection Enseignement des sciences* 16 (1973).
- [Col73] Yves COLIN DE VERDIÈRE. « Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. II ». In : *Compositio Mathematica* 27.2 (1973), p. 159-184.
- [Don78] Harold DONNELLY. « G-spaces, the asymptotic splitting of $L^2(M)$ into irreducibles ». In : *Mathematische Annalen* 237 (1978), p. 23-40.
- [Don01] Harold DONNELLY. « Bounds for eigenfunctions of the Laplacian on compact Riemannian manifolds ». In : *Journal of Functional Analysis* 187.1 (2001), p. 247-261.
- [DG75] JJ DUISTERMAAT et VW GUILLEMIN. « The Spectrum of Positive Elliptic Operators and Periodic Bicharacteristics. » In : *Inventiones mathematicae* 29 (1975), p. 39-80.
- [DH72] JJ DUISTERMAAT et L HÖRMANDER. « Fourier integral operators. II ». In : *Acta Mathematica* 128 (1972), p. 183-269.
- [GR23] P GERMAIN et Simon L RYDIN MYERSON. « Bounds for spectral projectors on generic tori ». In : *Mathematische Annalen* (2023).
- [Ger23] Pierre GERMAIN. « L^2 to L^p bounds for spectral projectors on thin intervals in Riemannian manifolds ». In : *arXiv preprint arXiv :2306.16981* (2023).
- [GL23] Pierre GERMAIN et Tristan LÉGER. « Spectral projectors, resolvent, and Fourier restriction on the hyperbolic space ». In : *Journal of Functional Analysis* 285.2 (2023), p. 109918.
- [GM22] Pierre GERMAIN et Simon MYERSON. « Bounds for spectral projectors on the Euclidean cylinder ». In : *Comptes Rendus. Mathématique* 360.G11 (2022), p. 1257-1262.

- [GR22] Pierre GERMAIN et Simon L RYDIN MYERSON. « Bounds for spectral projectors on generic tori ». In : *Mathematische Annalen* (2022), p. 1-37.
- [Har17a] GH HARDY. « The average order of the arithmetical functions $P(x)$ and $\Delta(x)$ ». In : *Proceedings of the London Mathematical Society* 2.1 (1917), p. 192-213.
- [Har17b] Gr H HARDY. « On Dirichlet's divisor problem ». In : *Proceedings of the London Mathematical Society* 2.1 (1917), p. 1-25.
- [Hör68] Lars HÖRMANDER. « The spectral function of an elliptic operator ». In : *Acta Mathematica* 121.1 (1968), p. 193-218.
- [Hör71] Lars HÖRMANDER. « Fourier integral operators. I ». In : *Acta Mathematica* 127 (1971), p. 79-183.
- [Hör09] Lars HÖRMANDER. *The analysis of linear partial differential operators IV : Fourier integral operators*. Springer, 2009.
- [Hux02] Martin N HUXLEY. « Integer points, exponential sums and the Riemann zeta function ». In : *Surveys in Number Theory*. AK Peters/CRC Press, 2002, p. 109-124.
- [Ivr80] V Ya IVRII. « Second term of the spectral asymptotic expansion of the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary ». In : *Functional Analysis and Its Applications* 14.2 (1980), p. 98-106.
- [Kac66] Mark KAC. « Can one hear the shape of a drum ? » In : *The american mathematical monthly* 73.4P2 (1966), p. 1-23.
- [Lev53] Boris Moiseevich LEVITAN. « On the asymptotic behavior of the spectral function of a self-adjoint differential equation of the second order and on expansion in eigenfunctions ». In : *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya* 17.4 (1953), p. 331-364.
- [Sog88] Christopher D SOGGE. « Concerning the L_p norm of spectral clusters for second-order elliptic operators on compact manifolds ». In : *Journal of functional analysis* 77.1 (1988), p. 123-138.
- [Sog01] Christopher D SOGGE. « Riemannian manifolds with maximal eigenfunction growth ». In : *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) dit aussi "Séminaire Goulaouic-Schwartz"* (2001), p. 1-16.
- [Sog17] Christopher D SOGGE. *Fourier integrals in classical analysis*. T. 210. Cambridge University Press, 2017.
- [SZ02] Christopher D SOGGE et Steve ZELDITCH. « Riemannian manifolds with maximal eigenfunction growth ». In : *Duke Mathematical Journal* 114.3 (2002), p. 387-437.
- [Sog85] Christopher Donald SOGGE. *Oscillatory integrals and spherical harmonics*. Princeton University, 1985.
- [TZ02] John A TOTH et Steve ZELDITCH. « Riemannian manifolds with uniformly bounded eigenfunctions ». In : *Duke Mathematical Journal* 111.1 (2002), p. 97-132.
- [TZ03a] John A TOTH et Steve ZELDITCH. « L_p norms of eigenfunctions in the completely integrable case ». In : *Annales Henri Poincaré*. T. 4. 2. Birkhauser Verlag Basel. 2003, p. 343-368.
- [TZ03b] John A TOTH et Steve ZELDITCH. « Norms of modes and quasi-modes revisited ». In : *Contemporary Mathematics* 320 (2003), p. 435-458.
- [Wey12] Hermann WEYL. « Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung) ». In : *Mathematische Annalen* 71.4 (1912), p. 441-479.