

Matrices et tenseurs aléatoires : Universalités de Wigner et Gurau

Introduction au Domaine de Recherche

Rémi Bonnin

CDSN sous la supervision de Charles Bordenave et Djalil Chafaï

Juin 2024

1 Des matrices aux tenseurs aléatoires

1.1 Introduction

L'étude des matrices aléatoires et des tenseurs aléatoires constitue un domaine de recherche riche et en pleine expansion. Réunissant les probabilités et l'algèbre linéaire, ce domaine trouve des applications multiples en physique théorique, informatique et bien d'autres.

Historique. Les matrices aléatoires ont vu le jour au début du XXe siècle, avec les travaux de John Wishart en 1928 sur les distributions de matrices de covariance en statistique multivariée. Puis, von Neuman et Goldstine s'y intéressèrent dans les années 1940-1950 durant la naissance de l'informatique et de l'analyse numérique des données. Cependant, c'est au milieu du XXe siècle que le domaine a véritablement pris son essor grâce aux recherches d'Eugene Wigner sur les spectres d'hamiltoniens dans la physique nucléaire. Wigner a introduit l'idée que les niveaux d'énergie des noyaux atomiques peuvent être modélisés par des matrices aléatoires, jetant ainsi les bases de la théorie moderne des matrices aléatoires. Des travaux de mathématiciens tels que Marchenko, Pastur ou Girko ont suivi dans les décennies suivantes avant une myriade de travaux plus récents à la croisée de multiples domaines des mathématiques, de la physique, de l'informatique, ou encore de la biologie. En revanche, les tenseurs, qui généralisent la notion de matrices à des dimensions supérieures, sont étudiés de manière aléatoire depuis les dernières décennies seulement. En effet, bien que leur application remonte à des problèmes classiques de la physique statistique et de la théorie des probabilités, ceux-ci sont nettement plus complexes à étudier. Les travaux récents se concentrent sur l'étude des tenseurs pour la théorie quantique des champs [1] ainsi que la généralisation des résultats connus pour les matrices aléatoires aux tenseurs, avec un intérêt particulier pour les problèmes d'optimisation et d'apprentissage automatique [2].

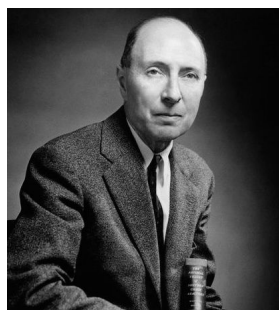


FIGURE 1 – Eugene Wigner (1902-1995)

Motivations et applications. En physique, les matrices aléatoires permettent de modéliser des systèmes complexes et désordonnés où les interactions ne peuvent pas être décrites de manière déterministe. En statistiques, elles jouent un rôle crucial dans l'analyse de données multivariées, notamment à travers les méthodes d'analyse en composantes principales (PCA). En ingénierie et en informatique, elles sont employées dans le traitement du signal et l'apprentissage automatique, où elles aident à

comprendre et à optimiser les algorithmes de clustering et de classification. Plus généralement, elles apparaissent dans de très nombreux autres domaines des mathématiques, jusqu'en théorie des nombres pour travailler sur la conjecture de Riemann par exemple! L'étude des tenseurs aléatoires est motivée par la nécessité de modéliser des données multidimensionnelles. Les tenseurs aléatoires permettent de capturer des interactions plus complexes que les matrices, ce qui est crucial pour analyser des données structurées en haute dimension. En physique par exemple, ils sont essentiels en théorie quantique des champs et souvent étudiés via le prisme des verres de spin. En apprentissage automatique, ils sont utilisés pour améliorer les algorithmes de deep learning à travers des architectures tensorielles [3]. En traitement du signal, l'étude spectrale des tenseurs aide à extraire des caractéristiques pertinentes de données multidimensionnelles. En neurosciences, ils permettent de modéliser les interactions complexes entre différentes régions du cerveau. Enfin, en informatique quantique, les tenseurs aléatoires sont employés pour simuler des systèmes quantiques et optimiser des algorithmes quantiques via des réseaux de tenseurs. Ce domaine est en plein bouillonnement actuellement, et un colloque de 3 semaines sur le sujet va notamment avoir lieu à l'Institut Henri Poincaré en octobre.

1.2 Matrices et tenseurs aléatoires symétriques réels

Soit $N \geq 1$ et $p \geq 2$ (resp. $p = 2$). Un *tenseur d'ordre p* (resp. *une matrice*) est une application de $\{1, \dots, N\}^p$ dans $\mathbb{R}^{\overbrace{N \times \dots \times N}^{p \text{ fois}}}$.

Définition 1. Un tenseur (resp. une matrice) X est *symétrique* si et seulement si,

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p, X_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} = X_{i_1 \dots i_p}$$

On note $\mathcal{S}_p(N)$ l'ensemble des tenseurs (resp. matrices) symétriques réels.

Cela signifie que l'entrée est la même si l'on permute les indices ; en particulier, pour une matrice c'est que $\forall i, j, X_{ij} = X_{ji}$.

De plus, on parle de matrice ou de tenseur *aléatoire* lorsque chaque entrée est une variable aléatoire suivant une loi de probabilité. Nous ne travaillerons dans la suite qu'avec des matrices et tenseurs aléatoires symétriques réels.

GOE et GOTE Le modèle canonique des matrices symétriques réelles est le *Gaussian Orthogonal Ensemble* (GOE). Soient $(W_{ii})_{i \geq 1}$ des variables *i.i.d.* Gaussiennes centrées et de variance 2, et indépendamment soient $(W_{ij})_{1 \leq i < j}$ des variables *i.i.d.* Gaussiennes centrées et de variance 1, et on pose $W_{ji} = W_{ij}$ (i.e. $W_{ii} \sim \mathcal{N}(0, 2)$ et $W_{ji} = W_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1)$). Alors la distribution de probabilité de la matrice

$$W = (W_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$$

est appelée GOE. La distribution jointe des éléments $W = (W_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq N}$ peut s'écrire :

$$c(N) e^{-\frac{1}{4} \text{Tr}(W^2)} dW$$

où $c(N)$ est une constante de normalisation et $dW = \prod_{i \leq j} dW_{ij}$. En effet, on peut vérifier par calcul,

$$\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{4} W_{ii}^2} \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} W_{ij}^2} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi)^{-\frac{N(N+1)}{4}}}_{c(N)} e^{-\frac{1}{4} \text{Tr}(W^2)}$$

De plus, une matrice W du GOE possède la propriété d'invariance remarquable que pour toute matrice déterministe O du groupe orthogonal $\mathbf{O}(N)$, la distribution de W est la même que celle de OWO^T .

Il existe une généralisation de cet ensemble pour les tenseurs que l'on nomme le *Gaussian Orthogonal Tensor Ensemble* (GOTE). Pour un tenseur symétrique \mathcal{W} du GOTE, on a

$$\mathcal{W}_{i_1, \dots, i_p} \sim \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{(p-1)!} \prod_{j=1}^N c_j(i_1, \dots, i_p)! \right)$$

où $c_j(i_1, \dots, i_p)$ est le nombre d'occurrences de j dans (i_1, \dots, i_p) . La distribution jointe du GOTE est alors

$$c_p(N) e^{-\frac{1}{2p} \|\mathcal{W}\|_F^2} d\mathcal{W}$$

où $c_p(N)$ est une constante de normalisation, $d\mathcal{W} = \prod_{i_1 \leq \dots \leq i_p} d\mathcal{W}_{i_1 \dots i_p}$ et $\|\mathcal{W}\|_F = \sqrt{\sum_{i_1, \dots, i_p} \mathcal{W}_{i_1, \dots, i_p}^2}$.

Exemple. Pour $p = 3$, la norme de Frobenius vaut :

$$\|\mathcal{W}\|_F^2 = \sum_i \mathcal{W}_{iii}^2 + 3 \sum_{i \neq j} \mathcal{W}_{iij}^2 + 6 \sum_{i < j < k} \mathcal{W}_{ijk}^2$$

Ainsi,

$$\sigma_{ijk}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \delta_{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ik} + \frac{1}{2} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{ik} \in \left\{ 3, 1, \frac{1}{2} \right\}$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

De plus, en définissant la transformation multilinéaire

$$(\mathcal{W} \cdot O^p)_{i_1, \dots, i_p} := \sum_{j_1, \dots, j_p} \mathcal{W}_{j_1, \dots, j_p} \prod_{t=1}^p O_{i_t j_t}$$

on a encore la propriété que la loi du GOTE est invariante par action du groupe orthogonal, puisque

$$\forall O \in \mathbf{O}(N), \quad \|\mathcal{W} \cdot O^p\|_F = \|\mathcal{W}\|_F$$

2 Matrices aléatoires et universalité de Wigner

2.1 Mesure empirique des valeurs propres

Une matrice symétrique réelle $M \in \mathcal{S}_2(N)$ possède N valeurs propres réelles $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$.

Définition 2. La *mesure empirique des valeurs propres* est la mesure de probabilité sur \mathbb{R} donnée par

$$\mu_M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}$$

Par le théorème spectral, celle-ci vérifie pour toute fonction f ,

$$\int f(\lambda) d\mu_M(\lambda) = \frac{1}{N} \text{Tr}(f(M))$$

En particulier pour tout $k \geq 0$,

$$\int \lambda^k d\mu_M(\lambda) = \frac{1}{N} \text{Tr}(M^k)$$

Définition 3. La transformée de Cauchy-Stieltjes de cette mesure, définie pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ par :

$$R(z) := \int \frac{1}{z - \lambda} d\mu_M(\lambda)$$

est appelée *résolvante* de la matrice M .

En utilisant $f : \lambda \mapsto \frac{1}{z-\lambda}$, on peut aussi écrire

$$R(z) = \frac{1}{N} \text{Tr}((zI_N - M)^{-1})$$

Proposition 1. *Pour tout $|z| > \max(\lambda_1, -\lambda_N)$, la résolvante possède une expansion :*

$$R(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{z^{k+1}} \frac{\text{Tr}(M^k)}{N}$$

Preuve. Il suffit de remarquer que pour $|z| > \max(\lambda_1, -\lambda_N)$:

$$\int \frac{1}{z-\lambda} d\mu_M(\lambda) = \frac{1}{z} \int \sum_{k \geq 0} \left(\frac{\lambda}{z}\right)^k d\mu_M(\lambda) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{z^{k+1}} \int \lambda^k d\mu_M(\lambda)$$

2.2 Loi du semi-cercle de Wigner

Matrice de Wigner. Soit $(M_{ij})_{i,j \geq 1}$ un tableau infini de variables aléatoires centrées telles que pour tout $1 \leq i < j$,

$$M_{ij} = M_{ji}$$

sont de même loi Q de variance σ^2 , et pour tout i , M_{ii} sont de même loi P de variance finie. On définit alors pour tout $N \geq 1$, la matrice aléatoire $M = (M_{ij})_{1 \leq i,j \leq N} \in \mathcal{S}_2(N)$ que l'on appelle *matrice de Wigner*. C'est le cas de matrices du GOE.

Convergence faible. Soient $\nu, (\nu_N)_{N \geq 1}$ des mesures de probabilité sur \mathbb{R} . On dit que ν_N converge faiblement vers ν si pour toute fonction continue bornée f ,

$$\int f d\nu_N \rightarrow \int f d\nu$$

La topologie faible est métrisable avec la distance de Lévy d_l et l'ensemble des mesures de probabilité sur \mathbb{R} muni de d_l est un espace polonais.

Si $(\nu_N)_{N \geq 1}$ sont des mesures aléatoires, on dit alors que ν_N converge faiblement vers ν *presque sûrement* lorsque *p.s.* pour toute fonction continue bornée f ,

$$\int f d\nu_N \rightarrow \int f d\nu$$

Nous pouvons alors désormais énoncer le résultat le plus essentiel de la théorie des matrices aléatoires.

Théorème 1 (Théorème de Wigner). *Soit M une matrice de Wigner. On note $Y := \frac{M}{\sqrt{N}}$. Alors p.s. faiblement,*

$$\mu_Y \rightarrow \mu_{sc}$$

où μ_{sc} est la loi du demi-cercle sur l'intervalle $[-2\sigma, 2\sigma]$ de densité

$$x \mapsto \frac{\sqrt{4\sigma^2 - x^2}}{2\pi\sigma^2} \mathbf{1}_{[-2\sigma, 2\sigma]}(x)$$

Voici une simulation de la répartition des valeurs propres d'une grande matrice symétrique (la répartition selon le semi-cercle s'observe en réalité dès des valeurs de N pas si grandes) :

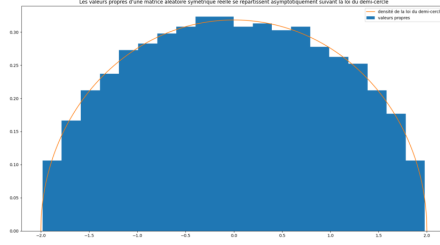


FIGURE 2 – Loi du semi-cercle

2.3 Approche combinatoire

Nous allons désormais donner une ébauche de preuve du théorème de Wigner par une approche combinatoire très instructive, en utilisant la méthode des moments. Pour cela, nous allons désormais supposer que :

- $\sigma^2 = 1$, quitte à dilater la loi limite, on peut toujours le supposer.
- Les lois Q et P sont à valeurs dans $[-C, C]$. Ainsi, tous leurs moments sont finis, et les lois sont donc uniquement déterminées par leur moments ce qui permettra d'utiliser directement la méthode des moments. Se passer de cette hypothèse demande un peu de travail et nous n'entrerons pas dans les détails.

Lemme 1 (Méthode des moments). *Dans ce cadre, on a que si pour tout $k \geq 1$, $\int x^k d\mu_M(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \int x^k d\mu_{sc}(x)$ p.s., alors $\mu_Y \rightarrow \mu_{sc}$ faiblement p.s..*

C'est un lemme classique de probabilités que nous ne prouverons pas ici.

Moments du semi-cercle. On peut d'une part facilement calculer les moments de la loi du semi-cercle,

$$d\mu_{sc}(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi\sigma^2} \mathbf{1}_{[-2,2]}(x)$$

Pour $k \geq 0$,

$$\int x^{2k+1} d\mu_{sc}(x) = 0$$

et

$$\int x^{2k} d\mu_{sc}(x) = C_k$$

où $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ est le k -ième nombre de Catalan.

Convergence de l'espérance. On va en fait d'abord montrer que la mesure de probabilité donnée par l'espérance de la mesure empirique des valeurs propres de Y converge faiblement vers la loi du semi-cercle.

Lemme 2. *Pour tout $k \geq 0$,*

$$\mathbb{E} \int x^k d\mu_Y \rightarrow \int x^k d\mu_{sc}$$

Preuve. On a d'abord que

$$\mathbb{E} \int x^k d\mu_Y = \frac{1}{N} \mathbb{E} \text{Tr} Y^k$$

Puis on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \mathbb{E} \text{Tr} Y^k &= \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \mathbb{E} \text{Tr} M^k \\ &= \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \mathbb{E} \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \prod_{j=1}^k M_{i_j, i_{j+1}} \\ &= \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{(i_1, \dots, i_k)} T(\mathbf{i}) \end{aligned}$$

où $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$, $i_{k+1} = i_1$ et

$$T(\mathbf{i}) = \mathbb{E} \prod_{j=1}^k M_{i_j, i_{j+1}}$$

On dit que deux chemins \mathbf{i} et \mathbf{i}' sont équivalents s'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ tel que $\forall j, i_j = i'_{\sigma(j)}$. Alors, $T(\mathbf{i})$ est constant sur chaque classe d'équivalence de cette relation d'équivalence puisque la loi de M est invariante par permutation des entrées. De plus, en notant $|\mathbf{i}| := |\{i_1, \dots, i_k\}|$, le nombre de chemins dans la classe d'équivalence de \mathbf{i} est

$$N(N-1)\dots(N-|\mathbf{i}|+1) \sim N^{|\mathbf{i}|}$$

Notons alors \mathcal{C}_k l'ensemble des chemins canoniques, où l'on a choisi un chemin dans chaque classe d'équivalence en imposant $i_1 = 1$ et

$$i_{j+1} \leq 1 + \max_{s \leq j} (i_s)$$

Alors,

$$\frac{1}{N} \mathbb{E} \text{Tr} Y^k = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{C}_k} \frac{N(N-1)\dots(N-|\mathbf{i}|+1)}{N^{1+\frac{k}{2}}} T(\mathbf{i})$$

Définissons désormais $G = (V, E)$ le graphe donné par $V = \{i_1, \dots, i_k\}$ et $E = \{\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_k, i_1\}\}$. Pour $e \in E$, on définit la multiplicité de l'arête e par

$$m_e := \sum_{j=1}^k \mathbf{1}_{\{i_j, i_{j+1}\} = e}$$

Alors par indépendance,

$$T(\mathbf{i}) = \mathbb{E} \prod_{j=1}^k M_{i_j, i_{j+1}} = \prod_{e \in E} \mathbb{E} [M_e^{m_e}]$$

Et comme les variables sont centrées, s'il existe $e \in E$ telle que $m_e = 1$, alors $T(\mathbf{i}) = 0$. Donc pour tout $e \in E$, $m_e \geq 2$ et ainsi :

$$k = \sum_{e \in E} m_e \geq 2 \times |E|$$

On en déduit que

$$|E| \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$$

et alors par la formule d'Euler sur les graphes :

$$|\mathbf{i}| = |V| \leq 1 + |E| \leq 1 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$$

avec égalité si G est un arbre ($|V| \leq 1 + |E|$) et que $\forall e \in E, m_e = 2$ (et en particulier k pair). On note $\tilde{\mathcal{C}}_k$ l'ensemble des chemins canoniques \mathbf{i} donnant ce cas d'égalité. De plus, les autres chemins ne contribuent pas à l'ordre 1 puisque $|\mathbf{i}| \leq 1 + \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$ et pour tout \mathbf{i} ,

$$|T(\mathbf{i})| \leq C^k$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \mathbb{E} \text{Tr} Y^k &= \mathbf{1}_{n \text{ pair}} \sum_{\mathbf{i} \in \tilde{\mathcal{C}}_k} (\mathbb{E} M_{12}^2)^{\frac{k}{2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \\ &= \mathbf{1}_{n \text{ pair}} |\tilde{\mathcal{C}}_k| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \end{aligned}$$

Enfin, nous ne détaillerons pas ici mais il vient très rapidement que les chemins de $\tilde{\mathcal{C}}_{2k}$ sont en bijection avec \mathcal{D}_k les mots de Dyck de longueur $2k$ (i.e. les parenthésages valides avec k parenthèses ouvertes) qui sont comptés par les nombres de Catalan C_k . On peut donc en conclure que

$$\frac{1}{N} \mathbb{E} \text{Tr} Y^k = \mathbf{1}_{n \text{ pair}} C_{k/2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

ce qui achève notre preuve.

Convergence faible p.s. D'une manière similaire, on peut prouver que pour tout $k \geq 1$,

$$\text{Var}\left(\frac{1}{N} \text{Tr}(Y^k)\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

Ainsi, par le théorème de convergence monotone,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n \geq 0} \left(\int x^k d\mu_Y - \mathbb{E} \int x^k d\mu_Y \right)^2 \right] < \infty$$

Donc p.s., $\sum_{n \geq 0} \left(\int x^k d\mu_Y - \mathbb{E} \int x^k d\mu_Y \right)^2 < \infty$, et alors en particulier on a que p.s.,

$$\int x^k d\mu_Y - \mathbb{E} \int x^k d\mu_Y \rightarrow 0$$

Or par le lemme 2, $\mathbb{E} \int x^k d\mu_Y \rightarrow \int x^k d\mu_{sc}$ et donc finalement :

$$\int x^k d\mu_Y \rightarrow \int x^k d\mu_{sc}$$

On peut conclure par le lemme 1 que $\mu_Y \rightarrow \mu_{sc}$ faiblement p.s..

3 Tenseurs aléatoires et universalité de Gurau

3.1 Résolvante et mesure associée

La notion de valeurs propres pour un tenseur aléatoire est plus compliquée que pour les matrices. Plusieurs notions ont été proposées mais la principale est celle de z -valeur propre. Pour $\mathcal{T} \in \mathcal{S}_p(N)$ un tenseur symétrique réel, on dit que u est un z -vecteur propre associé à la valeur propre λ lorsque :

- $\mathcal{T} \cdot u^{p-1} = \lambda u$
- $\|u\|_2 = 1$

où $\mathcal{T} \cdot u^{p-1}$ est le vecteur de \mathbb{R}^N dont la j -ième entrée vaut $\sum_{i_1, \dots, i_{p-1}} \mathcal{T}_{i_1, \dots, i_{p-1}, j} u_{i_1} \dots u_{i_{p-1}}$. Beaucoup de questions à propos des z -valeurs propres restent non élucidées et leur étude est bien plus ardue que pour les valeurs propres dans le cas matriciel. On sait typiquement qu'il en existe un nombre exponentiel en N [4] donc elles sont beaucoup plus nombreuses que les valeurs propres d'une matrice.

Cependant, le physicien théoricien Razvan Gurau a récemment proposé une notion de résolvante pour les tenseurs [5] [6].

Définition 4 (Résolvante). Soit $\mathcal{T} \in \mathcal{S}_p(N)$ et $z \in i\mathbb{R}^*$:

$$\mathcal{R}(z) := \frac{z^{-1}}{\mathcal{Z}(z)} \int \frac{\|\phi\|^2}{N} \exp\left(-\left(\frac{1}{2}\|\phi\|^2 - \frac{1}{z} \frac{\mathcal{T} \cdot \phi^p}{p}\right)\right) [d\phi]$$

où

- $[d\phi] := (2\pi)^{-N/2} \prod_{i=1}^N d\phi_i$
- $\mathcal{T} \cdot \phi^p := \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq N} \mathcal{T}_{i_1, \dots, i_p} \phi_{i_1} \dots \phi_{i_p}$
- $\mathcal{Z}(z) := \int \exp\left(-\left(\frac{1}{2}\|\phi\|^2 - \frac{1}{z} \frac{\mathcal{T} \cdot \phi^p}{p}\right)\right) [d\phi]$

Elle possède un prolongement analytique sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, et de même sur \mathbb{H}^- . Dans le cas $p = 2$, le calcul montre que l'on retrouve bien la résolvante classique. De plus, cette résolvante conserve des propriétés intéressantes de la résolvante pour les matrices. D'abord, comme c'est une fonction analytique de \mathbb{H}^+ dans \mathbb{H}^+ équivalente à $\frac{1}{z}$ lorsque $|z| \rightarrow \infty$, le théorème de Nevanlinna nous permet d'affirmer qu'il existe une mesure de probabilité $\mu_{\mathcal{T}}$ sur \mathbb{R} telle que :

$$\mathcal{R}(z) = \int \frac{1}{z - \lambda} d\mu_{\mathcal{T}}(\lambda)$$

Contrairement, au cas matriciel, cette mesure associée n'est plus directement la mesure empirique des valeurs propres mais elle possède un lien étroit avec la distribution des z -valeurs propres. De plus, cette résolvante possède encore une expansion formelle comme dans le cas matriciel.

Proposition 2. *La résolvante possède une expansion :*

$$\mathcal{R}(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{z^{n+1}} \frac{\text{I}_k(\mathcal{T})}{N}$$

avec

$$\text{I}_k(\mathcal{T}) = \sum_{G \in \mathcal{G}_k} \text{Tr}_G(\mathcal{T})$$

où \mathcal{G}_k désigne l'ensemble des graphes planaires p -valents connexes enracinés à k sommets, et pour $G = (V, E) \in \mathcal{G}_k$,

$$\text{Tr}_G(\mathcal{T}) = \sum_{i_1, \dots, i_{|E|}} \prod_{v \in V} \mathcal{T}_{i(\delta v)}$$

et ici $i(\delta v)$ est le multi-ensemble d'indices $i(e)$ associés aux p arêtes e incidentes à v .

Cela signifie que pour tout $k \geq 0$,

$$\int \lambda^k d\mu_{\mathcal{T}}(\lambda) = \frac{1}{N} \text{I}_k(\mathcal{T})$$

Ainsi, les moments de la mesure sont désormais les $\frac{1}{N} \text{I}_k(\mathcal{T})$ au lieu des $\frac{1}{N} \text{Tr}(M^k)$ et la compréhension de la convergence faible de la mesure passera donc désormais pas une étude combinatoire de ces objets !

3.2 Limite de Gurau

Dans le cas où le tenseur \mathcal{T} est Gaussien, il est possible de faire des calculs sur la formule intégrale de la résolvante et Gurau a montré qu'alors la mesure converge vers une mesure limite qui a des moments impairs nuls et des moments pairs donnés par les nombres de Fuss-Catalan :

$$F_p(k) := \frac{1}{pk+1} \binom{pk+1}{k}$$

Ceux-ci généralisent les nombres de Catalan et en particulier on retrouve bien $F_2(k) = C_k$. Nous appellerons cette mesure la *mesure de Gurau*. En réalité, comme pour le théorème de Wigner, on a un phénomène d'universalité et une approche combinatoire des moments permet de montrer que la mesure associée à la résolvante converge toujours faiblement *p.s.* vers la mesure de Gurau pour une très vaste collection de tenseurs. C'est en cela qu'a consisté notre travail cette année [7].

Tenseur de Wigner. Soit $(\mathcal{T}_{i_1, \dots, i_p})_{i_1 \leq \dots \leq i_p}$ un tableau infini à p dimensions de variables aléatoires centrées telles que pour tout $i_1 \leq \dots \leq i_p$,

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p, \mathcal{T}_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(p)}} = \mathcal{T}_{i_1, \dots, i_p}$$

sont de loi $Q_{\text{type spectral}}$ dépendant uniquement du type spectral de (i_1, \dots, i_p) avec tous les moments finis et de variance valant $\frac{1}{(p-1)!}$ lorsque $i_1 < \dots < i_p$. On définit alors pour tout $N \geq 1$, le tenseur aléatoire $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_{i_1, \dots, i_p})_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq N} \in \mathcal{S}_p(N)$ que l'on appelle *tenseur de Wigner*. C'est le cas de tenseurs du GOTE.

Théorème 2 (Universalité de Gurau). Soit \mathcal{T} un tenseur de Wigner. On note $\mathcal{Y} := \frac{\mathcal{T}}{N^{\frac{p-1}{2}}}$. Alors *p.s.* faiblement,

$$\mu_{\mathcal{Y}} \rightarrow \mu_{Gur}$$

où μ_{Gur} est la mesure sur l'intervalle $[-\sqrt{\frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}}, \sqrt{\frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}}]$ dont le k -ième moment vaut 0 si k impair et $F_p(\frac{k}{2})$ si k pair.

Pour $p = 2$ on retrouve le semi-cercle sur $[-2, 2]$, et lorsque $p = 3$ la mesure limite a le profil suivant :

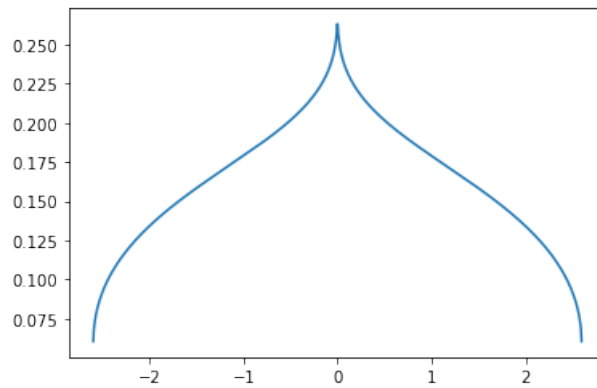


FIGURE 3 – Mesure limite pour $p = 3$.

3.3 Approche combinatoire

Nous n'allons pas rentrer dans le détail de notre preuve puisque cela n'est pas la vocation de ce mémoire. Nous allons simplement procéder à quelques analogies avec la preuve du cas matriciel pour comprendre l'essence de cette démonstration. L'idée initiale est de transformer les graphes de \mathcal{G}_k en hypergraphes où les arêtes deviennent des multiarêtes $e_1, \dots, e_{|i|}$ qui regroupent les arêtes dont les indices associés sont égaux. On somme ainsi sur des multiarêtes associées à des indices distincts. Comme dans le cas matriciel on peut alors définir une relation d'équivalence sur les sommets via

$$h \sim h'$$

s'ils appartiennent aux p mêmes multiarêtes. On note $m(h)$ le cardinal de la classe d'équivalence de h et \mathcal{C} le nombre de classes d'équivalence. Pour un hypergraphe H , on a encore par indépendance

$$Tr_H(\mathcal{T}) = 0$$

dès qu'il existe h tel que $m(h) = 1$. Alors,

$$k = \sum_{j=1}^{\mathcal{C}} m(h_j) \geq 2 \times \mathcal{C}$$

Ainsi, on obtient que

$$\mathcal{C} \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$$

et la formule d'Euler sur un graphe $G^* = (V^*, E^*)$ bien choisi donne :

$$|i| \leq 1 + (p-1)\mathcal{C} \leq 1 + (p-1)\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$$

Le cas d'égalité est donné pour k pair par les graphes meloniques à k sommets qui sont au nombre de $F_p \binom{k}{2}$. Ils ont la forme suivante et sont construits récursivement en insérant un melon sur une branche déjà existante.

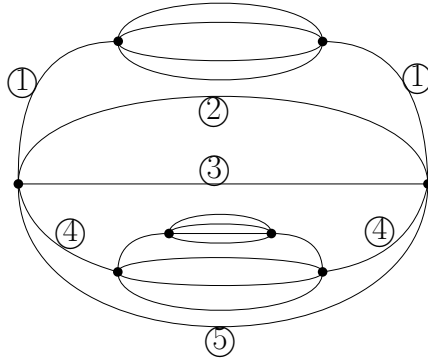


FIGURE 4 – Graphe melonique ($p = 5$).

References

- [1] N. Sasakura Y. SATO. *Constraint algebra of general relativity from a formal continuum limit of canonical tensor model*. 2018. URL : <https://arxiv.org/pdf/1805.04800.pdf>.

- [2] A. Jagannath P. Lopatto L. MIOLANE. *Statistical thresholds for tensor PCA*. 2019. URL : <https://arxiv.org/pdf/1812.03403.pdf>.
- [3] N.D. Sidiropoulos L. De Lathauwer X. Fu K. Huang E.E. Papalexakis C. FALOUTSOS. “Tensor Decomposition for Signal Processing and Machine Learning”. In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 65 (2017).
- [4] D. Cartwright B. STURMFELS. *The number of eigenvalues of a tensor*. 2010. URL : <https://arxiv.org/pdf/1004.4953.pdf>.
- [5] R. GURAU. *On the generalization of the Wigner semicircle law to real symmetric tensors model*. 2020. URL : <https://arxiv.org/pdf/2004.02660.pdf>.
- [6] R. GURAU. *Random tensors*. Oxford University Press, 2016.
- [7] R. BONNIN. *Universality of the Wigner-Gurau limit for random tensors*. 2024. URL : <https://arxiv.org/pdf/2404.14144>.