Introduction au domaine de recherche: le modèle de polymère dirigé et l'équation de la chaleur stochastique

Gaspard Gomez, sous la direction de Quentin Berger

Octobre 2024

1 Systèmes désordonnés

Une question classique en mécanique statistique est celle de la pertinence du désordre. Elle consiste à se demander comment un système qui est pure, simple et qui pourrait servir à modéliser simplement des phénomènes physiques (par exemple une marche aléatoire ou le modèle d'Ising) réagit lorsqu'on le perturbe. C'est une question fondamentale car elle renseigne sur la stabilité de ce système : si une perturbation modifie drastiquement les propriétés du système homogène, c'est que celui-ci est sensible au bruit et donc qu'il faut tenir compte de cette perturbation pour modéliser adéquatement le phénomène physique qui nous intéresse. À l'inverse, si une perturbation n'affecte pas ou peu le système, c'est donc qu'on peut s'en tenir au modèle homogène. Dans la suite, nous allons présenter un exemple emblématique qui illustre ces questions : le modèle de polymère dirigé dans un environnement aléatoire qui n'est rien d'autre que la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ perturbée par un environnement aléatoire.

Une autre question également issue de la physique statistique et qui a connu un grand essor ces dernières années est celle de l'étude d'équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS) singulières. Il est en général assez difficile de donner un sens à ces équations et aucune approche systématique n'existait jusqu'aux récentes avancées de (pour ne citer que deux des plus célèbres) Martin Hairer (avec l'invention des structures de régularité) et Massimiliano Gubinelli (avec le développement du calcul para-contrôlé).

Ces deux questions s'avèrent parfois être reliées et c'est le cas du modèle de polymère dirigé et de l'équation de la chaleur avec bruit multiplicatif. Il existe plusieurs façons de le voir : par la formule de Feynman-Kac ou par le développement en chaos et c'est la seconde option que nous privilégions pour cette présentation. Cette connexion est très fructueuse car elle permet d'utiliser les techniques et de s'appuyer sur la compréhension développées pour l'étude du modèle de polymère dirigé pour comprendre une EDPS dont l'étude n'en est qu'à ses balbutiements.

1.1 Le modèle de polymère dirigé en environnement aléatoire

Dans ce paragraphe, nous présentons le modèle de polymère dirigé désordonné et les différentes transitions de phases qui gouvernent son comportement. Une des références sur le sujet est les notes de cours à Saint-Flour de Francis Comets [Com17].

Considérons la marche aléatoire simple symétrique $S = (S_n)_{n\geq 0}$ issue de 0 dont on note la loi P et toute les quantités qui s'y réfèrent sans double-barre, c'est-à-dire $\mathrm{E}[f(S)]$. C'est le modèle simple et homogène pour faire le lien avec le texte introductif de cette section. Prenons ensuite des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(\omega_{n,x})_{n\geq 0, x\in\mathbb{Z}^d}$ indépendantes de S et dont on note la loi $\mathbb{P}$ et toutes les quantités qui s'y réfèrent avec des doubles-barres par exemple $\mathbb{E}$ pour l'espérance. Supposons en outre que ces variables soient dans $\mathbb{L}^1$, centrées et $\mathbb{P}$-p.s. minorées par -1.

Pour une réalisation de l'environnement ω donnée, un paramètre $\beta \in [0,1]$ et une longueur N, on définit la probabilité de polymère perturbée par

$$\frac{dP^\omega_{N,\beta}}{dP}(S) = \frac{1}{Z^\omega_{N,\beta}} \prod_{n=1}^{N} (1+\beta\omega_{n,S_n}), \tag{1.1}$$

où $Z^\omega_{N,\beta} = \mathrm{E}[\prod_{n=1}^{N}(1+\beta\omega_{n,S_n})]$ est la fonction de partition du modèle. On a décidé de prendre les variables ω minorées par -1 et $\beta \in [0,1]$ de sorte que l'expression ci-dessus soit bien positive. Le paramètre β, appelé aussi température inverse, contrôle l'intensité du désordre ω. Si $\beta = 0$, on retombe sur le modèle homogène. Sous la probabilité $P^\omega_{N,\beta}$, les variables $\omega_{n,x}$ jouent le rôle d'un environnement dans lequel évolue la marche aléatoire S : si $\omega_{n,x} > 0$, la marche S aura d'autant plus tendance sous $P^\omega_{N,\beta}$ à passer par le site x au temps n et l'inverse si $\omega_{n,x} < 0$. En d'autres termes, la probabilité $P^\omega_{N,\beta}$ donne plus de poids aux trajectoires de S qui passent par des endroits où les valeurs de l'environnement sont élevées.

Remarque 1.1. *Le lecteur habitué à ce type de problèmes sera peut-être légèrement surpris de la façon dont on a écrit la probabilité de polymère dans* (1.1) *et s'attendrait peut-être plus à trouver une perturbation de type mesure de Gibbs :*

$$\frac{dP^\omega_{N,\beta}}{dP}(S) \propto \exp\left(\sum_{n=1}^{N}(\beta\omega_{n,S_n} - \lambda(\beta))\right),$$

avec $\lambda(\beta) = \log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\beta\omega}]$. *Il y a en fait de bonnes raisons d'adopter la convention que nous avons choisi notamment lorsqu'il s'agit de considérer le cas où les variables* ω *sont à queue lourde (voir section 3) mais faisons remarquer qu'à* β *fixé, en partant de* (1.1) *et en posant* $\eta_{n,x} = \frac{1}{\beta}\log(1+\beta\omega_{n,x}) - \frac{1}{\beta}\mathbb{E}[\log(1+\beta\omega_{n,x})]$, *les variables* η *sont iid, centrées et* $1+\beta\omega = \mathrm{e}^{\beta\eta-\lambda(\beta)}$ *avec* $\lambda(\beta) = -\mathbb{E}[1+\beta\omega] = \log\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\beta\eta}]$. *Les deux points de vue sont donc équivalents.*

La question que l'on se pose à présent est : à quel point la probabilité $P^\omega_{N,\beta}$ est différente de la probabilité homogène P ? À N fixé, $P^\omega_{N,\beta}$ a une densité par rapport à P donc la question devient pertinente quand on prend N qui tend vers l'infini. Dans ce cas, il pourrait se produire quelque chose si le rapport qu'il y a dans (1.1) devient singulier et notamment si $Z^\omega_{N,\beta}$ venait à tendre vers 0. C'est une première façon de mettre en évidence une transition de phase pour ce modèle.

Théorème 1.1 ([Com17])**.** *Pour tout* $\beta \geq 0$, *la suite de variable aléatoire* $(Z_{N,\beta})_{N\geq 1}$ *converge* $\mathbb{P}$*-p.s. vers une variable aléatoire notée* $Z_{\infty,\beta}$ *qui est positive et pour laquelle on a la disjonction : ou bien* $Z_{\infty,\beta} = 0$ $\mathbb{P}$*-p.s., ou bien* $Z_{\infty,\beta} > 0$ $\mathbb{P}$*-p.s. De plus, il existe un* $\beta_c \geq 0$ *tel que*

$$\begin{cases} Z_{\infty,\beta} > 0 & \text{si } \beta < \beta_c, \\ Z_{\infty,\beta} = 0 & \text{si } \beta > \beta_c. \end{cases}$$

Terminologie. Si $\beta_c = 0$, on dit que le désordre est pertinent car alors n'importe quelle perturbation, d'intensité $\beta > 0$ aussi faible soit-elle, modifie les propriétés du système homogène et à l'inverse si $\beta_c > 0$, on dit que le désordre est non-pertinent. La transition au point β_c s'appelle la transition du faible désordre ($\beta < \beta_c$) vers le désordre fort ($\beta > \beta_c$). C'est une notion qui dépend de la loi du désordre et de la dimension.

Il existe une autre façon d'exhiber une transition de phase pour ce modèle qui est plus coutumière pour les physiciens, c'est en passant par une quantité fondamentale du système à savoir l'énergie libre.

Proposition 1.1 ([Com17]). *L'énergie libre*

$$F(\beta) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\mathbb{E}[\log Z_{N,\beta}] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \log Z^{\omega}_{N,\beta},$$

est bien définie et est déterministe c'est-à-dire que la deuxième limite ci-dessus est $\mathbb{P}$-p.s. constante. De plus, la fonction $\beta \mapsto F(\beta)$ est continue et décroissante.

Comme $F(0) = 0$, on peut définir $\overline{\beta}_c = \sup\{\beta,\ F(\beta) = 0\} = \inf\{\beta,\ F(\beta) < 0\} \geq 0$. Si $\beta < \beta_c$, $Z_{N,\beta}$ converge vers une limite strictement positive donc $F(\beta) = 0$ et donc $\beta \leq \overline{\beta}_c$. On en déduit donc que $0 \leq \beta_c \leq \overline{\beta}_c$.

Remarque 1.2.
- *La transition de phase en $\overline{\beta}_c$ est appelée la transition vers le très fort désordre. Quand $\beta > \overline{\beta}_c$, non seulement $Z_{N,\beta}$ tend vers 0 quand $N \to +\infty$ mais en plus exponentiellement vite.*
- *Il est conjecturé (notamment dans [Com17]) que $\overline{\beta}_c = \beta_c$, autrement dit que le désordre fort est équivalent au très fort désordre mais la question est encore aujourd'hui largement ouverte malgré des avancées récentes dans cette direction de la part d'Hubert Lacoin et Stefan Junk [JL24].*

Quand $\overline{\beta}_c = 0$ (et donc que le désordre est pertinent), pour tout $\beta > 0$, $Z_{N,\beta} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut se convaincre assez facilement qu'en prenant le paramètre β qui dépend de N, on pourrait obtenir ou bien $Z_{N,\beta_N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ si $\beta_N \to 0$ suffisamment vite (rappelons que $Z_{N,\beta=0} = 1$) et $Z_{N,\beta_N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si $\beta_N \to 0$ suffisamment lentement. En revanche, si $\beta_N \to 0$ sur une échelle intermédiaire, il est possible qu'on obtienne que Z_{N,β_N} converge vers un objet limite non-trivial. On parle alors de désordre intermédiaire depuis l'article précurseur [AKQ10] et de limite d'échelle du modèle de polymère dirigé. Pour deviner quel est ce régime intermédiaire, on peut passer par le comportement critique de l'énergie libre. En effet, si $F(\beta) \approx \beta^{\nu}$ quand $\beta \to 0$, en prenant $\beta_N = \hat{\beta} N^{-\frac{1}{\nu}}$, heuristiquement $Z_{N,\beta_N} \approx \exp(N(\beta_N)^{\nu}) = \exp(\hat{\beta}^{\nu})$. Cette heuristique ne dit rien sur la limite potentielle de Z_{N,β_N} mais dans bon nombre d'exemples connus donne le bon régime intermédiaire pour β_N. De manière générale (même sans le comportement pur puissance de $F(\beta)$ en zéro), on peut conjecturer que le régime intermédiaire sera $\beta_N \propto F^{-1}(\frac{1}{N})$.

L'élément fondamental pour l'identification de cette limite d'échelle est le développement en chaos de la fonction de partition $Z_{N,\beta}$ et qui nous permettra de relier ce problème à celui de l'équation de la chaleur stochastique. Il s'obtient comme suit : on développe le produit $\prod_{n=1}^{N} (1 + \beta\omega_{n,S_n}) = \sum_{I\subset[1,N]} \beta^{|I|} \prod_{i\in I} \omega_{i,S_i}$, puis en notant $k = |I|$ puis $I = \{n_1, ..., n_k\}$ avec $1 \leq n_1 < ... < n_k \leq N$ et enfin en notant $x_1, ..., x_k$ les points de l'espace par lesquels passe la marche aléatoire en $S_{n_1}, ..., S_{n_k}$:

$$Z_{N,\beta} = \sum_{k\geq 0} \beta^k \sum_{\substack{n_0=0<n_1<\ldots<n_k\leq N \\ x_1,\ldots,x_k\in\mathbb{Z}^d}} \prod_{j=1}^{k} q(n_j - n_{j-1}, x_j - x_{j-1})\omega_{n_j,x_j}. \tag{1.2}$$

où on a noté pour $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{Z}^d$, $q(n,x) = P[S_n = x]$.

1.2 L'équation de la chaleur stochastique avec bruit multiplicatif

Formellement, l'équation de la chaleur stochastique avec bruit multiplicatif (abrégé en SHE pour Stochastic Heat Equation) s'écrit

$$\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) + \beta u(t,x)\xi(t,x), \tag{1.3}$$

pour $(t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$, $\beta > 0$ et ξ un bruit blanc. Pour le moment, contentons-nous de voir ξ comme une distribution aléatoire sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$. En dépit des propriétés de régularisation du laplacien, comme ξ est une distribution, on s'attend à ce qu'une solution u de (1.3) soit elle-même une distribution et dans ce cas le produit $u\times\xi$ pose problème car on ne peut pas multiplier des distributions. Donc, malgré le fait que l'équation (1.3) soit linéaire, elle est très singulière. C'est en fait un des exemples les plus simples et pourtant les plus résistants de singularité pour une EDPS. Elle a attiré l'attention notamment pour son lien avec l'équation de KPZ via la transformée de Hopf-Cole. Formellement, si on pose $h = \log u$, on obtient que h est solution de

$$\partial_t h(t,x) = \frac{1}{2}\Delta h(t,x) + |\nabla h|^2 + \beta\xi, \tag{1.4}$$

qui est l'équation de KPZ. Cette équation a été introduite par Kardar, Parisi et Zhang (ref) comme modèle d'accroissement aléatoire d'interfaces. La singularité de cette équation provient de sa non-linéarité car à nouveau, on s'attend à ce qu'une solution h de cette équation soit une distribution auquel cas le terme $|\nabla h|^2$ est mal défini.

Revenons à l'équation de la chaleur stochastique (1.3). À nouveau de façon formelle, une solution u de (1.3), avec condition initiale $u(0,.) = \delta(.)$ le Dirac en 0, doit satisfaire

$$u(t,x) = \rho(t,x) + \beta\int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} \rho(t-s,x-y)u(s,y)\xi(s,y)dsdy,$$

où on a noté $\rho(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}\exp(-\frac{|x|^2}{2t})$ le noyau de la chaleur. En itérant cette formule, on obtient que u s'écrit

$$u(t,x) = \sum_{k\geq 0}\beta^k \int_{\substack{0<t_1<\ldots<t_k<t \\ x_1,\ldots,x_k\in(\mathbb{R}^d)^k}} \rho(t_1,x_1)\ldots\rho(t_k-t_{k-1},x_k-x_{k-1})\rho(t-t_k,x-x_k)\xi(dt_1,dx_1)\ldots\xi(dt_k,dx_k). \tag{1.5}$$

Ce développement est l'analogue continu du développement en chaos (1.2) où le bruit blanc joue le rôle des variables ω et de l'environnement et le noyau de la chaleur celui du noyau q de la marche aléatoire. Par le théorème de la limite locale, quand $n \to +\infty$, uniformément en $x \in \mathbb{Z}^d$, $q(n,x) \sim \frac{1}{(n/2)^{d/2}}(\rho(1,\frac{x}{\sqrt{n/2}}) + o(1))2\mathbb{1}_{(n,x)\in\mathbb{Z}^{d+1}_{even}}$ ce qui appuie l'analogie entre (1.5) et (1.2). On a noté $\mathbb{Z}^{d+1}_{even} = \{(n,x) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^d, n + x_1 + \ldots + x_d \in 2\mathbb{Z}\}$ et l'indicatrice dans cette dernière expression tient compte de la périodicité de la marche aléatoire simple symétrique.

Comme u est une fonction du temps et de l'espace mais pas $Z_{N,\beta}$ ce qui se traduit par le fait qu'il y a dans les intégrales itérées un dernier terme $\rho(t-t_k, x-x_k)$, on pourrait m'objecter que l'analogie entre les deux modèles est quelque peu douteuse. Pour obtenir une stricte analogie, il faudrait en fait considérer la fonction de partition contrainte

$$Z_{N,\beta}(x) = \mathrm{E}\left[\prod_{n=1}^{N}(1+\beta\omega_{n,S_n})\mathbb{1}_{S_N=x}\right]. \tag{1.6}$$

Les développements du type (1.5) et (1.2) sont appelés des développements en chaos polynomial. C'est un terme emprunté à la théorie de Malliavin. Le $u^{(k)}(t,x) = \beta^k \int_{\substack{0<t_1<\ldots<t_k<t \\ x_1,\ldots,x_k\in(\mathbb{R}^d)^k}} \rho(t_1,x_1)\ldots\rho(t_k - t_{k-1}, x_k - x_{k-1})\rho(t-t_k, x-x_k)\xi(dt_1,dx_1)\ldots\xi(dt_k,dx_k)$ est appelé chaos d'ordre k et se présente sous la forme d'une intégrale k-itéré du bruit blanc par rapport à lui-même. On peut donc voir le développement $u(t,x) = \sum_{k\geq 0} u^{(k)}(t,x)$ comme un développement avec des termes de plus en plus complexes et fins à mesure que k devient grand. La grande particularité de la SHE est que ces chaos d'ordre arbitrairement grand sont explicites.

Pour l'instant nous n'avons pas dit grand chose du bruit ξ mis à part le fait que c'était une distribution aléatoire. Pour avancer, il faut en dire un peu plus. La majeure partie de la littérature sur les EDPs stochastiques se concentrent sur le cas où le bruit est un bruit blanc gaussien c'est-à-dire que pour toutes fonctions f et g lisses et à support compact sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$, $\mathbb{E}[\langle\xi,f\rangle\langle\xi,g\rangle] = \int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d} f(t,x)g(t,x)dtdx = \langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)}$. Considérons donc un tel bruit et zoomons notre solution u en utilisant un rescaling diffusif c'est-à-dire que pour un $\varepsilon > 0$, on pose $v_\varepsilon(t,x) = u(\varepsilon^2 t, \varepsilon x)$. Formellement, v_ε satisfait

$$\partial_t v_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{2}\Delta v_\varepsilon(t,x) + \beta\epsilon^2 v_\varepsilon(t,x)\xi_\varepsilon(t,x),$$

où on a noté $\xi_\varepsilon(t,x) = \xi(\varepsilon^2 t, \varepsilon x)$ qui, en loi, est égal à $\varepsilon^{-1-\frac{d}{2}}\xi'$ où ξ' est un autre bruit blanc gaussien. Donc, en loi, v_ε est solution de

$$\partial_t v_\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta v_\varepsilon + \beta\varepsilon^{1-\frac{d}{2}} v_\varepsilon \xi'. \tag{1.7}$$

Ce raisonnement, certes heuristique, a le mérite de discriminer les dimensions. En effet, on voit qu'en dimension $d = 1$, zoomer a pour effet d'atténuer le bruit. On dit que la SHE est *sous-critique* en dimension $d = 1$. Quand $d = 2$, zoomer n'a aucun effet c'est-à-dire qu'une solution de (1.3) présente une invariance d'échelle. On parle de dimension *critique* et de dimension *sur-critique* pour $d \geq 3$. Cette terminologie est standard dans le domaine des EDPs stochastiques.

En dimension $d = 1$, on peut directement donner un sens à (1.5) grâce à la théorie d'Itô. En revanche en dimension 2 et plus, le développement en chaos (1.5) n'a aucun sens. En fait même le premier terme dans ce développement est mal défini. En effet, au vue de la définition du bruit blanc gaussien, on peut intégrer contre ξ des fonctions qui sont dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. Or (en oubliant le terme en $\rho(t-t_1, x-x_1)$ qui ne change rien à cette discussion) en appliquant la formule de Chapman-Kolmogorov,

$$\int_{(0,T)\times\mathbb{R}^d} \rho(t,x)^2 dtdx = \int_0^T \rho(2t,0)dt = \int_0^T \frac{C}{t^{d/2}}dt, \tag{1.8}$$

qui est intégrable en 0 si et seulement si $d = 1$. Ceci explique pourquoi donner un sens à la SHE en dimension $d = 2$ ou plus avec un bruit gaussien est resté pendant longtemps une question ouverte.

2 Limites d'échelles et cas critique $\mathbb{L}^2$

Jusqu'ici, ces questions ont été beaucoup étudiées lorsque les variables de l'environnement ω sont dans $\mathbb{L}^2$ et lorsque le bruit blanc ξ est le bruit blanc gaussien et c'est ce que nous commencerons donc par expliquer. La présentation que nous adoptons ici se place très largement sous l'influence d'une série d'articles de l'équipe de recherche composée de Francesco Caravenna, Rongfeng Sun et Nikos Zygouras qui ont réalisé de spectaculaires avancées depuis le début des années 2010, celles-ci culminant dans la découverte du Stochastic Heat Flow dont nous ne dirons qu'un mot à la fin de cette partie. Beaucoup d'autres personnes ont participé à ces avancées, nous n'en faisons pas une liste exhaustive pour ne pas présenter une bibliographie de plusieurs dizaines d'articles tout comme nous ne citons que les articles de Caravenna, Sun et Zygouras qui constituent les grandes étapes de leur percée. Pour ce qui est de l'explication des preuves, nous essaierons ici ou là d'éclaircir certains aspects notamment en présentant les calculs de moment d'ordre 2 qui sont au cœur de la compréhension des différents régimes.

Pour cette partie, nous supposons que les variables aléatoires ω ont un moment d'ordre 2 et sont centrées réduites et que le bruit blanc ξ est gaussien. Commençons par énoncer un résultat concernant le modèle de polymère dirigé qui identifie les dimensions pour lesquelles le désordre est pertinent.

Théorème 2.1 ([Com17]). *Le désordre est pertinent en dimension $d = 1$ et $d = 2$ et le désordre est non-pertinent en dimension $d \geq 3$. Plus précisément on a $\beta_c > 0$ quand $d \geq 3$ et $\overline{\beta}_c = 0$ quand $d \in \{1, 2\}$.*

Preuve. Nous allons prouver que $\beta_c > 0$ en dimension $d \geq 3$ car un calcul de moment d'ordre 2 suffit. Pour le reste, nous renvoyons aux notes de Francis Comets car ce sont des résultats qui demandent plus de travail car il est toujours assez délicat de manipuler des énergies libres. Voyons donc pour la non-pertinence du désordre en dimension $d \geq 3$,

$$(Z_{N,\beta})^2 = E^{\otimes 2}\left[\prod_{n=1}^{N}(1+\beta\omega_{n,S_n})(1+\beta\omega_{n,\tilde{S}_n})\right].$$

On note $\Lambda(\beta) = \mathbb{E}[(1+\beta\omega)^2]$. En passant à l'espérance et en remarquant que $\mathbb{E}[(1+\beta\omega_{n,x})(1+\beta\omega_{n,y})] = \mathbb{E}[(1+\beta\omega)^2]^{\mathbb{1}_{x=y}}$, on obtient que

$$\mathbb{E}[(Z_{N,\beta})^2] = E^{\otimes 2}[\lambda(\beta)^{\sum_{n=1}^{N}\mathbb{1}_{S_n=\tilde{S}_n}}].$$

Comme en dimension $d \geq 3$, la marche aléatoire simple symétrique est transiente, il n'y a en fait qu'un nombre fini d'instants auxquels deux marches indépendantes se croisent. Plus précisément, la variable aléatoire $\sum_{n\geq 1}\mathbb{1}_{S_n=\tilde{S}_n}$ est géométrique d'espérance (c'est un calcul) $\sum_{n\geq 1} q(2n,0) < +\infty$ car par le théorème de la limite locale $q(2n,0) \sim \frac{2}{2\pi n}^{d/2}$ quand $n \to +\infty$ qui est intégrable quand $d \geq 3$. On en déduit que

$$\sup_{N\geq 1}\mathbb{E}[(Z_{N,\beta})^2] \leq E^{\otimes 2}[\lambda(\beta)^{\sum_{n\geq 1}\mathbb{1}_{S_n=\tilde{S}_n}}] < +\infty,$$

si $\lambda(\beta)$ est suffisamment proche de 1 donc si β est suffisamment petit. Il existe donc un $\beta_2 > 0$ tel que si $\beta < \beta_2$, $(Z_{N,\beta})_{N\geq 1}$ est bornée dans $\mathbb{L}^2$. Comme $(Z_{N,\beta})_{N\geq 1}$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_N = \sigma(\omega_{n,x}, 1 \leq n \leq N, x \in \mathbb{Z}^d)$ et qu'elle est uniformément intégrable, elle converge dans $\mathbb{L}^1$ donc $\mathbb{E}[Z_{\infty,\beta}] = \lim_{N\to+\infty}\mathbb{E}[Z_{N,\beta}] = 1$ ce qui montre qu'on ne peut pas avoir $Z_{\infty,\beta} = 0$ presque sûrement.

Remarque 2.1. *Remarquons qu'en dimension $d \geq 3$, nous avions observé que la SHE était sur-critique ce qui correspond pour le modèle de polymère dirigé au cas où le désordre n'est pas pertinent. La dimension $d = 1$ était sous-critique et dans ce cas le désordre est pertinent. La dimension $d = 2$ est critique pour la SHE et nous verrons plus loin comment cela se traduit pour le modèle de polymère dirigé.*

Théorème 2.2 ([CSZ17] Théorème 3.8)**.** *En dimension $d = 1$, en prenant $\beta_N = \hat{\beta} N^{-\frac{1}{4}}$, la fonction de partition Z_{N,β_N} converge en loi quand $N \to +\infty$ vers une limite non-triviale qu'on peut expliciter.*

Remarque 2.2. *On énoncera un résultat similaire dans le cas où l'environnement ω est à queue lourde mais, jusqu'à présent, c'est le plus mieux que l'on puisse faire en terme de limite d'échelle.*

Preuve. Tentons de donner un aperçu de la preuve de ce résultat. Commençons (comme toujours) par un calcul de moment d'ordre 2. Rappelons qu'on a le développement en chaos

$$Z^{\omega}_{N,\beta_N} = \sum_{k \geq 0} (\beta_N)^k \sum_{\substack{n_0 = 0 < n_1 < \ldots < n_k \leq N \\ x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}}} \prod_{j=1}^{k} q(n_j - n_{j-1}, x_j - x_{j-1}) \omega_{n_j, x_j},$$

qui se présente sous la forme d'une somme de termes orthogonaux 2 à 2 dans $\mathbb{L}^2$ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Z_{N,\beta_N})^2] &= \sum_{k \geq 0} (\beta_N)^{2k} \sum_{\substack{1 \leq n_1 < \ldots < n_k \leq N \\ x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}}} \prod_{j=1}^{k} q(n_j - n_{j-1}, x_j - x_{j-1})^2 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + / \\ &= \sum_{k \geq 0} (\beta_N)^{2k} \sum_{1 \leq n_1 < \ldots < n_k \leq N} \prod_{j=1}^{k} q(2(n_j - n_{j-1}), 0), \end{aligned}$$

où pour la deuxième égalité, comme en (1.8), on a utilisé la propriété de Markov simple de la marche aléatoire et ses symétries pour simplifier la sommation en l'espace. Pour le terme $k = 1$, cela revient à écrire que

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} q(n, x)^2 = \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(S_n = x) P(S_{2n} - S_n = -x) = P(S_{2n} = 0) = q(2n, 0).$$

Par le théorème de la limite locale et approximation de Riemann, on a pour une certaine constante C explicite,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n_1 < \ldots < n_k \leq N} \prod_{j=1}^{k} q(2(n_j - n_{j-1}), 0) &\approx C^k \sum_{1 \leq n_1 < \ldots < n_k \leq N} \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n_j - n_{j-1}}} \\ &\approx C^k N^{k/2} \int_{0 < t_1 < \ldots < t_k < 1} \prod_{j=1} \frac{1}{\sqrt{t_j - t_{j-1}}} \prod_{j=1}^{k} dt_j. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est finie et décroît exponentiellement vite en k donc $\mathbb{E}[(Z_{N,\beta_N})^2]$ converge quand $N \to +\infty$ ce qui est un premier élément qui indique la pertinence du scaling $\beta_N \propto N^{-1/4}$. Ensuite pour identifier la limite, on a recours à un principe de substitution (ou de Lindeberg) :

$$Z_{N,\beta_N} = \sum_{k\geq 0}(\beta_N)^k \sum_{\substack{0<n_1<\ldots<n_k\leq N\\ x_1,\ldots,x_k\in\mathbb{Z}}} \prod_{j=1}^{k} q(n_j-n_{j-1}, x_j-x_{j-1})\omega_{n_j,x_j}$$

$$\approx \sum_{k\geq 0}(C\beta_N)^k \sum_{\substack{0<n_1<\ldots<n_k\leq N\\ x_1,\ldots,x_k\in\mathbb{Z}}} \prod_{j=1}^{k} N^{-1/2}\rho(\frac{n_j-n_{j-1}}{N}, \frac{x_j-x_{j-1}}{\sqrt{N}})\omega_{n_j,x_j}$$

$$\approx \sum_{k\geq 0}(C\beta_N)^k \sum_{\substack{0<n_1<\ldots<n_k\leq N\\ x_1,\ldots,x_k\in\mathbb{Z}}} \prod_{j=1}^{k} N^{-1/2}\rho(\frac{n_j-n_{j-1}}{N}, \frac{x_j-x_{j-1}}{\sqrt{N}}) \prod_{j=1}^{k} N^{3/4}\int_{[\frac{n_j}{N},\frac{n_j+1}{N}]\times[\frac{x_j}{\sqrt{N}},\frac{x_j+1}{\sqrt{N}}]}\xi(ds_jdy_j),$$

où pour la troisième approximation on a remplacé $\omega_{n,x}$ par $\tilde{\omega}_{n,x} = N^{3/4}\int_{[\frac{n}{N},\frac{n+1}{N}]\times[\frac{x}{\sqrt{N}},\frac{x+1}{\sqrt{N}}]}\xi(dsdy)$ avec ξ un bruit blanc gaussien. Remarquons que les variables $(\tilde{\omega}_{n,x})_{n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{Z}}$ sont centrées, de variance 1 (grâce au scaling en $N^{3/4}$ et indépendantes elles sont des intégrales du bruit blanc sur des domaines disjoints donc finalement ont les mêmes propriétés que les variables de notre désordre initial ω. Cette substitution ici très informelle peut en fait être rendue rigoureuse et c'est précisément cela qu'on appelle un principe de Lindeberg. Une fois cette substitution justifiée, il reste à voir que

$$\sum_{\substack{0<n_1<\ldots<n_k\leq N\\ x_1,\ldots,x_k\in\mathbb{Z}}} \prod_{j=1}^{k} N^{-1/2}\rho(\frac{n_j-n_{j-1}}{N}, \frac{x_j-x_{j-1}}{\sqrt{N}}) \prod_{j=1}^{k} N^{3/4}\int_{[\frac{n_j}{N},\frac{n_j+1}{N}]\times[\frac{x_j}{\sqrt{N}},\frac{x_j+1}{\sqrt{N}}]}\xi(ds_jdy_j)$$

$$\approx \int_{0<t_1<\ldots<t_k<1}\int_{\mathbb{Z}^k}\prod_{j=1}^{k}\rho(t_j-t_{j-1}, x_j-x_{j-1})\xi(dt_jdx_j).$$

Enfin, comme $\beta_N N^{-1/2}N^{3/4} = \hat{\beta}$, on peut conclure que

$$Z_{N,\beta_N} \approx \sum_{k\geq 0}(C\hat{\beta})^k \int_{0<t_1<\ldots<t_k<1}\int_{\mathbb{Z}^k}\prod_{j=1}^{k}\rho(t_j-t_{j-1}, x_j-x_{j-1})\xi(dt_jdx_j)$$

où C est une constante explicite qui provient de la périodicité de la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$.

Remarque 2.3. *En fait, on peut largement renforcer cette convergence en l'obtenant pour la version contraite de la fonction de partition $Z_{N,\beta_N}(x)$ et même l'avoir dans un espace fonctionnel pour montrer qu'elle converge vers une solution de la SHE. REF article Alberts Khanin Quastel 2014*

Théorème 2.3. *En dimension $d = 2$, en prenant $\beta_N = \hat{\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\log N}}$, on a la convergence en loi*

$$Z_{N,\beta_N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{Z}_{\hat{\beta}} = \begin{cases} \exp(\sigma(\hat{\beta})X - \frac{\sigma(\hat{\beta})^2}{2}) & si\ \hat{\beta} < 1 \\ 0 & si\ \hat{\beta} > 1 \end{cases},$$

où X est une loi gaussienne standard et $\sigma(\hat{\beta})^2 = \log\frac{1}{1-\hat{\beta}^2}$.

Remarque 2.4. — *Ce résultat a été une certaine surprise pour la communauté qui étudiait ces questions de limite d'échelle puisqu'il faisait apparaître un point critique en $\hat{\beta} = 1$ au sein du régime de désordre intermédiaire.*

— *Comme nous l'avions dit, la SHE est critique en dimension 2. Pour le modèle de polymère dirigé, cela se traduit par le fait que le rescaling qu'on doit prendre pour β_N est logarithmique. Dans ce cas, on réussit à expliciter la loi de la limite de Z_{N,β_N} mais on n'a plus une représentation en chaos aussi évidente que dans le cas de la dimension $d = 1$, ce qui illustre qu'on ne peut pas donner de sens rigoureux à (1.5) en dimension 2.*

Preuve. Pour s'en tenir à notre programme de preuve, calculons $\mathbb{E}[(Z_{N,\beta_N})^2]$. Comme ci-dessus

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(Z_{N,\beta_N})^2] &= \sum_{k\geq 0}(\beta_N)^{2k} \sum_{1\leq n_1<\ldots<n_k\leq N} \prod_{j=1}^{k} q(2(n_j - n_{j-1}), 0) \\ &= \sum_{k\geq 0}(\beta_N)^{2k} \sum_{1\leq m_1,\ldots,m_k, \sum_{j=1}^{k} m_j\leq N} \prod_{j=1}^{k} q(2m_j, 0),\end{aligned}$$

En relâchant la contrainte $\sum_{j=1}^{k} m_j \leq N$, on a la majoration

$$\mathbb{E}[(Z_{N,\beta_N})^2] \leq \sum_{k\geq 0}(\beta_N^2 R_N)^k$$

où $R_N = \sum_{m=1}^{N} q(2m, 0) \sim \frac{1}{\pi}\log N$ quand $N \to +\infty$ par le théorème de la limite locale et donc $\beta_N^2 R_N \sim \hat{\beta}^2$. Il s'avère que cette majoration est en fait précise asymptotiquement ce qui montre donc que si $\hat{\beta} < 1$,

$$\mathbb{E}[(Z_{N,\beta_N})^2] \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\hat{\beta}^2},$$

qui est exactement égal à $\mathbb{E}[(\mathcal{Z}_{\hat{\beta}})^2]$.

Repassons à la SHE : une stratégie pour donner un sens à cette équation lorsque celui-ci nous échappe est simplement de la régulariser. Prenons donc une fonction j lisse, à support compact dans $\mathbb{R}^2$, positive telle que $\int_{\mathbb{R}^2} j = 1$ et notons pour $\varepsilon > 0$, $j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2} j(\frac{x}{\epsilon})$ de sorte que $j_\varepsilon \to \delta_0$ au sens des distributions quand $\varepsilon \to 0$. Le bruit régularisé en espace ξ^ε est formellement défini par $\xi^{(\varepsilon)}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^2} j_\varepsilon(x-y)\xi(t,y)dy$. Considérons u^ε une solution de

$$\partial_t u^\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta u^\varepsilon + \beta_\varepsilon u^\varepsilon \xi^\varepsilon$$

avec condition initiale $u^\varepsilon(0,.) = 1$ qui a un sens par la théorie d'Itô.

Théorème 2.4. *Si $\beta_\varepsilon = \hat{\beta}\sqrt{\frac{2\pi}{\log \varepsilon^{-1}}}$ avec $\hat{\beta} < 1$, alors $u^\varepsilon(t,x)$ converge en loi quand $\varepsilon \to 0$.*

Remarque 2.5. — *Le scaling pour β_ε est vraiment analogue à celui du théorème précédent. En fait, dans CSZ, les auteurs montrent même que les différentes limites en loi sont reliées c'est-à-dire qu'en un certain sens, même en dimension 2, la fonction de partition du modèle de polymère dirigé converge vers une solution de la SHE.*

— *Les résultats que nous venons de présenter ont en commun de révéler une certaine universalité. Pour le modèle de polymère dirigé que ce soit en dimension 1 ou 2, peut-être la loi qu'on prend pour le désordre ω, le scaling de β_N est le même tout comme la limite en loi. Pour la SHE, le scaling tout comme la limite ne dépende pas de la régularisation j choisie.*

Remarque 2.6. *Une fois observé la transition de phase en $\hat{\beta} = 1$ sur l'échelle de désordre intermédiaire, la question naturelle qui se posait était celle du comportant en $\hat{\beta} = 1$ précisément. Dans [CSZ23], Caravenna, Sun et Zygouras sont parvenus à montrer qu'il existait aussi une limite d'échelle mais dans un sens beaucoup plus faible que nous ne présentons pas ici qu'ils ont nommé le Stochastic Heat Flow. Ce qu'on sait de cet objet est encore balbutiant mais cette découverte a renforcé la conviction qu'au point critique, la SHE ou du modèle de polymère dirigé possédait une très grande richesse mathématique.*

3 Loin du monde Gaussien

3.1 Le cas à queue lourde sous-critique

De ce fait, ont fleuri autour de l'étude du cas dit $\mathbb{L}^2$ un certain nombre de variantes en changeant de modèle ou en changeant le type de désordre ou de bruit. Ainsi, l'article d'Hubert Lacoin [Lac11] a initié l'étude du cas où les variables $(\omega_{n,x})_{n\geq 0, x\in\mathbb{Z}^d}$ sont corrélées en espace et [BL21] celui où elles sont à queue lourde c'est-à-dire qu'il existe un paramètre $\gamma \in (1,2)$ et une fonction à variation lente [1] ϕ tels que

$$\mathbb{P}[\omega \geq x] \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\phi(x)}{x^\gamma}$$

Une telle variable n'a en particulier pas de moment d'ordre 2. Du point de vue de la SHE, cela revient à considérer non plus un bruit blanc gaussien mais un bruit blanc de Lévy. Considérons Ω un nuage de points poissonien sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $dtdx\lambda(dz)$ où $\lambda(dz) = \gamma z^{-1-\gamma}$. On peut penser à Ω de la façon suivante : on tire uniformément des points (t,x) et pour chacun de ses points, on lui accolle un poids $z \geq 0$ selon la densité $\lambda(dz)$. Formellement, le bruit blanc de Lévy ξ est une distribution sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ qui vérifie

$$\xi = \sum_{(t,x,z)\in\Omega} z\delta_{(t,x)} - \left(\int_0^{+\infty} z\lambda(dz)\right)dtdx. \tag{3.1}$$

Cette écriture n'a pas de sens car le terme de recentrage $\int_0^{+\infty} z\lambda(dz)$ est infini mais cette difficulté mis à part, ξ est donc une somme de Dirac placés aléatoirement et pondérés selon $\lambda(dz)$ et qu'on a recentré de sorte que $\mathbb{E}[\langle \xi, f\rangle] = 0$ pour toute fonction f lisse et à support compact. Une façon rigoureuse de donner un sens à (3.1) est de tronquer ξ en posant pour $a > 0$:

$$\xi^{(a)} = \sum_{(t,x,z)\in\Omega} z\mathbb{1}_{z\geq a}\delta_{(t,x)} - \left(\int_a^{+\infty} z\lambda(dz)\right)dtdx.$$

et de montrer que $\xi^{(a)}$ converge au sens des distributions quand $a \to 0$.

Reprenons la marche que nous avions suivi dans le cas où le désordre était $\mathbb{L}^2$. La première chose à faire était de caractériser la pertinence du désordre pour le modèle de polymère dirigé. C'est l'object du prochain théorème.

1. c'est-à-dire que pour tout $a > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\phi(ax)}{\phi(x)} = 1$, exemplairement une puissance de logarithme.

Théorème 3.1 ([Viv21]). *En dimension $d \geq 3$, le point critique du modèle de polymère dirigé dans un environnement à queue lourde est $\gamma = \gamma_c(d) = 1 + \frac{2}{d}$:*
— *si $\gamma < \gamma_c(d)$, $\overline{\beta}_c = 0$.*
— *si $\gamma > \gamma_c(d)$, $\beta_c > 0$.*

Remarque 3.1. *Au point critique $\gamma = \gamma_c(d)$ encore très peu de choses sont sues mis à part les résultats d'Hubert Lacoin dans [Lac16] pour un modèle cousin du modèle de polymère dirigé.*

Théorème 3.2 ([BL21 ; BL22]). *Si $\gamma < \gamma_c(d)$, en prenant $\beta_N = \hat{\beta} N^{-\mu}$ avec $\mu = \frac{d}{2\gamma}(\gamma_c(d) - \gamma)$, Z_{N,β_N} converge en distribution vers*

$$\sum_{k \geq 0} (C\hat{\beta})^k \int_{0<t_1<\ldots<t_k<1} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{k} \rho(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1}) \xi(dt_j dx_j) \tag{3.2}$$

où C est une constante explicite qui provient des problèmes de périodicité pour la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^d$ et ξ est un bruit de Lévy comme décrit ci-dessus en (3.1).

Remarque 3.2. *Contrairement au cas Gaussien, il ne suffit pas pour donner un sens à (3.2) d'un calcul dans $\mathbb{L}^2$ et c'est en fait l'objet principal du second article cité de Quentin Berger et Hubert Lacoin.*

Théorème 3.3 ([BCL23]). *Si $\gamma < \gamma_c(d)$, pour tout $\beta > 0$, l'équation de la chaleur stochastique avec bruit de Lévy*

$$\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) + \beta u(t,x)\xi(t,x)$$

admet une unique solution.

3.2 Conclusion

Cette année, je commence une thèse sous la direction de Laure Dumaz et Quentin Berger. Notre objectif sera notamment d'améliorer notre compréhension du point critique $\gamma = \gamma_c(d)$ pour le modèle de polymère dirigé et l'équation de la chaleur stochastique. En l'état, très peu de choses sont sues car il existe en fait assez peu de modèle ou d'équations impliquant des bruits de Lévy qui ont été étudiées au point critique.

Il s'agira tout d'abord de réussir à comprendre ou au moins dire quelque chose du point critique du point de vue du problème de mécanique statistique. C'est en quelque sorte le nerf de la guerre si on veut comprendre ensuite comment scaler β pour avoir une limite d'échelle non-triviale.

Références

[AKQ10] Tom Alberts, Konstantin Khanin et Jeremy Quastel. « Intermediate disorder regime for directed polymers in dimension 1 + 1 ». In : *Phys. Rev. Letters* 105.9 (2010), p. 090603.

[BCL23] Quentin Berger, Carsten Chong et Hubert Lacoin. « The Stochastic Heat Equation with Multiplicative Lévy Noise : Existence, Moments, and Intermittency ». In : *Communications in Mathematical Physics* 402.3 (2023), p. 2215-2299.

[BL21] Quentin Berger et Hubert Lacoin. « The Scaling Limit of the Directed Polymer with Power-Law Tail Disorder ». In : *Communications in Mathematical Physics* 386.2 (2021), p. 1051-1105.

[BL22] Quentin Berger et Hubert Lacoin. « The continuum directed polymer in Lévy Noise ». In : *Journal de École Polytechnique* 9 (2022), p. 213-280.

[CSZ17] Francesco Caravenna, Rongfeng Sun et Nikos Zygouras. « Polynomial chaos and scaling limits of disordered systems ». In : *J. EMS* 19 (2017), p. 1-65.

[CSZ23] Francesco Caravenna, Rongfeng Sun et Nikos Zygouras. « The critical 2d stochastic heat flow ». In : *Inventiones Mathematicae* 233 (2023), p. 325-460.

[Com17] Francis Comets. *Directed Random Polymers in Random Environments*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2017. isbn : 9783319504865.

[JL24] Stefan Junk et Hubert Lacoin. *Strong disorder and very strong disorder are equivalent for directed polymers*. 2024. arXiv : 2402.02562 [math.PR]. url : https://arxiv.org/abs/2402.02562.

[Lac11] Hubert Lacoin. « Influence of spatial correlation for directed polymers ». In : *The Annals of Probability* 39.1 (jan. 2011). issn : 0091-1798. doi : 10.1214/10-aop553. url : http://dx.doi.org/10.1214/10-AOP553.

[Lac16] Hubert Lacoin. *Marginal relevance for the γ-stable pinning model*. 2016. arXiv : 1612.02389 [math.PR]. url : https://arxiv.org/abs/1612.02389.

[Viv21] Roberto Viveros. « Directed polymer in γ-stable Random Environments ». In : *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 57.2 (2021), p. 1081-1102.