

RIGIDITÉ ENTROPIQUE PROCHE DES MÉTRIQUES HYPERBOLIQUES.

TRISTAN HUMBERT

Résumé

Etant donné une variété riemannienne de courbure sectionnelle strictement négative, on introduit deux mesures invariantes par l'action du flot géodésique associé: la mesure de Liouville et la mesure d'entropie maximale. La conjecture de rigidité entropique de Katok affirme que les deux mesures citées plus haut coïncident si et seulement si la métrique g est *localement symétrique*. On esquisse dans les pages qui suivent, un argument permettant de donner une preuve de la conjecture proche des métriques hyperboliques, en associant les calculs géométriques de Flaminio [Fla] et les techniques d'analyse microlocales développées par Guillarmou et Lefeuvre dans [GuLef].

1. UN PEU DE GÉOMÉTRIE

1.1. **Flot géodésique.** Soit (M^n, g) une variété riemannienne fermée, c'est à dire que M^n est compacte sans bord de dimension n et que g est une métrique à courbure sectionnelle strictement négative. Rappelons qu'une métrique est la donnée en tout point $p \in M$ d'un produit scalaire g_p sur le plan tangent $T_p M$ variant de façon lisse en p , on notera $\|\cdot\|_{g_p}$ la norme associée. La donnée d'une métrique permet de mesurer la longueur d'une courbe en intégrant la norme du vecteur vitesse associé:

$$\forall \gamma \in C^1([0, 1], M), \ell_g(\gamma) := \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{g_{\gamma(t)}} dt, \quad \dot{\gamma}(t) = \frac{d}{ds}\gamma(s)|_{s=t} \in T_{\gamma(t)}M.$$

La métrique g définit un flot sur le fibré tangent TM appelé le *flot géodésique*. En effet, étant donné $p \in M$ et $v \in T_x M$, il existe une unique géodésique γ passant par p en temps 0 avec une vitesse initiale v . Rappelons qu'un chemin γ est une géodésique si son relevé $\bar{\gamma}(t) := (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ dans le fibré tangent est une courbe intégrale du *flot géodésique* X :

$$(1.1) \quad X = \sum_{k=1}^n \rho_k \partial_{x_k} - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \rho_i \rho_j \right) \partial_{\rho_k}, \quad (x, \rho) \in TM,$$

pour certains coefficients $\Gamma_{i,j}^k$ dépendant de g . On montre qu'étant donné deux points suffisamment proches, il existe une unique géodésique qui les relie et qu'il s'agit de la courbe qui minimise la longueur. Notons que les géodésiques existent toujours localement car elles sont définies par une équation différentielle ordinaire d'ordre 1,

de plus, l'hypothèse de compacité sur M permet de justifier que ces dernières sont en fait définies "globalement", c'est à dire pour tout temps $t \in \mathbb{R}$. La norme de v est préservée le long d'une géodésique et l'on peut restreindre le flot géodésique au fibré tangent unitaire:

$$(1.2) \quad \varphi_t : SM \rightarrow SM := \{(x, v) \in TM \mid \|v\|_g^2 = 1\}.$$

Définissons alors l'application exponentielle

$$\exp(p, v) := \gamma(p, v, 1), \quad \exp_p(\cdot) := \exp(p, \cdot)$$

où $\gamma(p, v, 1)$ est la valeur au temps $t = 1$ de l'unique géodésique définie par (p, v) . Tout point $p \in M$ possède un voisinage ouvert U tel que l'application exponentielle $\exp_p : U \subset T_p M \rightarrow M$ est un difféomorphisme sur son image. Considérons deux vecteurs unitaires et orthogonaux $v, w \in T_p M$, ils engendrent un 2-plan $\Sigma \subset T_p M$ et $\exp_p : \sigma \cap U \rightarrow \exp_p(\sigma \cap U) = V$ est un difféomorphisme, où V est une sous variété de dimension 2 de M dont le tangent en p est donné par σ . La courbure sectionnelle $K_x(v, w)$ est alors définie comme la courbure au sens de Gauss de la surface V . Nous aurons besoin de la définition suivante:

Definition 1.1 (Métrique hyperbolique). *Une métrique g sur M est dite hyperbolique si la courbure sectionnelle K_g associée est constante égale à -1 .*

Dans ce qui suit, nous faisons les hypothèses suivantes:

On considère une variété différentielle M^n compacte sans bord de dimension n et une métrique Riemannienne g à courbure sectionnelle strictement négative.

1.2. La mesure de Liouville. Soit N une variété fermée orientable, toute métrique g sur N donne lieu à une forme volume vol^g appelée volume Riemannien associé à g définie localement

$$\text{vol}^g := \sqrt{\det(g_{i,j})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Dans notre contexte, la métrique g sur la base M se relève naturellement sur le fibré tangent unitaire SM en une métrique g_{Sas} nommée métrique de Sasaki. Cette dernière est définie comme suit. Tout d'abord, si l'on note $\pi : SM \rightarrow M$ la projection canonique, on peut définir l'espace vertical $\mathbb{V}_p := d\pi_p^{-1}(0) \subset T_p(SM)$.

De plus, la donnée d'une métrique g donne lieu à une notion de *transport parallèle* le long des chemins. Sans rentrer dans les détails, étant donné deux points $p, q \in M$, on peut identifier les deux plans tangents $T_p M \cong \mathbb{R}^n \cong T_q M$ mais l'isomorphisme n'est pas canonique. Soit alors un chemin c reliant p à q , il existe une procédure (le transport parallèle) définie à partir de la métrique g (ou plus précisément la connexion de Levi-Civita associée) permettant d'identifier tout vecteur $v \in T_p M$ à son transport parallèle $\mathcal{P}_{p,c}(v) \in T_q M$. Le transport parallèle permet de définir une distribution dite

horizontale $\mathbb{H}_p \subset T_p(SM)$ et l'on a $T_p(SM) = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{V}$. La métrique de Sasaki est définie de sorte que la décomposition précédente est orthogonale, que $g_{\text{Sas}}(X, X) = 1$ et que les restrictions à \mathbb{H} et \mathbb{V} correspondent à la métrique g (après des identifications adéquates).

Définissons une 1-forme $\alpha := g_{\text{Sas}}(X, \cdot)$, on montre que α est une *forme de contact*, c'est à dire que $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ est une forme volume ce qui montre que SM est orientable. On peut alors définir la mesure de Liouville comme la forme volume de contact $\frac{1}{(n-1)!} \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ ou comme la mesure Riemannienne associée à g_{Sas} :

$$(1.3) \quad \mu_L := \frac{1}{(n-1)!} \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} = \text{vol}^{g_{\text{Sas}}}.$$

Le champ géodésique X étant le champ de Reeb associé à la structure de contact, on en déduit l'invariance par le flot de la mesure de Liouville:

$$(1.4) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (\varphi_t)^* \mu_L := \mu_L.$$

2. SYSTÈME DYNAMIQUE CHAOTIQUE

2.1. Hyperbolicité. Un système dynamique (discret) désigne en général la donnée d'un espace X et d'une transformation $T : X \rightarrow X$. On s'intéresse alors aux différentes propriétés des itérés $T^n : X \rightarrow X$. Le flot géodésique (1.2) définit un système dynamique continu, c'est à dire que l'application T et ses itérés T^n sont remplacés par une famille de difféomorphismes φ_t pour $t \in \mathbb{R}$ vérifiant la relation $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ pour tous réels t, s . La variété étant différentielle, on parle de système dynamique différentiel, de plus, la donnée d'une mesure invariante (par exemple la mesure de Liouville, (1.4)) fait du flot géodésique un système dynamique mesuré.

L'histoire des systèmes dynamique étant bien trop longue et dense, nous n'essayerons pas de la résumer ici. Nous insistons toutefois sur un dernier aspect, certainement le plus important pour notre étude, du flot géodésique en courbure négative : son côté chaotique. En effet, le flot géodésique d'une variété fermée de courbure sectionnelle strictement négative est uniformément hyperbolique (ou Anosov) au sens suivant:

Proposition 2.1 (Anosov). *Le flot géodésique (φ_t) défini en (1.2) est Anosov, i.e, pour tout $x \in SM$, il existe une décomposition (continue en x) de l'espace tangent*

$$(2.1) \quad T_x(SM) = E_u(x) \oplus E_s(x) \oplus \mathbb{R}V(x).$$

- La décomposition est invariante par le flot

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad E_u(\varphi_t(x)) = (d\varphi_t)_x(E_u(x)), \quad E_s(\varphi_t(x)) = (d\varphi_t)_x(E_s(x)).$$

- Il existe des constantes $C > 0$ et $\theta > 0$ telles que pour tout $x \in SM$,

$$|(d\varphi_t)_x(v_s)|_g \leq C e^{-\theta t} |v_s|_g, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall v_s \in E_s(x).$$

$$|(d\varphi_t)_x(v_u)|_g \leq Ce^{-\theta|t|}|v_u|_g, \quad \forall t \leq 0, \quad \forall v_u \in E_u(x).$$

Explicitons : la courbure peut s'interpréter comme une mesure de la "distance" à la géométrie euclidienne. En particulier, le signe de cette dernière influence la vitesse à laquelle deux géodésiques proches divergent: en courbure positive, cette vitesse est plus lente que pour deux droites dans l'espace euclidien mais en courbure négative, elle est plus rapide. Le fait que le flot géodésique soit Anosov est alors une formalisation du mantra suivant, qui servira de définition du mot "chaotique"¹ dans la suite du manuscrit.

Deux points, même initialement très proches, ont des trajectoires par la dynamique qui divergent exponentiellement rapidement.

En d'autres termes, on a une (très) forte dépendance en les conditions initiales. Ce fait a longtemps interrogé les scientifiques, en effet, les mesures physiques ayant toujours une précision finie, il est alors impossible de prédire la trajectoire d'un point dans un système chaotique! Rajoutons que de nombreux systèmes physiques présentent des caractéristiques chaotiques et que ce n'est donc pas seulement le fruit de l'imagination des mathématiciens: la météo, le système solaire à trois astres ou encore le double pendule pour ne citer que les exemples les plus connus.

Une approche, initialement portée par Henri Poincaré pour l'étude du système à trois corps est celui des systèmes dynamiques : au lieu d'étudier la trajectoire d'un seul point, commençons par étudier l'évolution de densité. En effet, même si chaque point se comporte de façon chaotique, on peut espérer retrouver un peu de structure en "moyennant en espace".

Ce point de vue statistique peut être relié à la thermodynamique. On peut modéliser un gaz comme l'ensemble d'un très (très) grand nombre de particules qui s'entrechoquent et rebondissent les unes sur les autres. La trajectoire de chacune des particules est purement chaotique, toutefois, la thermodynamique s'attèle à définir des grandeurs (dites macroscopiques) obtenues en moyennant en espace. Par exemple, la température est la moyenne spatiale des énergies cinétiques des particules. On remarque alors deux choses: premièrement la température est une grandeur que l'on peut mesurer et prédire selon des modèles physiques (et ne semble donc pas présenter l'imprévisibilité expliquée plus haut) et deuxièmement il s'agit d'une grandeur souvent plus pertinente pour décrire l'état du gaz que la donnée de toutes les vitesses et positions des particules.

Pour étudier notre système chaotique, on étudie l'évolution de densités et pas de points, c'est le point de vue des systèmes dynamiques.

Un second point que l'on peut aussi tirer de notre analogie avec la thermodynamique est qu'il est souhaitable d'étudier le système dynamique dans le régime de temps long,

¹Le mot n'ayant pas de définition précise dans la littérature.

i.e $t \rightarrow +\infty$. En effet, la variété M étant compacte, deux trajectoires, divergeant exponentiellement vite vont tout de même devoir se rapprocher après un certain temps. De même, un système thermodynamique laissé suffisamment longtemps va voir sa température s'homogénéiser à la température ambiante : on a un phénomène d'uniformisation aux temps long. C'est le point de vue des systèmes dynamiques ergodiques, notre mantra devient donc :

Pour étudier notre système chaotique, on étudie l'évolution de densités aux temps longs, c'est le point de vue des systèmes dynamiques ergodiques.

2.2. Système chaotique et géodésiques. Intéressons nous à comment l'hypothèse d'hyperbolicité faite sur le flot géodésique influence la topologie et sa géométrie de la variété M . Supposons que M est une surface, c'est à dire que $n = 2$, on commence par citer la célèbre formule de Gauss-Bonnet qui s'énonce comme suit :

$$\int_M K d\text{vol}^g = 2\pi\chi(M) = 2\pi(2 - 2g),$$

où $\chi(M)$ et g sont respectivement la caractéristique d'Euler et le genre de M . Comprenons ce que dit la formule: le membre de droite est purement topologique (en fait, les surfaces fermées connexes sont classifiées par leur genre et ce terme caractérise entièrement la topologie de M) mais le terme de gauche est a priori riemannien. Le théorème de Gauss-Bonnet exprime donc un lien fort entre l'aspect riemannien de (M, g) et sa topologie : en particulier, si $K < 0$, on voit que $g \geq 2$.

En dimension quelconque, on peut citer le résultat suivant du à Hadamard: soit (M^n, g) une variété fermée munie d'une métrique à courbure strictement négative, alors le revêtement universel \tilde{M} de M est difféomorphe à \mathbb{R}^n . En particulier, les groupes d'homotopies $\pi_k(M)$ de M sont tous nuls pour $k \geq 2$ et donc toute l'information homotopique est contenue dans le groupe fondamental $\pi_1(M)$.

Un lien entre le groupe fondamental et la géométrie de M est donné par le résultat suivant, aussi du à Hadamard : toute classe d'homotopie libre c de lacets (ou de façon équivalente, toute classe de conjugaison du $\pi_1(M)$) contient une unique géodésique fermée notée $\gamma_g(c)$. Nous noterons \mathcal{C} l'ensemble des classes d'homotopie libre, notons que le résultat précédent établit donc une correspondance entre \mathcal{C} et l'ensemble des géodésiques fermées de M . On peut définir deux invariants à partir de cette correspondance, le *spectre des longueurs* et le *spectre des longueurs marqué* :

$$(2.2) \quad \Lambda(g) := \{\ell_g(\gamma_g(c)) \mid c \in \mathcal{C}\}, \quad \mathcal{L}_g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad c \mapsto \ell_g(c).$$

On peut penser à $\Lambda(g)$ comme un "ensemble de nombres premiers" associé à (M, g) , l'analogie prend son sens lorsque l'on définit la fonction zeta de Ruelle :

$$(2.3) \quad \zeta_R(\lambda) := \prod_{c \in \mathcal{C}} (1 - e^{-\lambda \ell_g(\gamma_g(c))}) = \prod_{\eta \in \Lambda(g)} (1 - e^{-\lambda \eta}).$$

On montre que la fonction converge et est holomorphe pour $\operatorname{Re}(\lambda) \gg 1$, tout comme la fonction zeta de Riemann, ζ_R admet un prolongement méromorphe au plan complexe. Ce dernier à d'abord été obtenu par Blank, Keller et Liverani dans [BKL] puis une preuve de nature microlocale a été donné par Dyatlov et Zworski dans [DyaZw]. Les deux approches nécessitent de construire des espaces fonctionnels (dit *anisotropes*) prenant en compte le caractère hyperbolique de la dynamique et d'étudier la théorie spectrale du flot géodésique X sur ces espaces. On montre que les pôles de la fonction zeta s'interprètent comme des valeurs propres de X sur ces espaces anisotropes. Ces pôles sont les *résonances de Pollicott-Ruelle* et forment un terreau fertile de recherche depuis maintenant plusieurs décennies, nous n'essaierons pas de résumer sa vaste littérature ici.

Une question naturelle est de savoir dans quelle mesure les invariants construits plus hauts caractérisent la métrique g . La notion d'équivalence ici, est l'isométrie, c'est à dire que deux métriques g, g' sont dites isométriques si il existe un difféomorphisme $\phi : M \rightarrow M$ tel que $g' = \phi^*g$.

Depuis Vigneras² [Vi], on sait qu'il existe des surfaces hyperboliques non isométriques partageant le même spectre des longueurs (et donc la même fonction zeta!), il n'est donc pas un candidat pour caractériser la géométrie de (M, g) . Toutefois, le spectre des longueurs marqué est quant à lui encore un candidat crédible à ce poste. Tout d'abord, on sait grâce à Katok [Ka] qu'il caractérise la métrique à isométrie près pour les surfaces. De plus, un récent résultat du à Guillarmou et Lefeuvre [GuLef] montre que \mathcal{L}_g est "localement injective" (en un sens que l'on n'explicitera pas ici). Leur preuve repose sur des arguments analytiques dans le prolongement des papiers ayant étendu la fonction zeta de Ruelle cités plus haut. On verra plus loin comment leur résultat peut être utilisé pour résoudre "localement" un autre problème de rigidité.

2.3. Entropie. On introduit ici l'invariant numérique le plus important de la théorie des systèmes dynamiques : l'entropie, il s'agit de l'objet principal du problème que l'on étudiera. L'histoire de l'entropie est bien trop longue pour être résumée ici, pour le lecteur intéressé, on renvoie vers l'excellent papier de Katok [Ka1] résumant 50 ans d'avancées sur le sujet.

2.4. Entropie topologique. L'idée de l'entropie est grossièrement de capturer, en un invariant numérique, la "complexité" de la dynamique. Les différentes notions d'entropie correspondent alors à des façons différentes de mesurer cette complexité et on commence par la notion topologique. On définit *la distance de Bowen* :

$$d_t(x, y) := \max_{s \in [0, t]} d(\varphi_s x, \varphi_s y)$$

²Ce problème est en fait fortement lié au problème de rigidité du spectre du Laplacien

où d est la distance induite par la métrique. La distance de Bowen mesure donc la distance entre les segments d'orbite de x et y jusqu'au temps t . Définissons alors $C(\varepsilon, t)$ comme le nombre minimal de points qu'il faut pour recouvrir SM par des boules de rayon $\varepsilon > 0$ pour la distance d_t . En d'autres termes, il s'agit du nombre minimal d'orbite à connaître pour pouvoir approximer n'importe quelle orbite (jusqu'au temps t) à ε près. Rappelons que notre mantra nous dit que deux orbites vont diverger exponentiellement vite, ainsi, le nombre $C(\varepsilon, t)$ va croître quand $t \rightarrow +\infty$. En fait, cette croissance est exponentielle et l'entropie topologique est justement le taux de croissance exponentiel associé:

$$(2.4) \quad h_{\text{top}}(\varphi_1) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln C(t, \varepsilon).$$

Cette définition est due à Bowen, pour un flot géodésique, on a d'autres définitions possible. Tout d'abord, comme pour les nombres premiers, comprendre la localisation des pôles et zéros de la fonction zeta ζ_R permet d'obtenir une information sur la répartition des longueurs des géodésiques. On cite le résultat suivant, dû à Margulis:

$$\#\{\gamma \mid \gamma \text{ géodésique fermée } \ell_g(\gamma) \leq T\} \sim \frac{e^{Th_{\text{top}}(\varphi_1)}}{Th_{\text{top}}(\varphi_1)}.$$

Il s'agit d'un analogue du célèbre théorème des nombres premiers qui énonce que le nombre $\pi(x)$ de premiers inférieurs à x est équivalent à $x/\ln(x)$.³ Citons pour finir une interprétation due à Manning de l'entropie topologique. Notons \tilde{M} le revêtement universel de M et \tilde{g} le relevé naturel de g à \tilde{M} , alors

$$\forall p \in \tilde{M}, \quad h_{\text{top}}(\varphi_1) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \text{vol}_{\tilde{g}}(B_{\tilde{g}, r}(p)).$$

2.5. Entropie métrique. On se donne maintenant une mesure de probabilité μ invariante par le flot: $\varphi_t^* \mu = \mu$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'idée provient de la théorie de l'information développée par Shannon. Etant donné une partition mesurable ξ , on définit l'entropie de la partition comme

$$h_\mu(\varphi_1, \xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\xi_{-n})/n, \quad H_\mu(\xi) := - \sum_{C \in \xi} \ln(\mu(C))\mu(C),$$

où l'on a, pour deux partitions ξ, η et $n \in \mathbb{Z}$,

$$\xi \vee \eta := \{C \cap D \mid (C, D) \in \xi \times \eta\}, \quad \xi_{-n} := \bigvee_{i=-n}^0 \varphi_i(\xi).$$

L'entropie métrique de φ_1 par rapport à μ est obtenue en prenant le supremum sur les partitions $h_\mu(\varphi_1) = \sup_\xi h_\mu(\varphi_1, \xi)$.

³On a formellement $x \leftrightarrow Th_{\text{top}}(\varphi_1)$.

La fonction $x \mapsto -x \ln(x)$ est la fonction d'information de Shannon, on décide donc de mesurer la complexité du flot en appliquant cette fonction à la distributions par μ des mesures de partitions de plus en plus fines. Remarquons que par le théorème d'Hadamard explicité plus haut, (M, g) possède un nombre dénombrable infini de géodésique fermées. Pour chacune de ces géodésiques γ , on définit une mesure de probabilité invariante δ_γ par l'opération suivante:

$$(2.5) \quad \forall f \in C^\infty(SM), \quad \delta_\gamma(f) := \frac{1}{\ell_g(\gamma)} \int_0^1 f(\gamma(t)) dt.$$

Le support de cette mesure est sur la géodésique γ , ainsi, quand la partition ξ devient très fine, la plupart des élément de la partition n'intersectent pas γ et on en déduit que δ_γ ne doit pas capturer beaucoup de la complexité de la dynamique, i.e $h_{\delta_\gamma}(\varphi_1)$ doit être petit⁴. Une question naturelle est donc: parmi les nombreuses mesures invariantes par le flot, laquelle maximise $h_\mu(\varphi_1)$?

2.6. Principe variationnel. Le lien entre les deux notions d'entropies est donné par le *principe variationnel*:

$$(2.6) \quad h_{\text{top}}(\varphi_1) = \sup\{h_\mu(\varphi_1) \mid \mu \text{ mesure de probabilité invariante}\}.$$

De plus, pour un flot Anosov, le supremum est atteint pour une unique mesure de probabilité:

$$(2.7) \quad \exists! \mu_0 \text{ mesure de probabilité invariante, } h_{\text{top}}(\varphi_1) = h_{\mu_0}(\varphi_1).$$

On l'appelle *mesure d'entropie maximale*.

2.7. Rigidité entropique. Une question naturelle, posée d'abord par Katok [Ka] est:

Question 1. *Pour quelles métriques g de courbure négative a-t-on que la mesure de Liouville et d'entropie maximale coïncident?*

L'intuition derrière cette question est la suivante: la plupart des objets dynamiques que l'on construit se trouvent être seulement continus⁵. Cela explique la nécessité d'introduire des techniques analytiques fines pour étudier les résonances de Ruelle et cela nous pousse à croire que la mesure d'entropie maximale ne peut pas être lisse en général (contrairement à la mesure de Liouville) et que l'égalité des deux mesures ne peut avoir lieu que dans des cas très spécifiques : les cas algébriques. La conjecture suivante est connue sous le nom de *conjecture de rigidité entropique de Katok*.

Conjecture 1 (Katok). *La mesure de Liouville d'une métrique à courbure sectionnelle strictement négative coïncide avec la mesure d'entropie maximale si et seulement si g est localement symétrique.*

⁴En fait l'entropie pour ces mesures est nulle.

⁵Indépendamment de la régularité des données initiales!

On n'explicite pas la définition d'une métrique localement symétrique mais il faut y penser comme les constructions "algébriques"⁶ donnant des flots géodésiques de courbure négative. On peut donner une classification des différents groupes de Lie qui apparaissent dans de telles constructions. Pour ce qui suit, nous aurons simplement besoin des deux faits suivants:

- Les métriques hyperboliques sont localement symétriques.
- Pour les surfaces, toutes les métriques localement symétriques sont hyperboliques.

Katok donne dans [Ka] une preuve de la conjecture pour les surfaces, il utilise crucialement le fait que toute métrique g de courbure négative est conformétement équivalente à une métrique hyperbolique et la preuve ne se généralise donc pas aux dimensions supérieures.

La littérature en dimension $n \geq 3$ se résume au résultat suivant démontré par Flaminio dans [Fla]. On introduit pour commencer la fonctionnelle

$$(2.8) \quad \Phi(g) := h_{\text{top}}(\varphi_1^g) - h_{\mu_L^g}(\varphi_1^g) \geq 0.$$

Par le principe variationnel (2.6), $\mu_L^g = \mu_0^g$ équivaut à $\Phi(g) = 0$. Notons que l'on a une action naturelle du groupe $\text{Diff}(M)$ des difféomorphismes de M .

$$\mathcal{O}(g) := \{\phi^*g \mid \phi \in \text{Diff}_0(M)\}, \quad T_{g_0}\mathcal{O}(g_0) := \{\mathcal{L}_V g_0 \mid V \in C^\infty(M; TM)\}.$$

La fonctionnelle Φ est constante sur toute orbite $\mathcal{O}(g)$ et le noyau de sa hessienne $d^2\phi(g_0)$ contient donc toujours le plan tangent $T_{g_0}\mathcal{O}(g_0)$. De plus, si g_0 est localement symétrique, alors $\Phi(g_0) = 0$ et $d\Phi(g_0) = 0$. Dans ces notations, Flaminio montre:

Soit g_0 une métrique hyperbolique et $(g_\lambda)_{\lambda \in]-\varepsilon, \varepsilon[}$ un chemin de métriques de courbure sectionnelle strictement négative et de volume constant égal à celui de g_0 . Supposons de plus que $\partial_\lambda g_\lambda|_{\lambda=0} \notin T_{g_0}\mathcal{O}(g_0)$, alors $d^2\Phi(g_0)(S, S) > 0$. En particulier, pour λ proche de zéro et non nul, on a $\mu_L^{g_\lambda} \neq \mu_0^{g_\lambda}$.

Il s'agit donc d'un résultat local proche des métriques hyperboliques. Notons que le résultat est linéaire, c'est à dire que Flaminio montre l'injectivité au niveau infinitésimal (ici que la hessienne $d\Phi^2$ est injective hors de $T_{g_0}\mathcal{O}(g_0)$).

Dans le reste de ce manuscrit, on explique comment le résultat de Flaminio peut être combiné aux techniques développées par Guillarmou et Lefeuvre dans [GuLef] pour leur preuve de la rigidité locale du spectre des longueurs marqué pour obtenir le résultat suivant.

Theorem 1. *Soit (M^n, g_0) une variété fermée de dimension $n \geq 3$ munie d'une métrique hyperbolique g_0 . Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et \mathcal{U} un voisinage C^N de g_0 dans*

⁶Comprendre quotients de groupes de Lie.

l'espace des métriques à courbures négative de même volume tel que pour tout $g \in \mathcal{U}$, il existe $\phi \in \text{Diff}_0(M)$ tel que

$$(2.9) \quad \|\phi^*g - g_0\|_{H^{3/2}}^2 \leq C_n (h_{\text{top}}(\varphi_1^g) - h_{\mu_L^g}(\varphi_1^g)).$$

pour une constante $C_n > 0$. En particulier, si $\text{Vol}_g(M) = \text{Vol}_{g_0}(M)$ et $\mu_L^g = \mu_0^g$ alors g est isométrique à g_0 .

Cela donne donc une preuve de la conjecture de Katok au voisinage de toute métrique hyperbolique. Notons que la preuve fournit l'estimée de stabilité (2.9), c'est à dire que dans \mathcal{U} , la différence entropique $h_{\text{top}}(\varphi_1^g) - h_{\mu_L^g}(\varphi_1^g)$ contrôle la distance à l'orbite de g_0 . En des termes plus informels : proche d'une métrique hyperbolique, une métrique pour laquelle la mesure de Liouville est "presque" égale à la mesure d'entropie maximale est "presque" hyperbolique.

3. PREUVE DU THÉORÈME.

La première étape consiste à calculer explicitement la hessienne de Φ en g_0 hyperbolique. La régularité de Φ est garantie par des résultats de Katok et al [KKPW] et Contreras [Con]. De plus, on peut simplifier la formule obtenue en utilisant la géométrie des espaces hyperboliques, la proposition qui suit est tirée de [Fla].

La fonctionnelle Φ prenant pour argument des métriques, sa hessienne prendra donc pour argument des 2-tenseurs symétriques $S \in C^\infty(M; S^2T^*M)$. Il existe une correspondance entre les tenseurs symétriques et les fonctions sur SM donnée par la formule suivante:

$$\pi_2^* : C^\infty(M; S^2T^*M) \rightarrow C^\infty(SM), \quad (\pi_2^*S)(x, v) := S_x(v, v).$$

De plus, pour une fonction $f \in C^\infty(SM)$ de moyenne nulle, on définit sa variance comme

$$(3.1) \quad \text{Var}_{\mu^L}(f) = \text{Cov}(f, f) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{SM} \left(\int_0^T f(\varphi_t(z)) dt \right)^2 d\mu^L(z).$$

Proposition 3.1 (Flaminio). *Soit g_0 hyperbolique et $S \in C^\infty(M; S^2T^*M)$, alors on a*

$$(3.2) \quad d\Phi_{g_0}^2(S, S) = \text{Cov}(\pi_2^*Q(S), \pi_2^*Q(S)).$$

Ici, $Q : C^\infty(M; S^2T^*M) \rightarrow C^\infty(M; S^2T^*M)$ est l'opérateur différentiel donné par

$$(3.3) \quad Q(S) = -\frac{1}{2}Q(S) + \frac{1}{4}\nabla^*\nabla S^8.$$

⁷Ici, $H^{3/2}$ désigne l'espace de Sobolev d'ordre 3/2, voir la dernière section.

⁸On omet un terme pour ne pas introduire trop de notations superflues.

Dans la suite de son papier, Flaminio utilise la théorie des représentations pour montrer que cette covariance est non nulle si S n'est pas tangent à l'orbite. Nous optons pour une approche microlocale très fortement inspirée de l'argument de Guillarmou, Knieper et Lefeuvre dans [GuKnLef] pour l'étude de l'injectivité locale du spectre des longueurs marqué. L'essentiel de l'analyse microlocale utilisé par les auteurs précédemment cités est contenue dans l'estimée de coercivité suivante.

Pour énoncer le résultat, commençons par fixer une coupe transverse $\Sigma \subset C^\infty(M; S^2T^*M)$ obtenue comme orthogonal (pour le produit scalaire naturel) du plan tangent $T_{g_0}\mathcal{O}(g_0)$. Nous montrons dans ce qui suit des résultats d'injectivité sur Σ ⁹. Dans ce qui suit, on notera π_Σ la projection orthonale sur Σ .

Theorem 2 (Guillarmou-Lefeuvre). *On a l'estimée suivante*

$$(3.4) \quad \exists C > 0, \forall S \in H^{-1/2}(M; S^2T^*M), \text{Cov}(\pi_2^*Q(S), \pi_2^*Q(S)) \geq C \|\pi_\Sigma S\|_{H^{-1/2}}^2 \text{¹⁰}.$$

Afin de pouvoir utiliser le résultat plus haut, étant donné $g \in \mathcal{U}$, on commence par "projeter" g sur Σ . On montre que si \mathcal{U} est suffisamment petit, alors $\Sigma \cap \mathcal{O}(g)$ est réduit à un point. Dans ce qui suit, on notera ϕ^*g l'unique élément de l'orbite de g dans Σ .

Proof. Soit $g \in \mathcal{U}$, on utilise la proposition 3.1 et un développement de Taylor pour obtenir

$$\Phi(g) = \Phi(\phi^*g) = C_n \text{Cov}(\pi_2^*Q(\phi^*g - g_0), \pi_2^*Q(\phi^*g - g_0)) + O(\|g - g_0\|_{C^{5,\alpha}}^3).$$

Le point central est que $\phi^*g - g_0 \in \Sigma$ et donc (3.4) donne

$$\|\pi_\Sigma Q(\phi^*g - g_0)\|_{H^{-1/2}}^2 \leq C'_n \Phi(g) + C'_n \|\phi^*g - g_0\|_{C^{5,\alpha}}^3.$$

Supposons que l'on ait l'estimée suivante

$$(3.5) \quad \forall S \in \Sigma, C \|S\|_{H^{3/2}}^2 \leq \|\pi_\Sigma QS\|_{H^{-1/2}}^2.$$

Alors en réinjectant on obtient

$$\|\phi^*g - g_0\|_{H^{3/2}}^2 \leq C'_n \Phi(g) + C'_n \|\phi^*g - g_0\|_{C^{5,\alpha}}^3.$$

Pour conclure, on voudrait "absorber" le terme $C'_n \|\phi^*g - g_0\|_{C^{5,\alpha}}^3$ dans le membre de gauche. Comme la norme $C^{5,\alpha}$ est plus forte que la norme Sobolev $H^{-3/2}$, on peut le faire par interpolation si on contrôle $\phi^*g - g_0$ dans une norme C^N pour N grand. Plus précisément, pour $\beta > \alpha$,

$$\|\phi^*g - g_0\|_{C^{5,\alpha}}^3 \leq c_{g_0} \|\phi^*g - g_0\|_{H^{n/25+\beta}}^3 \leq c'_{g_0} \|\phi^*g - g_0\|_{H^{3/2}}^2 \|\phi^*g - g_0\|_{C^N},$$

pour tout $N > \frac{3}{2}n + 6 + 6\beta$. Cette dernière estimée donne (2.9). \square

⁹On peut voir ça comme quotienter l'espace des 2-tenseurs symétriques par la gauge naturelle donnée par le plan tangent à l'orbite.

¹⁰On omet encore un terme de moyenne dans la formule simplifier l'exposition.

4. UN PEU D'ANALYSE MICROLOCALE

Dans cette ultime section, il nous reste à prouver (3.5). La première remarque est que $\pi_\Sigma Q \pi_\Sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ est un opérateur différentiel d'ordre 2 *elliptique*¹¹. Pour notre usage, cela signifie qu'il admet un inverse à gauche modulo son noyau : il existe un *opérateur pseudo-différentiel* d'ordre -2 , A tel que

$$A\pi_\Sigma Q \pi_\Sigma = \text{Id} - \Pi_{\ker(\pi_\Sigma Q \pi_\Sigma)},$$

où $\Pi_{\ker(\pi_\Sigma Q \pi_\Sigma)}$ est la projection orthogonale sur $\ker(\pi_\Sigma Q \pi_\Sigma)$.

Les opérateurs pseudo-différentiels (OPD) sont une généralisation des opérateurs différentiels. Ils ont été introduit précisément pour l'usage que l'on en fait ici : "l'inverse" d'un opérateur différentiel (quand il existe) n'est plus un opérateur différentiel. On peut donc penser l'algèbre des OPD comme une extension de l'algèbre opérateurs différentiels où certains éléments (précisément les opérateurs elliptiques) sont "inversibles", i.e admettent un pseudo-inverse au sens plus haut, qui est un OPD.

Les OPD, comme les opérateurs différentiels standards agissent naturellement sur une échelle de régularité donnée par les espaces de Sobolev H^m pour $m \in \mathbb{R}$. Un opérateur différentiel d'ordre k "coutant" k dérivée, il agit comme opérateur borné de $H^m \rightarrow H^{m-k}$. Il en est de même pour les OPD et l'ordre d'un produit de OPD est la somme des ordres.

En particulier, pour $S \in \Sigma$, on a en utilisant que $A : H^{-1/2} \rightarrow H^{3/2}$ est bornée,

$$\begin{aligned} \|S\|_{H^{3/2}}^2 &= \|A\pi_{\ker(D_{g_0}^*)}QS\|_{H^{3/2}}^2 + \|\Pi_{\ker(\pi_{\ker(D_{g_0}^*)})}QS\|_{H^{3/2}}^2 \\ &\leq C\|\pi_{\ker(D_{g_0}^*)}QS\|_{H^{-1/2}}^2 + \|\Pi_{\ker(\pi_{\ker(D_{g_0}^*)})}QS\|_{H^{3/2}}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, si on montre l'injectivité de $\pi_\Sigma Q \pi_\Sigma$, alors on a démontré (3.5). On peut garder en tête le mantra suivant concernant les estimées coercives : on obtient une estimée coercive comme (3.5) en combinant l'analyse microlocale (donc montrer que l'opérateur en question est elliptique) avec un résultat géométrique (donc montrer que l'opérateur, de nature géométrique, est injectif).

Il s'agit d'ailleurs de la dernière étape de l'argument.

Lemma 4.1. *On a $\ker(\pi_\Sigma Q \pi_\Sigma) = \{0\}$, on dit que Q est solénoïdalement injectif, ou s -injectif.*

¹¹La partie d'ordre maximale de Q est $(1/4)\nabla^*\nabla$ et donc cette affirmation se réduit à l'ellipticité du laplacien.

Soit $S \in \Sigma$ que l'on suppose sans trace: $\text{tr}(S) = 0$ ¹² et tel que $\pi_\Sigma Q(S) = 0$. Cela implique en particulier que $\langle Q(S), S \rangle = 0$. Toutefois, on peut utiliser (3.3) pour obtenir

$$\langle Q(S), S \rangle = -\frac{1}{2}\|S\|^2 + \frac{1}{4}\langle \nabla^* \nabla S, S \rangle.$$

Pour obtenir une contradiction, nous allons donc étudier le bas du spectre du laplacien agissant sur les 2-tenseurs. Pour cela, on utilise des identités géométriques nommées identités de Bochner ou de Weitzenböck. Ces formules prennent la forme

$$\nabla^* \nabla + q(R_g) \geq 0,$$

où $q(R_g)$ est un terme dépendant de la courbure de g . Le point clé est qu'en courbure négative, le terme $q(R_g)$ est négatif et que l'inégalité plus haut fournit une borne inférieure sur le spectre du laplacien!

Dans notre cas précis, on a g_0 hyperbolique et donc le terme $q(R_g)$ se simplifie, en particulier, on obtient la borne suivante:

$$(4.1) \quad \forall S \in C^\infty(M; S^2 T^* M) \cap \text{Ker}(\text{tr}), \quad \langle \nabla^* \nabla S, S \rangle \geq n\|S\|^2.$$

En réinjectant, on trouve finalement

$$0 = \langle Q(S), S \rangle = -\frac{1}{2}\|S\|^2 + \frac{1}{4}\langle \nabla^* \nabla S, S \rangle \geq \frac{1}{4}(n-2)\|S\|^2.$$

En particulier, comme $n \geq 3$, cela montre que $S = 0$ et conclut la preuve.

REFERENCES

- [BKL] M. Blank, G. Keller, and C. Liverani, *Ruelle-Perron-Frobenius spectrum for Anosov maps*, Nonlinearity 15 (2002) 1905–1973.
- [Con] G. Contreras, *Regularity of topological entropy of hyperbolic flows*, Math. Z. 210 (1992), 97-111.
- [DyaZw] S. Dyatlov M. Zworski *Dynamical zeta functions for Anosov flows via microlocal analysis*
- [Fla] L. Flaminio, *Local entropy rigidity for hyperbolic manifolds*, communications in analysis and geometry, Volume 3, Number 4 555-596, 1995
- [GuKnLef] C. Guillarmou, G. Knieper, T. Lefeuvre *Geodesic stretch, pressure metric and marked length spectrum rigidity*, Ergodic Theory Dynam. Systems 42 (2022), no. 3, 974–1022, special volume in memory of Anatole Katok.
- [GuLef] C. Guillarmou, T. Lefeuvre *The marked length spectrum of Anosov manifolds*, Annals of Mathematics, Pages 321-344 from Volume 190 (2019).
- [Ka] A. Katok, *Entropy and closed geodesics*, Ergod. Th. Dynam. Sys. (1982), 2, 339-367 Printed in Great Britain.
- [Ka1] A. Katok, *Fifty years of entropy in dynamics : 1958-2007*, journal of Modern Dynamics, Volume 1, NO. 4, 2007, 545–596
- [KKPW] A. Katok, G. Knieper, M. Pollicott, and H. Weiss, *Differentiability and analyticity of topological entropy for Anosov and geodesic flows*, Invent. Math. 129 (1989), 581-597.

¹²C'est une simplification sans grande conséquence. La trace d'un 2-tenseur symétrique correspond à la trace matricielle dans une base.

- [Vi] M-F. Vigneras, *Varietes Riemanniennes isospectrales non-isometriques*, Annals of Mathematics, Sec-ond Series, 112 (1980), no. 1, 21–32.