INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE CORRÉLATIONS SPECTRALES EN CHAOS QUANTIQUE

JULIEN MOY

1. Introduction

Un des objectifs du chaos quantique est de comprendre l'influence sur un système quantique des propriétés dynamiques du système classique sous-jacent. On peut notamment s'intéresser à la structure des états propres ou à la distribution des niveaux d'énergie ; la suite de l'exposé se concentre sur ce second point.

Pour fixer les idées, on s'intéresse aux niveaux d'énergie (c'est-à-dire les valeurs propres) du Laplacien sur une surface fermée (i.e. compacte et sans bord) (X, g), où g est une métrique lisse sur TX (i.e. la donnée d'un produit scalaire g_x sur chaque espace tangent T_xX, qui varie de façon lisse avec x). La variété X est munie d'une mesure lisse $\mathrm{d}V_g$ associée à la métrique (on n'a pas besoin de supposer X orientable, mais si c'est le cas, $\mathrm{d}V_g$ est une n-forme définie globalement), ce qui permet de définir l'espace des fonctions de carré intégrable $L^2(X) = L^2(X, \mathrm{d}V_g)$.

Definition 1.1. Étant donné une fonction lisse $f : X \to \mathbf{R}$, on définit le *gradient* de f comme une section du fibré tangent, par la relation ponctuelle

$$\mathrm{d}_x f(X) = g_x(\nabla_x f, X).$$

L'opérateur *divergence* est défini comme l'adjoint formel de l'opérateur gradient, c'est-à-dire que pour toute section lisse du fibré tangent $s \in \mathcal{C}^\infty(X, TX)$ on a

$$\int_X g_x(\nabla_x f, s(x))\mathrm{d}V_g = \int_X f(x) \operatorname{div} s(x) \mathrm{d}V_g.$$

Enfin, on définit le *Laplacien* $\Delta f := \operatorname{div} \nabla f$. On vérifie sans mal que pour toutes fonctions régulières φ et ψ on a

$$\int_X \varphi \Delta \psi \mathrm{d}V_g = \int_X \psi \Delta \varphi \mathrm{d}V_g.$$

Remarque 1.1. On retrouve évidemment les notions usuelles lorsque $(X, g) = (\mathbf{R}^n, \mathrm{eucl})$.

Comme X est fermée, on peut montrer que l'opérateur Δ, agissant initialement sur l'espace des fonctions lisses, admet une unique extension auto-adjointe à $L^2(X)$, que nous noterons encore Δ. L'opérateur $-\Delta$ est positif, à résolvante compacte ; son spectre est donc constitué d'une suite infinie de valeurs propres

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \to +\infty.$$

On peut à ce stade légitimement se demander quel est le rapport avec la dynamique classique. Pour cela, il faut se rappeler que la dynamique quantique d'une particule libre (i.e. soumise à aucune interaction) sur la variété X est décrite par l'équation de Schrödinger

$$\mathrm{i}h\partial_t \psi = h^2 \Delta \psi,$$

où ψ est la *fonction d'onde*, dont le module au carré représente la densité de probabilité de présence de la particule. Les niveaux d'énergie du système sont donnés, à changement d'échelle près, par les valeurs propres du Laplacien.

Le principe de correspondance énonce que dans une certaine limite, la dynamique quantique du système peut se réduire à la dynamique classique d'une particule libre. Celui-ci se comprend de façon un peu plus intuitive lorsqu'on étudie la propagation des ondes lumineuses (donc l'équation des ondes au lieu de l'équation de Schrödinger). De façon rigoureuse, la propagation d'un rayon lumineux se décrit via l'étude de l'équation des ondes

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = 0. \tag{1.1}$$

Dans l'approximation de l'optique géométrique (où l'on suppose la longueur d'onde négligeable devant la taille des objets), la propagation des rayons lumineux se décrit bien en termes de trajectoires classiques d'une particule libre. En fait, cette approximation échoue lorsqu'on étudie la propagation des ondes à des temps trop longs, en raison de phénomènes dispersifs.

Maintenant, la dynamique classique d'une particule libre sur X n'est autre que celle du flot géodésique sur le fibré cotangent T^*X. Le flot géodésique est défini de la façon suivante : si $(x, v) \in TX$, on note $\varphi^t(x, v) = (\gamma(t), \dot\gamma(t))$, où γ est l'unique géodésique vérifiant les conditions $\gamma(0) = x$ et $\dot\gamma(0) = v$. Notons que l'hypothèse que X est fermée assure que φ^t est défini pour toute valeur de t. La structure Riemannienne donnée par la métrique g fournit une identification naturelle entre les fibrés tangent et cotangent de X, ce qui permet de voir φ^t comme un flot sur T^*X.

Un théorème dû à Hermann Weyl donne un premier résultat sur la structure de l'ensemble des valeurs propres de $-\Delta$:

Theorem 1.2 (Weyl 1920)**.** *Lorsque λ tend vers $+\infty$, on a*

$$\#\{j \geq 0,\ \lambda_j \leq \lambda\} = \frac{\mathrm{vol}(X)}{4\pi}\lambda + \mathcal{O}(\sqrt{\lambda}),$$

où $\mathrm{vol}(X)$ *désigne l'aire de la surface.*

Fait remarquable, la connaissance du spectre de Δ permet de retrouver l'aire de la surface X. C'est la réponse la plus élémentaire à la question suivante popularisée par Mark Kac :

"*Can one hear the shape of a drum?*"

En fait, on peut retrouver bien plus d'informations géométriques que le volume : Colin de Verdière, inspiré par les travaux des physiciens Balian et Bloch, montre que le spectre du Laplacien détermine complètement l'ensemble des longueurs des géodésiques fermées de X [CdV73].

1.1. Statistiques spectrales.

Une observation centrale en chaos quantique, qui remonte au moins aux travaux de Percival [Per73], est que les propriétés statistiques du spectre d'un système quantique sont influencées par la *régularité* de la dynamique du système classique sous-jacent.

Avant de poursuivre, je souhaite clarifier ce que j'entends par propriétés statistiques d'un spectre, qui est a priori un ensemble tout à fait déterministe. Considérons une suite de nombres

$$E_1 \leq E_2 \leq \ldots \leq E_n \to +\infty,$$

auxquels il faut penser comme les niveaux d'énergie d'un système quantique. Pour simplifier l'exposition, on suppose que la fonction de comptage $\#\{j \geq 0,\ E_j \leq E\}$ croît linéairement en E, autrement dit, on suppose $E_n \simeq n$. Quitte à effectuer une normalisation, le spectre du Laplacien vérifie cette propriété.

Fixons une énergie E, et $W > 0$. On s'intéresse au nombre de niveaux dans une fenêtre centrée en E, de largeur W, c'est-à-dire à la quantité

$$n(E,W) = \#\{j \geq 0,\ E_j \in [E, E+W]\}.$$

Vu l'hypothèse faite au-dessus, on s'attend à ce qu'en moyenne (par rapport à E), $n(E,W)$ vaille à peu près W. Cela incite à regarder la quantité suivante, appelée *variance spectrale*:

$$\Sigma^2(W) = \frac{1}{\delta E}\int_E^{E+\delta E} \left|n(\lambda, W) - W\right|^2 \mathrm{d}\lambda.$$

Autrement dit, on regarde les fluctuations du nombre de valeurs propres autour du nombre attendu, dans une fenêtre centrée près de E, de largeur W. De faibles fluctuations traduisent une certaine *rigidité* de la répartition des niveaux E_i.

Pour étudier la structure fine du spectre, on peut considérer la répartition des écarts entre valeurs propres successives. On considère ainsi la mesure empirique associée aux écarts entre niveaux dans une fenêtre $[E, E+W]$:

$$p_{E,W}(s) = \frac{1}{n(E,W)} \sum_{E_j \in [E,E+W]} \delta\big(s - (E_{j+1} - E_j)\big)\big).$$

On suppose que $(p_{E,W})$ converge faiblement vers une distribution $p(s)$ dans la limite où E et W tendent vers $+\infty$ dans un régime adéquat. Le comportement de $p(s)$ proche de $s = 0$ est alors particulièrement éclairant, en ce qu'il est indicateur de la présence de *répulsion* entre niveaux d'énergie.

2. Dynamique classique et quantique

2.1. **Un peu de dynamique classique.** Dans le formalisme Hamiltonien de la mécanique classique, une particule est représentée par un point (x, ξ) de l'espace des phases $\mathbf{R}^{2n}$, où $x = (x^1, \ldots, x^n)$ représente la position et $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ l'impulsion (la variable duale de la vitesse). L'évolution d'une particule soumise à un potentiel $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ est donnée par les équations de Hamilton

$$\dot{x}(t) = -\frac{\partial p}{\partial \xi}, \qquad \dot{\xi}(t) = \frac{\partial p}{\partial x},$$

où $p(x,\xi) = |\xi|^2 + V(x)$ représente l'énergie du système. On peut introduire un champ de vecteurs $H_p := (-\partial_\xi p, \partial_x p)$, les trajectoires classiques sont alors simplement les courbes intégrales de H_p.

En fait, la formulation Hamiltonienne de la mécanique est équivalente à la formulation Newtonienne, mais elle a l'avantage de faire apparaître une nouvelle structure : la 2-forme $\omega := \sum_j \mathrm{d}\xi_j \wedge \mathrm{d}x^j$ sur $\mathbf{R}^{2n}$ est conservée par le flot Hamiltonien. La 2-forme ω est *symplectique*, c'est-à-dire fermée, et non dégénérée, au sens où la forme linéaire $\omega(v, \cdot)$ n'est jamais nulle.

La discussion ci-dessus s'adapte sans mal dans le cas où l'on remplace l'espace ambiant $\mathbf{R}^n$ par une variété X. On propose ici une construction plus géométrique. Une particule est représentée par un point (x, ξ) du fibré cotangent T^*X. On définit une 1-forme α sur T^*X de la façon suivante :

$$\alpha_{(x,\xi)} v = \xi(\mathrm{d}_{(x,\xi)}\pi(v)), \qquad v \in T(T^*X)$$

On introduit ensuite une 2-forme symplectique ω en posant $\omega := \mathrm{d}\alpha$. Celle-ci est non dégénérée ; aussi si p est une fonction lisse sur T^*X, on peut trouver un champ de vecteur H_p sur T^*X tel que $-\mathrm{d}p = \omega(H_p, \bullet)$. Je note φ^t le flot du champ de vecteurs H_p.

Proposition 2.1. *Le flot φ^t préserve la forme symplectique, de façon équivalente, $\mathcal{L}_{H_p}\omega = 0$, où $\mathcal{L}_{H_p}$ désigne la dérivée de Lie du champ de vecteurs H_p.*

Proof. On peut effectuer le calcul en coordonnées ; une manière plus élégante – mais plus conceptuelle – est d'exploiter la formule de Cartan $\mathcal{L}_X = \mathrm{d} \circ \iota_X + \iota_X \circ d$, donnant

$$\mathcal{L}_{H_p}\omega = \mathrm{d}(\iota_{H_p}\omega) + \iota_{H_p} \circ \mathrm{d}\omega = 0,$$

en exploitant la fermeture de ω et le fait que $\iota_{H_p}\omega = -\mathrm{d}H$. □

On introduit aussi le *crochet de Poisson*, défini pour deux fonctions f et g sur T^*X par

$$\{f, g\} := \omega(H_f, H_g).$$

Noter que $\{f, g\} = -\{g, f\}$, ce qui entraîne immédiatement $\{f, f\} = 0$ pour toute fonction f.

Bien qu'une particule se déplace *a priori* dans tous l'espace des phases T^*X, l'énergie p est conservée au cours de l'évolution, au sens où $p \circ \varphi^t = p$ pour tout t : il suffit en effet de constater $\mathcal{L}_{H_p}p = \mathrm{d}p(H_p) = -\omega(H_p, H_p) = 0$. On peut donc restreindre l'étude du mouvement aux sous-couches d'énergie $\Sigma_E := \{(x, \xi) \in T^*X,\ p(x, \xi) = E\}$, qui sont, si l'on fait une hypothèse raisonnable sur p, des sous-variétés de T^*X de dimension $2n - 1$.

2.1.1. *Dynamique chaotique.* Dans un sens un peu vague, un système dynamique est dit *chaotique* s'il présente une grande sensibilité aux conditions initiales. J'introduis la notion de flot *Anosov*, qui constituent les flots les plus chaotiques qui soient. Dans la suite, il faut penser à M comme une sous-couche d'énergie $M \subset T^*X$ associée à un Hamiltonien $p(x, \xi)$.

Definition 2.2. Soit M une variété fermée. Un flot $\varphi^t : M \to M$ de classe C^1 est *Anosov* si et seulement si il existe une décomposition continue $T_xM = \mathbf{R}V(x) \oplus E_s(x) \oplus E_u(x)$ telle que pour toute norme continue $|\cdot|$ sur TM on dispose de constantes $C, \theta > 0$ telles que

- Si $v_s \in E_s(x)$ alors $|\mathrm{d}_x\varphi^t(v_s)| \leq C\mathrm{e}^{-\theta t}|v_s|$ pour $t \geq 0$.
- Si $v_u \in E_u(x)$ alors $|\mathrm{d}_x\varphi^t(v_u)| \leq C\mathrm{e}^{-\theta|t|}|v_u|$ pour $t \leq 0$.

Les espaces E_s et E_u sont appelés respectivement espaces stable et instable.

On dispose donc d'une direction "neutre" $\mathbf{R}V$, donnée par la direction du flot, d'une direction E^s dans laquelle le flot est *contractant* (les trajectoires se rapprochent exponentiellement vite dans le futur, ou s'écartent exponentiellement vite dans le passé), et une autre direction E^u dans laquelle le flot est *expansif* (les trajectoires s'écartent exponentiellement vite dans le futur).

Remarque 2.1. On ne peut pas faire plus chaotique qu'un flot Anosov, j'entends par là que deux trajectoires ne peuvent pas diverger (dans le futur ou le passé) à vitesse sur-exponentielle. En effet, la variété M étant compacte, des estimées à la Gronwall garantissent que $\mathrm{e}^{-Ct}|v| \leq |\mathrm{d}\varphi^t v| \leq \mathrm{e}^{Ct}|v|$ pour tout $v \in TM$, peu importe le champ de vecteurs V.

Je rappelle la notion de flot ergodique

Definition 2.3. On suppose que le flot φ^t préserve une mesure μ sur M, i.e. que $\mu(\varphi^{-t}(U)) = \mu(U)$ pour toute partie mesurable U. On dit que φ^t est μ-ergodique, ou que la mesure μ est ergodique, si et seulement si pour toute partie mesurable U vérifiant $\varphi^{-t}(U) \subset U$ pour tout t, on a $\mu(U) \in \{0, 1\}$.

En gros, un système dynamique est μ ergodique s'il n'est pas décomposable en deux systèmes plus petits : la définition ci-dessus énonce en effet que tout sous-système $U \subset M$ invariant est de mesure pleine ou nulle. On montre

Proposition 2.4 (voir par exemple [Lef23, Lemma 9.3.4]). *Soit φ^t un flot Anosov sur une variété fermée M. On suppose que le flot préserve une mesure lisse μ. Alors μ est ergodique.*

L'exemple le plus important de flot Anosov est donné dans la proposition suivante.

Proposition 2.5 (Anosov). *Soit (X, g) une surface fermée à courbure strictement négative. Alors, le flot géodésique sur le fibré cotangent unitaire $S^*X := \{(x, \xi) \in T^*X,\ |\xi| = 1\}$ est Anosov. De plus, ce flot préserve la mesure de Liouville sur S^*X, définie par $\mu := \alpha \wedge \mathrm{d}\alpha$. Le flot géodésique sur S^*X est donc ergodique pour la mesure μ (et même en fait mélangeant).*

En fait, on peut montrer que toute surface admettant un flot géodésique Anosov est sans points conjugués. Mieux encore, l'ensemble des métriques Anosov sur une variété X est l'intérieur, pour la topologie C^2, de l'ensemble des métriques sans points conjugués. Je rappelle que, moralement, deux points de X sont conjugués s'ils sont (quasiment) connectés par une famille continue de géodésiques. L'exemple typique est celui de deux points antipodaux sur la sphère $\mathbf{S}^2$.

Question. *Quelles sont les quantités préservées par le flot géodésique $\varphi^t : T^*X \to T^*X$, quand X est une surface à courbure négative ?* La première réponse, évidente, est que φ^t préserve l'énergie. En fait, quand φ^t est suffisamment chaotique (en restriction aux sous-couches d'énergie), c'est la seule quantité lisse conservée. En effet, comme $\varphi^t : \Sigma_E \to \Sigma_E$ est ergodique (pour la mesure de Liouville) sur toute sous-couche d'énergie, toute fonction régulière φ^t-invariante est constante sur Σ_E. Dès lors, toute fonction invariante par le flot est simplement fonction de l'énergie.

La réponse est tout autre lorsque l'on s'intéresse à des fonctions f moins régulières (disons des distributions). Comme mentionné plus haut, la mesure de Liouville est préservée par le flot. De plus, pour toute orbite fermée γ du flot géodésique, de longueur $\ell(\gamma)$, la mesure δ_γ définie par

$$\langle \delta_\gamma, f \rangle = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_0^{\ell(\gamma)} f(\varphi^t(z))\mathrm{d}t, \qquad z \in \gamma,$$

est invariante sous l'action de φ^t (par poussé en avant). Il y a de nombreux autres exemples.

2.1.2. *Opérateur de transfert.* Quand on étudie un système chaotique, il n'est en général pas très intéressant d'étudier le comportement d'une particule individuelle, celui-ci étant par nature imprévisible, erratique. Quand le flot est ergodique pour une mesure invariante μ, il apparaît plus intéressant de suivre le mouvement d'ensemble du système, c'est-à-dire regarder l'action du flot sur une partie $U \subset M$ assez grosse (ici, de mesure $\mu(U) > 0$). Pour ce faire, on introduit un opérateur de transfert

Definition 2.6. Soit $\varphi^t : M \to M$ un flot sur une variété fermée M. On définit l'opérateur de transfert

$$(\varphi^t)^* : f \in \mathcal{C}^\infty(M) \mapsto f \circ \varphi^t \in \mathcal{C}^\infty(M),$$

qui n'est autre que l'opérateur de tiré en arrière par l'application φ^t.

2.1.3. *Dynamique intégrable.* À l'opposé des flots chaotiques, les flots *intégrables* possèdent un grand nombre de quantités conservées.

Definition 2.7. Le flot $\varphi^t : T^*X \to T^*X$ est *intégrable au sens de Liouville* si l'on dispose de fonctions lisses $I_1, \ldots, I_n$ indépendantes, conservées par le flot ; et en involution, c'est-à-dire satisfaisant

$$\{I_i, I_j\} = 0, \qquad \text{pour tous } i, j.$$

Ici, l'indépendance signifie que les différentielles $\mathrm{d}I_1, \ldots, \mathrm{d}I_n$ sont linéairement indépendantes en tout point.

Au vu de la définition, quand φ^t est intégrable, le mouvement est restreint à une sous-variété de dimension n de T^*X, déterminée par les valeurs de $I_1, \ldots, I_n$. C'est bien différent du cas ergodique, où la particule visite toute la sous-couche d'énergie Σ_E (qui est de dimension $2n-1$ lorsque $\mathrm{d}E \neq 0$ sur Σ_E.) On peut être beaucoup plus précis : un résultat de Liouville dans le cas $X = \mathbf{R}^n$, étendu par Arnold au cas de variétés symplectiques arbitraires, énonce que l'on dispose de nouvelles coordonnées *action-angle* $(I_1, \ldots, I_n, \theta^1, \ldots, \theta^n)$ dans lesquelles les équations du mouvement sont particulièrement agréables :

$$\dot{I}_j = 0, \qquad \dot{\theta}^j = \frac{\partial p}{\partial I_j}.$$

Autrement dit, en coordonnées $\big((I_j), (\theta^j)\big)$, on a simplement

$$\theta^j(t) = \theta^j(0) + \omega^j t.$$

Exemple 2.8. Un exemple évident de flot intégrable (en dimension 4) est donné par le flot géodésique sur le tore $\mathbf{T} = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ – mais en fait, c'est vrai sur tout tore plat $\mathbf{R}^2/\Gamma$ où Γ est un réseau. En coordonnées euclidiennes (x, ξ), on vérifie facilement que le flot géodésique préserve les composantes de ξ selon x et selon y.

J'insiste finalement sur le fait qu'un système physique n'est en général ni complètement intégrable, ni complètement chaotique. L'espace des phases présente le plus souvent des régions où la dynamique est régulière, et d'autres où celle-ci est un peu plus chaotique, avec tout un tas de comportement intermédiaires. On peut par exemple considérer des surfaces fermées présentant des régions où la courbure est nulle et des régions où la courbure est strictement négative.

2.2. **Un peu de dynamique quantique.** L'état d'une particule quantique libre (i.e. soumise à aucune interaction) sur une variété (X, g) est représenté par une fonction d'onde $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times X)$ dépendant du temps, et vérifiant la condition de normalisation

$$\int_M |\psi(t,x)|^2 \mathrm{d}x = 1.$$

Le module au carré de ψ représente la densité de la probabilité de présence de la particule au point x à l'instant t. L'évolution temporelle de ψ est régie par l'équation de Schrödinger

$$ih\partial_t \psi = -h^2 \Delta \psi.$$

On note $P = -h^2\Delta$, qui est un opérateur dépendant implicitement de h. Comme X est sans bord, l'opérateur P est symétrique sur $\mathcal{C}^\infty(X)$. En fait, P admet une unique extension-autoadjointe (c'est-à-dire vérifiant $P^* = P$) à $L^2(X)$, que l'on note encore P. En vertu du théorème de Stone, on dispose d'un groupe d'évolution $(U(t))_{t \in \mathbf{R}}$ où $U(t) : L^2(X) \to L^2(X)$ est un opérateur unitaire, tel que

$$-\mathrm{i}\partial_t U(t) = PU(t).$$

On note aussi $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tP} := U(t)$. De cette façon, si ψ appartient à $\mathcal{C}^\infty(X)$, alors $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tP/h}\psi$ est solution de l'équation de Schrödinger avec donnée initiale $\psi(0, \cdot) = \psi$.

2.2.1. *Retour sur l'opérateur de transfert.* En fait on peut effectuer une construction un peu similaire avec l'opérateur de transfert introduit en §2.1.2. On note V le champ de vecteurs géodésique sur S^*X. Alors V peut se voir comme un opérateur différentiel sur $\mathcal{C}^\infty(S^*X)$. Comme V préserve la mesure de Liouville μ, l'opérateur $P := \mathrm{i}V$ est symétrique sur $L^2(S^*X, \mu)$ et on peut considérer le problème d'évolution

$$-\mathrm{i}\partial_t f(t,x) = -Pf(t,x), \qquad f(0,x) = f_0(x)$$

dont la solution est donnée par $f(t,x) = f_0(\varphi^t(x))$. On écrit donc $(\varphi^t)^* = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tP}$. En fait, P n'est pas un opérateur très intéressant quand on le regarde sur $L^2(S^*X, \mu)$ tout entier : son spectre est constitué de toute la droite réelle. La théorie des espaces de Sobolev anisotropes consiste à introduire des espaces de Hilbert bien adaptés à la dynamique, sur lesquels P n'est en revanche plus auto-adjoint. On peut alors associer à P un spectre discret $\{\mu_j\}$, défini de façon intrinsèque, appelé spectre de résonances de Ruelle. Je ne développe pas plus ce point ici.

2.2.2. *Correspondance classique – quantique.* Un paquet d'onde est une fonction définie sur X, localisée à la fois en position et en fréquence, de façon à saturer le principe d'incertitude d'Heisenberg. Dans l'espace des phases, un tel paquet d'onde occupe un ensemble de mesure $\simeq h^n$. Une des incarnations de la correspondance classique-quantique est que si ψ est un paquet d'ondes localisé près de $\rho \in T^*X$, alors $U(t)\psi$ est localisé près de $\varphi^t(\rho)$ – ce résultat est connu sous le nom de Théorème d'Egorov. Si φ^t est Anosov, cette correspondance ne fonctionne bien que pour des temps logarithmiques, c'est-à-dire $t \ll |\log h|$. En effet, comme la dynamique est *Anosov*, si U est une boule de rayon $\sqrt{h}$ centrée en $\rho \in T^*X$, alors $\varphi^t(U)$ a un diamètre de l'ordre de $\mathrm{e}^{Ct}\sqrt{h}$ (bien que son volume n'ait pas changé). Du coup, si on veut que $\varphi^t(U)$ reste "centré" près de ρ, on doit naturellement se restreindre à des temps t vérifiant $\mathrm{e}^{Ct}\sqrt{h} \ll 1$, c'est-à-dire $t \ll |\log h|$.

2.3. **Intégrabilité contre chaos.** Différentes conjectures en physique prédisent le comportement statistique de la distribution des niveaux d'énergie de systèmes quantiques, selon le comportement du système classique sous-jacent.

- Le système intégrable le plus simple en dimension 2 est peut-être l'oscillateur harmonique, dont les valeurs propres sont espacées d'une valeur fixe. La variance $\Sigma^2(E, W)$ est alors nulle (dans la limite $E \to +\infty$). Néanmoins, Berry et Tabor [BT77] conjecturent que le spectre quantique d'un système intégrable *générique* se comporte comme un Processus de Poisson discret sur $\mathbf{R}_+$, avec des sauts aléatoires entre valeurs propres successives. Dans ce cas, on s'attend à ce que la variance $\Sigma^2(W)$ croisse linéairement en W, ce qui traduit une absence de rigidité du spectre. Il y a quelques résultats mathématiquement rigoureux connus, voir la note de Marklof [Mar01]. Remarquons tout de même que la conjecture de Berry–Tabor échoue pour le tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, les valeurs propres du Laplacien étant alors données, après normalisation, par les entiers m^2+n^2, comptés avec multiplicité, pour $m, n \in \mathbf{N}$. C'est dû au fait que certains entiers sont représentables de nombreuses façons différentes comme somme de deux carrés. En pratique, l'étude de la conjecture de Berry–Tabor sur les tores fait essentiellement appel à des résultats difficiles de théorie des nombres, plus qu'à des résultats dynamiques.

- Bohigas, Giannoni et Schmit ont formulé une conjecture (BGS) sur les propriétés statistiques du spectre de systèmes quantiques dont la dynamique classique sous-jacente est chaotique [BGS84]. Ils prédisent que *génériquement*, la distribution des niveaux d'énergie obéit à des statistiques universelles (indépendantes du système !) prédites par la théorie des matrices aléatoires, dans le régime des hautes énergies. Ces statistiques correspondent à celles de l'ensemble GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble) pour des systèmes invariants par renversement du temps, et l'ensemble GUE (Gaussian Unitary Ensemble sinon). Pour ces deux ensembles, la variance $\Sigma^2(E,W)$ croit linéairement en $\log W$ (bien plus lentement que dans le cas décorrélé). Berry a donné des arguments en faveur de la conjecture BGS, en exploitant la formule des traces de Gutzwiller, qui relie la distribution des niveaux d'énergie d'un système quantique, à l'ensemble des orbites fermées du système classique sous-jacent [Ber86].

Si on a des exemples de surfaces vérifiant la conjecture de Berry–Tabor, il n'y a pas d'avancées sur la conjecture de Bohigas–Giannoni–Schmit : on en connait de preuve pour le spectre d'aucune surface hyperbolique, et des contre-exemples ont même été exhibés par Luo et Sarnak [LS94], dans le cas des surfaces hyperboliques *arithmétiques*, qui exhibent de nombreuses symétries. En fait, les obstacles rencontrés pour prouver la conjecture de Bohigas–Giannoni–Schmit sont bien identifiés, j'y reviens en détail dans la section suivante.

Qu'est-ce qu'un système générique ? Les conjectures ci-dessus sont volontairement formulées de façon assez floue. En gros, on s'attend à ce qu'elles soient vérifiées pour tous les systèmes, sauf dans certains cas pathologiques. Dans la littérature physique, la discussion en reste souvent là, et on se donne un système qui vérifie des hypothèses raisonnables.

Cependant, pour être rigoureux, il faut bien à un moment fixer un ensemble de systèmes et le munir d'une mesure de probabilité. On peut alors dire qu'un résultat est vrai en un sens générique s'il est vrai avec haute probabilité, disons pour 99% des systèmes de l'ensemble (voire avec probabilité 1). L'enjeu, en un certain sens, est alors de se donner un ensemble de systèmes aussi "petit" que possible. Sarnak montre par exemple que la conjecture de Berry–Tabor est vérifiée pour presque tous les tores plats.

3. Formules de trace

Une des incarnations les plus élégantes de la correspondance quantique-classique est fournie par les formules de trace, qui relient le spectre d'un opérateur de Schrödinger aux longueurs des orbites fermées du système classique sous-jacent. Elles généralisent la formule de Poisson bien connue sur le cercle $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$: si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ alors

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(2\pi n). \tag{3.1}$$

De façon plus générale, considérons l'opérateur Laplacien *semiclassique* $-h^2\Delta_g$ sur une variété X, et notons $\lambda_j(h) = h^2\lambda_j$ ses valeurs propres. Les informations sur la suite $\{\lambda_j\}$ sont contenues dans la distribution $\sum_j \delta(\lambda - \lambda_j)$. On part de l'observation évidente, mais cruciale

$$\sum_j \delta(\lambda - \lambda_j) = \mathcal{F}\Big(\sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_j}\Big),$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier et l'égalité est à comprendre au sens des distributions sur $\mathbf{R}$. Il est tentant d'écrire

$$\sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_j} = \mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\Delta},$$

où $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\Delta}$ est le propagateur de l'équation de Schrödinger avec $h = 1$. Il faut ici donner un sens à la trace dans le membre de droite ; néanmoins cette égalité suggère que pour comprendre la distribution des valeurs propres de $h^2\Delta$, il suffit de comprendre le propagateur de l'équation de Schrödinger, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}th\Delta}$.

Les formules de trace apparaissent de façon abondante dans la littérature, d'abord dans un cadre classique [Cha74; CdV73; DG75], puis dans un cadre semiclassique [PU95; Mei92; CRR99], et sont maintenant bien connues dans le cas où l'on travaille avec des orbites de périodes bornées – voir néanmoins [Fau07; JPT07; Sch19] pour des formules de trace aux temps longs. L'outil naturel pour obtenir une formule de trace pour le propagateur $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}th\Delta}$ est l'analyse semiclassique. C'est, en gros, l'étude du comportement de l'équation Schrödinger lorsqu'on laisse la constant de Planck h tendre vers 0. L'idée est d'étudier l'action du propagateur quantique $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\Delta}$ sur des *paquets d'ondes*, localisés en position et en fréquence, de façon à saturer le principe d'incertitude. En présence d'une dynamique classique chaotique, l'évolution d'un paquet d'ondes est bien décrite par la trajectoire d'une particule classique jusqu'à des temps de l'ordre de $|\log h|$, après lesquels le paquet d'onde se délocalise.

Comme ces formules de trace sont parfois un peu compliquées, je me restreins ici au cas de l'opérateur $\sqrt{-\Delta}$ sur une variété fermée à courbure négative. Je le fais d'abord dans un souci de simplicité, mais aussi parce que l'essentiel des difficultés qui se présentent pour des opérateurs de Schrödinger quelconques sont déjà présentes dans cette situation. Dans la proposition suivante, il faut comprendre λ comme l'analogue de h^{-1}.

Proposition 3.1 (Formule des traces de Gutzwiller)**.** *Soit (X, g) une surface fermée, à courbure strictement négative. On note λ_j^2 les valeurs propres du Laplacien $-\Delta$. Soit f une fonction réelle, lisse, paire, dont la transformée de Fourier est à support compact. On introduit la fonction de comptage lissée*

$$N_f(\lambda, L) = \sum_{j\geq 0} f(L(\lambda-\lambda_j)).$$

Alors, pour $\lambda, L > 0$, on a

$$N_f(\lambda, L) = \frac{\mathrm{Aire}(X)\lambda}{L}\widehat{f}(0) + \frac{2}{L}\sum_{\gamma\in\mathcal{G}} \frac{\ell(\gamma)^\sharp \cos(\lambda\ell(\gamma))\widehat{f}(\ell(\gamma)/L)}{|\det(I-\mathcal{P}_\gamma)|^{\frac{1}{2}}} + \mathcal{O}(\lambda^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{CL}). \tag{3.2}$$

Ici, $\mathcal{G}$ désigne l'ensemble des géodésiques fermées de X. On note $\ell(\gamma)$ la longueur d'une géodésique fermée, et $\ell(\gamma)^\sharp$ la longueur de la géodésique primitive associée. On a noté $\mathcal{P}_\gamma$ l'application de Poincaré linéarisée $\mathrm{d}\varphi^{\ell(\gamma)}_{|E_s\oplus E_u}(z)$, dont la classe de conjugaison ne dépend pas du point $z\in\gamma$ (ce qui autorise à considérer sans problème le déterminant).

Remarque 3.1.

- Une géodésique γ est primitive si elle ne peut pas s'obtenir en parcourant plusieurs fois une géodésique plus courte. Toute géodésique γ s'obtient en répétant un certain nombre de fois une *unique* géodésique primitive γ_*, dont la longueur est notée γ_*.
- L'application de Poincaré linéarisée $\mathcal{P}_\gamma$ détermine le comportement du flot sur une section transverse $(E^s\oplus E^u)$ à la direction V du flot.

La fonction de comptage lissée $N_f(\lambda, L)$ compte essentiellement les valeurs propres de $\sqrt{-\Delta}$ situées dans une fenêtre centrée en λ, de largeur d'ordre $\frac{1}{L}$. Les différents termes du membre de droite de (3.2) méritent l'attention. Le premier, qui croit linéairement en $\frac{\lambda}{L}$, ne dépend que du volume de la variété considérée – et pas vraiment de sa géométrie –, et est à l'origine du terme principal dans la loi Weyl. Par exemple, si l'on restreint notre étude à l'espace des surfaces hyperboliques de genre g, ce premier terme ne dépend pas de la surface considérée !

Le second terme est une somme portant sur l'ensemble des géodésiques fermées de la surface, et contient des informations géométriques sur les orbites fermées (leurs exposants de Lyapounov notamment). Comme X est à courbure strictement négative, les déterminants $|\det(I-\mathcal{P}_\gamma)|$ décroissent exponentiellement vite avec la longueur de l'orbite, mais cette décroissance est compensée par la prolifération du nombre de géodésiques périodiques de longueur L. Cette somme oscillante représente les fluctuations de la fonction de comptage lissée autour du terme de Weyl.

Finalement, le terme d'erreur dans le membre de droite impose naturellement de se placer dans un régime de valeurs $L \le c\log\lambda$, avec c une constante assez petite.

3.0.1. *Trace bémol d'un opérateur.* J'ai parlé de la trace du propagateur $\mathrm{e}^{-ith\Delta}$ sans vraiment détailler ce que j'entendais par là. Cet opérateur n'est en effet pas un opérateur à trace, mais on peut lui donner un sens comme distribution sur $\mathbf{R}$.

Considérons un opérateur $A : \mathcal{C}^\infty(X) \to \mathcal{C}^\infty(X)$. On suppose que A s'écrit

$$Au(x) = \int_X K_A(x,y)u(y)\mathrm{d}y, \tag{3.3}$$

avec K_A une fonction lisse. Alors, de façon analogue au cas de la dimension finie, on peut définir la *trace bémol*

$$\mathrm{Tr}^\flat(A) := \int_X K_A(x,x)\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

En fait, en vertu du théorème du noyau de Schwartz, tout opérateur linéaire sur $\mathcal{C}^\infty(X)$ peut s'écrire sous la forme (3.3), pourvu qu'on accepte de remplacer K_A par une distribution sur $C^\infty(X\times X)$. Plus précisément, pour tout opérateur linéaire A, on dispose d'une distribution K_A sur $X \times X$ telle que

$$\langle Af, g\rangle = \langle K_A, f\otimes g\rangle, \qquad \text{pour toutes fonctions lisses } f \text{ et } g.$$

Cela n'a *a priori* pas de sens de considérer $K_A(x,x)$, comme K_A est une distribution. Cependant, sous de bonnes hypothèses, que je ne mentionne pas, on peut définir $K_A(x,x)$ comme une distribution sur X, et définir la trace de A de façon identique à (3.4). De façon plus précise, on définit $K_A(x,x)$ comme le tiré en arrière de K_A par le plongement $D : x \mapsto (x,x)$. Cette opération s'étend continûment de $\mathcal{C}^\infty(X\times Y)$ à un bon sous-espace de $\mathcal{D}'(X\times Y)$.

Dans le cas où on a en plus une dépendance temporelle comme dans le cas du propagateur de l'équation de Schrödinger, on définit $\mathrm{Tr}^\flat U(t)$ comme une distribution sur $\mathbf{R}$, via la formule

$$\langle \mathrm{Tr}^\flat U(t), f\rangle := \int U(t,x,x)f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Dans le cas $U(t) = \mathrm{e}^{-it\Delta}$ sur une variété Riemannienne X, cette définition coïncide avec la définition naturelle à partir des valeurs propres, c'est-à-dire qu'au sens des distributions, on a

$$\mathrm{Tr}\, U(t) = \sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_j}. \tag{3.5}$$

3.0.2. *Retour sur l'opérateur de transfert, bis.* Avec les définitions de la section précédente, on peut définir la trace de l'opérateur de transfert introduit en §2.1.2.

Proposition 3.2 (Formule de trace de Guillemin)**.** *On a l'égalité, au sens des distributions sur* $\mathbf{R}_+^*$ *(voir [Gui77]) :*

$$\mathrm{Tr}\ (\varphi^t)^* = \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} \frac{\ell(\gamma)^\sharp}{|I-\mathcal{P}_\gamma|}\delta(t-\ell(\gamma)).$$

Cette formule évoque de façon frappante le terme oscillant dans la formule 3.2.

Question. De façon analogue à (3.5), peut-on écrire $\mathrm{Tr}\ (\varphi^t)^* = \sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mu_j}$, où $\{\mu_j\}$ désigne l'ensemble des résonances de Ruelle ? En fait, la réponse n'est pas connue, mais on a des résultats partiels dû à Jin–Zworski et Jin–Tao [JZ16; JT22; JT23] : pour tout $A > 0$, on peut écrire au sens des distributions sur $\mathbf{R}_+^*$,

$$\mathrm{Tr}\ (\varphi^t)^* = \sum_{\mathrm{Im}\ \mu_j > -A} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\mu_j} + F_A,$$

avec des estimées sur le terme d'erreur F_A.

3.0.3. *Preuve de la formule de Poisson sur le tore.* Je donne ici une preuve de la formule de Poisson (3.1), dans l'esprit des formules de traces plus générales.

On considère l'opérateur de Schrödinger $P = -\mathrm{i}h\partial_x$ sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{S}^1)$. L'équation de Schrödinger s'écrit alors $\mathrm{i}h\partial_t\psi = P\psi$ soit de façon équivalente $\partial_t\psi = -\partial_x\psi$. On a donc simplement

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tP/h}\psi(x) = \psi(x-t).$$

D'autre part, on peut considérer le flot géodésique sur $\mathbf{S}^1$. Le fibré tangent unitaire $S^*\mathbf{S}^1$ s'identifie à $\mathbf{S}^1 \times \{-1,+1\}$, et, quitte à fixer une orientation, à $\mathbf{S}^1$ lui-même. Le flot géodésique agit alors sur $\mathbf{S}^1$ via la formule $\varphi^t(x) = x + t$, et l'opérateur de transfert $(\varphi^{-t})^*$ agit via la formule $f \mapsto f(\cdot - t)$, exactement comme le propagateur $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tP/h}$ ci-dessus ! En fait, sur le cercle, la correspondance classique-quantique est exacte.

Le spectre de P est l'ensemble $\{hn,\ n \in \mathbf{Z}\}$. Le membre de droite de (3.1) se récrit formellement $\mathrm{Tr}\, f(P/h)$. Maintenant, par transformation de Fourier, on a

$$f(P/h) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tP/h}\widehat{f}(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} (\varphi^{-t})^*\widehat{f}(-t)\mathrm{d}t.$$

Formellement, le noyau de Schwartz de l'opérateur $(\varphi^{-t})^*$ s'écrit $K_t(x,y) = \delta(y - \varphi^{-t}(x)) = \delta(y - (x-t))$, où δ désigne la masse de Dirac en 0 sur le cercle. Sur la diagonale, on a donc $K_t(x,x) = \delta(t)$. Comme tout réel de la forme $2n\pi$ se projette sur 0, on en déduit formellement

$$\mathrm{Tr}(\varphi^{-t})^* = \int_{\mathbf{S}^1} K_t(x,x)\mathrm{d}x = 2\pi \sum_{n\in\mathbf{Z}} \delta(t - 2n\pi).$$

Finalement, on retrouve (3.1) :

$$\mathrm{Tr}\, f(P/h) = 2\pi \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(2\pi n) = 2\pi\widehat{f}(0) + \sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} 2\pi\widehat{f}(2\pi n).$$

Le facteur 2π devant $\widehat{f}(0)$ s'interprète comme le volume de $\mathbf{S}^1$. Les nombres $2n\pi$ (avec $n \neq 0$) sont les longueurs des géodésiques fermées du cercle (on s'autorise à effectuer plusieurs rotations). Comme les deux géodésiques primitives fermées de $\mathbf{S}^1$ ont une longueur 2π, on peut enfin récrire

$$\mathrm{Tr}\, f(P/h) = \mathrm{vol}(\mathbf{S}^1)\widehat{f}(0) + \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} \ell(\gamma)^\sharp \widehat{f}(\ell(\gamma)).$$

3.1. **Étude du terme oscillant.** J'ai dit plus haut que le terme oscillant dans la formule de trace de Gutzwiller (3.2) est responsable de la structure des fluctuations de la fonction de comptage des valeurs propres lissée autour du terme de Weyl. Je veux dans cette dernière section expliquer les difficultés qui apparaissent dans l'étude de cette somme.

Je note $A_\gamma := \frac{2}{L}\frac{\ell(\gamma)^\sharp \widehat{f}(\ell(\gamma)/L)}{|\det(I-\mathcal{P}_\gamma)|^{\frac{1}{2}}}$, de sorte que le terme oscillant dans (3.2) s'écrit de façon plus compacte

$$N_{\mathrm{osc}}(\lambda, L) = \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} A_\gamma \cos(\lambda\ell(\gamma)).$$

Ainsi, les fluctuations de $N_f(\cdot, L)$ autour du terme de Weyl dans l'intervalle $[\lambda, 2\lambda]$ sont données par

$$\frac{1}{\lambda}\int_\lambda^{2\lambda} N_{\mathrm{osc}}(\mu, L)^2 \mathrm{d}\mu = \frac{1}{\lambda}\int_\lambda^{2\lambda}\Big(\sum_{\gamma,\gamma'} A_\gamma A_{\gamma'}\cos(\mu\ell(\gamma))\cos(\mu\ell(\gamma'))\Big)\mathrm{d}\mu. \tag{3.6}$$

L'intégration en la variable μ permet de se débarrasser des paires de géodésiques fermées (γ, γ') pour lesquelles $|\ell(\gamma) - \ell(\gamma')| > 1$, mais ne résout pas le problème des paires de géodésiques de longueurs proches. Berry [Ber86] a montré qu'en effectuant une approximation diagonale (c'est-à-dire en ne conservant que les paires (γ, γ') pour lesquels $\gamma' \in \{\gamma, \gamma^{-1}\}$ (je note γ^{-1} la géodésique γ parcourue dans le sens inverse), on retrouve la variance de la fonction de comptage des valeurs propres de l'ensemble GOE.

L'argument heuristique est que les paires de géodésiques distinctes doivent interférer de manière destructive les unes entre les autres dans la somme (3.6), pour ne conserver que les contributions diagonales. Cette approximation diagonale échoue de façon dramatique quand X est une surface arithmétique, auquel cas le spectre des longueurs présente de très grandes dégénérescences. De fait, on arrive à la justifier pour aucune surface.

Je présente ici quelques résultats connus sur le spectre des longueurs des géodésiques. Le premier, dû à Huber en courbure constante et à Margulis en toute généralité, est l'estimée de comptage suivante :

Proposition 3.3. *Il existe une constante $h_{\mathrm{top}} > 0$ telle que*

$$\#\{\gamma \in \mathcal{G}, \ell(\gamma) \le L\} \sim \frac{\mathrm{e}^{h_{\mathrm{top}}L}}{h_{\mathrm{top}}L}, \qquad L \to +\infty.$$

En fait, h_{top} est l'entropie topologique du flot géodésique φ^1. D'après un résultat de Manning, si x est un point du revêtement universel de X, on a

$$h_{\mathrm{top}} = \lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r}\log\mathrm{vol}(B(x,r)),$$

où $B(x, r)$ désigne la boule centrée en x, de rayon r.

La Proposition 3.3 entraîne que la somme oscillante (3.6) comprend un nombre exponentiel de termes. Si l'on s'attend à des interférences destructives entre ces différents termes, en pratique, on ne sait pas dire grand-chose. Une des raisons est que certaines surfaces exhibent des comportements "pathologiques". Mentionnons quelques résultats connus.

Definition 3.4. On dit que X admet la propriété de séparation exponentielle des longueurs (**S**) s'il existe $\nu > 0$ tel que pour toutes géodésiques $\gamma, \gamma' \in \mathcal{G}$, on a

$$\ell(\gamma) \ne \ell(\gamma') \Longrightarrow |\ell(\gamma) - \ell(\gamma')| \ge \mathrm{e}^{-\nu\max(\ell(\gamma),\ell(\gamma'))}.$$

Dolgopyat et Jakobson [DJ16] montrent qu'une variété hyperbolique X (pas forcément de dimension 2) a la propriété (**S**) dès son groupe fondamental est engendré par des éléments algébriques. Notamment, toute surface arithmétique vérifie (**S**). En courbure variable, ils montrent que (**S**) échoue de façon topologiquement générique : il existe un ensemble G_δ-dense de métriques à courbure négative sur X, telles que la propriété (**S**) échoue. Schenk [Sch20] fournit un résultat complémentaire : la propriété (**S**) est vérifiée sur un ensemble dense de métriques à courbure négative.

Le résultat de Dolgopyat–Jakobson est à mettre en regard de la proposition suivante

Proposition 3.5 (Séparation exponentielle dans l'espace des phases, voir [Sch19])**.** *Soit $\varphi^t : M \to M$ un flot Anosov sur une variété fermée M. On se donne une métrique quelconque sur M. Alors, il existe $\delta > 0$ et $\nu > 0$ tel que si γ et γ' sont deux orbites fermées distinctes de φ^t, de périodes appartenant à $[L, L+\delta]$, alors γ et γ' sont écartées d'une distance au moins égale à $\mathrm{e}^{-\nu L}$.*

4. Introduire de l'aléa

Manifestement, les techniques actuelles ne permettent pas de prouver la conjecture de Bohigas–Giannoni–Schmit. Un objectif plus modeste – mais en fait tout à fait légitime en regard du fait que la validité de la conjecture soit attendue en un sens *générique* – est d'essayer d'obtenir des résultats en moyenne, ou avec haute probabilité, sur un ensemble de systèmes. Le problème n'est pas tant de construire des modèles aléatoires – c'est facile – que d'obtenir un modèle dont les propriétés statistiques permettent de surmonter les obstacles posés lorsqu'on étudie un système individuel.

Récemment, Rudnick et Rudnick–Wigman ont obtenu des résultats pour le modèle de surfaces hyperboliques aléatoires de Weil–Petersson [Rud22; RW23b; RW23a]. Les preuves reposent sur la formule des traces de Selberg, combinée à des formules d'intégrations pour les géodésiques fermées simples, dûes à Mirzakhani et Mirzakhani–Petri [Mir07; MP17].

Naud et Maoz [Nau22; Mao23a; Mao23b] obtiennent des résultats pour le modèle de revêtements aléatoires d'une surface hyperbolique.

Une étape naturelle est d'étendre les résultats de Naud et Maoz au cas des revêtements aléatoires d'une surface à courbure négative variable. C'est l'objet du début de mon travail de thèse.

References

[Ber86] M. V. Berry. "Fluctuations in numbers of energy levels". In: *Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems*. Ed. by S. Albeverio, G. Casati, and D. Merlini. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1986, pp. 47–53. ISBN: 978-3-540-47222-3.

[BGS84] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. "Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws". In: *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984), pp. 1–4.

[BT77] M. V. Berry and M. Tabor. "Level Clustering in the Regular Spectrum". In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **356**.1686 (1977), pp. 375–394.

[CdV73] Y. Colin de Verdière. "Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. I". fre. In: *Compositio Mathematica* **27**.1 (1973), pp. 83–106.

[Cha74] J. Chazarain. "Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes." In: *Inventiones mathematicae* **24** (1974), pp. 65–82.

[CRR99] M. Combescure, J. Ralston, and D. Robert. "A Proof of the Gutzwiller Semiclassical Trace Formula Using Coherent States Decomposition". In: *Communications in Mathematical Physics* **202**.2 (1999), pp. 463–480.

[DG75] J. Duistermaat and V. Guillemin. "The Spectrum of Positive Elliptic Operators and Periodic Bicharacteristics." In: *Inventiones mathematicae* **29** (1975), pp. 39–80.

[DJ16] D. Dolgopyat and D. Jakobson. *On small gaps in the length spectrum*. 2016.

[Fau07] F. Faure. "Semi-classical formula beyond the Ehrenfest time in quantum chaos. (I) Trace formula". In: *Annales de l'institut Fourier* **57**.7 (2007), pp. 2525–2599.

[Gui77] V. Guillemin. "Lectures on spectral theory of elliptic operators". In: *Duke Mathematical Journal* **44**.3 (1977), pp. 485 –517.

[JPT07] D. Jakobson, I. Polterovich, and J. A. Toth. "A Lower Bound for the Remainder in Weyl's Law on Negatively Curved Surfaces". In: *International Mathematics Research Notices* (2007).

[JT22] L. Jin and Z. Tao. *Flat trace estimates for Anosov flows*. 2022. arXiv: 2204.02677 [math.DS].

[JT23] L. Jin and Z. Tao. *On the number of Pollicott–Ruelle resonances for Axiom A flows*. 2023. arXiv: 2306.02297 [math.DS].

[JZ16] L. Jin and M. Zworski. "A Local Trace Formula for Anosov Flows". In: *Annales Henri Poincaré* **18** (June 2016).

[Lef23] T. Lefeuvre. *Microlocal analysis in hyperbolic dynamics and geometry*. 2023. URL: https://thibaultlefeuvre.files.wordpress.com/2023/03/microlocal-analysis-in-hyperbolic-dynamics-and-geometry.pdf.

[LS94] W. Luo and P. Sarnak. "Number variance for arithmetic hyperbolic surfaces". In: *Communications in Mathematical Physics* **161**.2 (1994), pp. 419–432.

[Mao23a] Y. Maoz. *Asymptotic independence for random permutations from surface groups*. Preprint. 2023.

[Mao23b] Y. Maoz. *Smooth linear eigenvalue statistics on random covers of compact hyperbolic surfaces - A central limit theorem and almost sure RMT statistics*. Preprint. 2023.

[Mar01] J. Marklof. "The Berry-Tabor Conjecture". In: *European Congress of Mathematics*. Ed. by C. Casacuberta, R. M. Miró-Roig, J. Verdera, and S. Xambó-Descamps. Basel: Birkhäuser Basel, 2001.

[Mei92] E. Meinrenken. "Semiclassical principal symbols and Gutzwiller's trace formula". In: *Reports on Mathematical Physics* **31**.3 (1992), pp. 279–295.

[Mir07] M. Mirzakhani. "Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces". In: *Inventiones mathematicae* **167**.1 (2007), pp. 179–222.

[MP17] M. Mirzakhani and B. Petri. "Lengths of closed geodesics on random surfaces of large genus". In: *Commentarii Mathematici Helvetici* **94** (Oct. 2017).

[Nau22] F. Naud. *Random covers of compact surfaces and smooth linear spectral statistics*. 2022. arXiv: 2209.07941 [math.SP].

[Per73] I. C. Percival. "Regular and irregular spectra". In: *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics* **6**.9 (1973), p. L229.

[PU95] T. Paul and A. Uribe. "The Semi-Classical Trace Formula and Propagation of Wave Packets". In: *Journal of Functional Analysis* **132**.1 (1995), pp. 192–249.

[Rud22] Z. Rudnick. *GOE statistics on the moduli space of surfaces of large genus*. 2022. arXiv: 2202.06379 [math.SP].

[RW23a] Z. Rudnick and I. Wigman. *Almost sure GOE fluctuations of energy levels for hyperbolic surfaces of high genus*. 2023. arXiv: 2301.05964 [math.SP].

[RW23b] Z. Rudnick and I. Wigman. *On the Central Limit Theorem for linear eigenvalue statistics on random surfaces of large genus*. 2023. arXiv: 2301.00685 [math.SP].

[Sch19] E. Schenk. "Resonances near the real axis for manifolds with hyperbolic trapped sets". In: *American Journal of Mathematics* **141**.3 (2019), pp. 757–812.

[Sch20] E. Schenck. *Exponential gaps in the length spectrum*. 2020.