

Introduction au domaine de recherche Inférence Bayésienne pour le micro-pricing

ALBANET Nolan

Octobre 2024

Table des matières

Regime Switching Models	4
Algorithme E-M	5
Gibb's Sampling	6
Hierarchical, factorial, infinite HMM, etc,...	7
Market-making avec information assymétrique	8
Modèle de Glosten-Milgrom	8
Information bruitée	9
Probabilité de traders informés	9
Strategy-based models	11
Prix forward et stratégies	11
Adaptation du modèle de Das-Glosten-Milgrom	12
Attribution en A-Book et B-Book	13

Introduction

Ce document constitue mon Introduction au Domaine de Recherche tel que présenté en octobre 2024 à un jury de mathématiciens de l'École Normale Supérieure.

Il s'agit d'une simple introduction aux méthodes d'inférence bayésiennes pour le market-making en finance et, en cela, ce document ne contient aucune innovation technique. Je me contente, à vrai dire, d'y exposer quelques méthodes bayésiennes utiles dans certains cas en finances et il est important de noter que les modèles présentés ne sont pas représentatifs de l'intégralité des paysages mathématique et théorique rencontrés dans le domaine de la finance, et qu'ils sont même plutôt en marge de celui-ci. Il s'avère néanmoins que mes travaux en tant qu'analyste quantitatif m'ont conduit, à certaines occasions, à adopter une approche non-conventionnelle, presque décorrelée des postulats et principes qui sous-tendent l'analyse financière, pour pouvoir s'abstraire de leurs contraintes, jugées parfois trop lourdes et aliéantes. C'est donc un hommage à ces méthodes "batardes" que je me devais de faire dans cette introduction où il n'est ni question de calcul stochastique et de résolution d'EDP, ni des principales valeurs inscrites dans la réalité économique (taux d'intérêt, probabilité de défaut, taux d'inflation, smile de la volatilité,...).

Nous abordons, dans un premier temps, les modèles à régimes cachés adaptés à l'étude des séries temporelles rencontrées en finance. Dans la suite, il est question de l'étude des conséquences d'une information asymétrique entre traders et de l'exploitation de celle-ci par le market-maker. Enfin, la dernière partie constitue une sorte de synthèse entre les deux premières : les modèles à régimes cachés permettent d'étendre la notion d'information asymétrique à celle plus générale de stratégie "single asset", et son étude est faite dans l'optique, toujours, d'aider le market-maker à prendre ses décisions.

Aussi, j'ai tenu à incorporer deux mémoires que j'ai réalisés en binôme au cours de mes études supérieures, lesquels représentent des domaines de recherches qui auraient pu être les miens si je n'étais pas tombé, en fin de scolarité, dans ce monde des statistiques et de l'ingénierie financière qui m'accapare ces dernières années.

Regime Switching Models

Les modèles de Markov cachés (en anglais, hidden Markov models ou HMM) sont utiles lorsqu'on en vient à modéliser des séries temporelles et à vouloir expliquer leur dynamique sous-jacente. Ils sont une généralisation des mixtures gaussiennes aux séries temporelles.

Les HMM sont utilisés en finance pour exprimer l'idée que l'évolution des marchés est régie, à chaque instant, par un certain nombre d'états sous-jacent, inobservables, mais qui dictent néanmoins l'aléa de l'indice. Le meilleur exemple est celui des tendances à la hausse (bullish) ou à la baisse (bearish) durant lesquelles le marché ne suit plus un simple mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB)$$

avec μ constant, mais où, μ peut prendre différentes valeurs au cours du temps selon que le régime sous-jacent est bullish ou bearish. Dans ce cas, en supposant que la valeur spot S_t du marché est relevée tous les intervalles dt (annualisés), on observe une dynamique du spot :

$$S_{t+dt} = S_t \exp(\mu_r - \frac{1}{2}\sigma_r^2)dt + \sigma_r \sqrt{dt}x$$

où μ_r et σ_r sont respectivement le drift et la volatilité associés au régime r et x est tiré selon une normale centrée réduite.

Dans les HMM, le régime sous-jacent suit une chaîne de Markov, ce qui amène finalement à définir :

- P , de dimension $n \times n$: matrice de transition de probabilités entre les n états sous-jacents ;
- μ , de dimension $n \times 1$: vecteur des drifts associés à chaque état ;
- σ , de dimension $n \times 1$: vecteur des volatilités associées à chaque état ;
- $f(y|r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2 dt}} \exp\left(-\frac{(y - (\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2)dt)^2}{2\sigma_i^2 dt}\right)$: fonction de densité des log-returns $y = \ln\left(\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right)$;
- $q(y) = (f(y|r_i))_i$ vecteur $n \times 1$;
- $Q(y) = \text{Diag}[q(y)]$ matrice $n \times n$;
- $\xi_{t,t'} = (P(r_i^{(t')}|y^{(1)}, \dots, y^{(t)}))_i$ vecteur $n \times 1$.

L'intérêt de la modélisation est la possibilité de calculer, pour chaque régime, sa probabilité d'activation à l'instant t :

1. conditionnellement aux données passées : $\xi_{t,t}$, à chaque instant, pour synthétiser les croyances ponctuelles des utilisateurs et ainsi actualiser le spread, l'inventaire, etc,...
2. conditionnellement à toutes les données, passées et futures : $\xi_{t,T}$, à posteriori, pour analyser le marché sur le long terme et corrélérer la réalisation des régimes à d'autres indicateurs.

Pour la question de 1., dans la mesure où le spread est fonction de la volatilité et de la liquidité du marché, on peut, en première approximation choisir un spread proportionnel à la volatilité attendue et donc $\text{Spread}_t \propto \sqrt{\xi_{t,t} \cdot \sigma^{\otimes 2}}$.

Pour calculer $\xi_{t,t}$ et $\xi_{t,T}$, on implémente l'algorithme forward-backward, récursivement, à partir des formules :

$$\xi_{t,t} = \frac{Q(y^{(t)})P\xi_{t-1,t-1}}{\|Q(y^{(t)})P\xi_{t-1,t-1}\|_1}$$

(étape "forward")

$$\xi_{t,T} = \xi_{t,t} \otimes (P^\dagger(\xi_{t+1,T} \div P\xi_{t,t}))$$

(étape "backward") obtenues grâce à la loi de Bayes. Ici, \otimes et \div signifient le produit et la division terme-à-terme des vecteurs (ou de manière générale, des matrices) compatibles, $\|\cdot\|_1$ est la norme 1, \cdot^\dagger désigne la transposée de matrices et on initialise l'étape forward à $\xi_{0,0} = \zeta$ donné.

Algorithme E-M

La question se pose de l'estimation du paramètres $\theta = (P, \mu, \sigma)$ qui modélise le mieux le marché en question. En statistique fréquentiste, ou bien en l'absence d'information préalable sur θ , on va chercher l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE). Le tout revient alors à chercher $\tilde{\theta} = \text{Argmax}_\theta P((y^{(t)})_t | \theta)$.

Le problème est que l'optimisation de cette fonction en θ est compliquée analytiquement dans le cas du HMM et l'on préfère donc passer par la méthode d'expectation-maximization. L'algorithme E-M permet de trouver des maximums locaux de la fonction de vraisemblance, par un procédé itératif convergent de la variable θ . Plus précisément, on considère la suite $(\theta^k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\theta^{k+1} = \text{Argmax}_\theta E[\ln(P((y^{(t)})_t, (r^{(t)})_t | \theta)) | (y^{(t)})_t, \theta^k]$$

avec θ^0 initialisée aléatoirement, et celle-ci converge vers un maximum local de la fonction de vraisemblance. Elle fait donc intervenir la variable latente $r^{(t)}$ dans la vraisemblance ce qui simplifie énormément les calculs car la log-vraisemblance s'exprime alors :

$$\ln(P((y^{(t)})_t, (r^{(t)})_t | \theta)) = r^0 \cdot \ln(\zeta) + \sum_t (r^{(t+1)} r^{(t)\dagger}) \cdot \ln(P) + \sum_t r^{(t)} \cdot \ln(q(y^{(t)}))$$

et donc l'espérance est calculable à partir des estimées obtenues avec l'algorithme forward-backward :

$$E[\ln(P((y^{(t)})_t, (r^{(t)})_t | \theta)) | (y^{(t)})_t, \theta^k] = \xi_{0,T}^k \cdot \ln(\zeta) + \sum_t \tilde{P}^{(t)k} \cdot \ln(P) + \sum_t \xi_{t,T}^k \cdot \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi) \mathbf{1}_{n:1} - \ln(\tilde{\sigma}) - \frac{1}{2} \frac{(y^{(t)} - \tilde{\mu})^{\otimes 2}}{\tilde{\sigma}^{\otimes 2}} \right]$$

où $\tilde{P}^{(t)k} = \text{Diag}(\xi_{t+1,T}^k \div \xi_{t+1,t}^k) P^k \text{Diag}(\xi_{t,t})$, où $\mathbf{1}_{n:1}$ désigne le vecteur rempli de 1 de dimension $n : 1$, et où on a opéré le changement de variable $(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}) = ((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt, \sigma\sqrt{dt})$. Cette dernière peut être maximisée sous-contraite grâce à la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On obtient :

$$\tilde{\mu}^{k+1} = \left(\sum_{t=1}^T y^{(t)} \xi_{t,T}^k \right) \div \left(\sum_{t=1}^T \xi_{t,T}^k \right)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{k+1} &= \sqrt{\left[\sum_{t=1}^T \xi_{t,T}^k \otimes (y^{(t)} \mathbf{1}_{n:1} - \tilde{\mu}^k)^{\otimes 2} \right] \div \left[\sum_{t=1}^T \xi_{t,T}^k \right]} \\ P^{k+1} &= \left(\sum_{t=1}^T \tilde{P}^{(t)k} \right) \text{Diag} \left(1 / \sum_{t=1}^T \xi_{t-1,T}^k \right) \\ \zeta^{k+1} &= \xi_{0,T}^k\end{aligned}$$

Gibb's Sampling

Lorsque l'on dispose d'information supplémentaire sur les paramètres, en revanche, il est préférable de simuler la densité à postériori en utilisant le Gibb's sampling. C'est le cas notamment lorsque l'on veut garder la matrice P sparse.

On choisit les priors conjugués suivants :

$$\tilde{\mu}, \tilde{\sigma} \sim \text{NormalInverseGamma}(\mu_0, \nu, \alpha, \beta)$$

$$P_{1,j}, \dots, P_{n,j} \sim \text{Dirichlet}(\pi_{1,j}, \dots, \pi_{n,j})$$

pour tout j et ;

$$\zeta \sim \text{Dirichlet}(\tilde{\pi}_1, \dots, \tilde{\pi}_n)$$

De sorte que :

$$\tilde{\mu}, \tilde{\sigma} | (y^{(t)})_t, (r^{(t)})_t \sim \text{NormalInverseGamma} \left(\frac{\nu\mu + n\bar{y}}{\nu + n}, \nu + n, \alpha + \frac{n}{2}, \beta + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (y^{(t)} - \bar{y})^2 + \frac{n\nu}{\nu + n} \frac{(\bar{y} - \mu_0)^2}{2} \right)$$

$$\text{où } \bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y^{(t)} ;$$

$$P_{1,j}, \dots, P_{n,j} | (y^{(t)})_t, (r^{(t)})_t \sim \text{Dirichlet} \left(\pi_{1,j} + \sum_{t=1}^{t=T} (r^{(t)} r^{(t-1)\dagger})_{1,j}, \dots, \pi_{n,j} + \sum_{t=1}^{t=T} (r^{(t)} r^{(t-1)\dagger})_{n,j} \right)$$

pour tout j et ;

$$\zeta | (y^{(t)})_t, (r^{(t)})_t \sim \text{Dirichlet}(\tilde{\pi}_1 + r_1^{(t)}, \dots, \tilde{\pi}_n + r_n^{(t)})$$

L'algorithme de Gibb est une méthode MCMC qui consiste à générer alternativement $\theta | (r^{(t)})_t, (y^{(t)})_t$ et $(r^{(t)})_t | \theta, (y^{(t)})_t$. La distribution stationnaire associée à cette chaîne de Markov est alors celle du posterior recherché. Pour générer selon $(r^{(t)})_t | (y^{(t)})_t, \theta$, on utilise une variante de l'étape backward plus haut :

$$P(r_i^{(t)} | \theta, (y^{(t)})_t, (r^{(k)})_{k \geq t+1}) = \frac{\xi_{t,t;i} P_{j,i}}{\sum_{i=1}^n \xi_{t,t;i} P_{j,i}}$$

où j tel que $r_j^{(t+1)} = 1$ est l'état au temps $t + 1$.

Le Gibb's sampling est notamment approprié à l'étude des HMM hiérarchiques (HHMM). Les HHMM sont des HMM qui exhibent des dépendances hiérarchiques entre les états. On parle alors de sous-états, de sous-sous-états, etc,... Un sous-état ne peut transitionner que vers un autre sous-état du même groupe hiérarchique et chaque classe admet un sous-état ("terminal") qui permet de transitionner vers un autre état ou groupe hiérarchique. Le résultat est que la matrice de transition admet une structure sparse que l'on peut encoder par des densités de Dirichlet bien choisies lors de l'initialisation.

Hierarchical, factorial, infinite HMM, etc,...

De manière générale, le prix spot n'est pas la seule donnée observable et d'autres données rentrent en jeu dans l'analyse de l'évolution du prix. On peut citer des indicateurs comme le RSI, le volume tradé, l'order flow imbalance,... L'espace des observables est donc multidimensionnel et, selon les connaissances préalables sur leur distribution, on choisit de le représenter par des variables continues (gaussiennes, mixtures de gaussiennes,...) ou alors comme un espace discret fini (dans ce dernier cas, on le représente par une matrice $D \times N$ où D est le nombre d'observables et N est le nombre d'états cachés, et chaque colonne est un vecteur de probabilité). À titre d'exemple, Aditya Tayal incorpore dans [7] des données de volume et de mean-reversal à des HHMM pour étoffer ses prédictions.

Factorial HMM

Il est parfois utile de modéliser le marché comme une somme de processus à l'évolution indépendante comme c'est le cas, notamment, des différentes stratégies de trading (scalping, day-trading, swing-trading) qui présentent des échelles de temps différentes. On écrit alors le régime sous-jacent :

$$r = r_1, \dots, r_M$$

où chaque r_i est de dimension K . Et la matrice de transition respecte :

$$P(r^{(t)} | r^{(t-1)}) = \prod_{m=1}^M P(r_m^{(t)} | r_m^{(t-1)})$$

Dans le cas des observables générées en mixtures gaussiennes, on a :

$$P(Y^{(t)} | r^{(t)}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^K |C|}} e^{-\frac{1}{2}(Y^{(t)} - \mu^{(t)})^\dagger C^{-1} (Y^{(t)} - \mu^{(t)})}$$

où $\mu^{(t)} = \sum_m W_m r_m^{(t)}$ avec W_m matrices $D \times K$ des poids alloués à chaque régime.

L'estimation des paramètres est obtenue par l'algorithme E-M, de même que précédemment et l'étape d'Expectation nécessite le calcul des valeurs $E[r_m^{(t)} | (Y^{(t)})_t, \theta^k]$, $E[r_m^{(t+1)} r_m^{(t)\dagger} | (Y^{(t)})_t, \theta^k]$ et $E[r_m^{(t)} r_{m'}^{(t)\dagger} | (Y^{(t)})_t, \theta^k]$ pour tout $m, m' \in M$ $m \neq m'$. L'algorithme forward-backward est ici computationnellement inutile du fait de la dimension $K^M \gg K \times M$ du HMM. Une solution est donc d'avoir recours au Gibb's sampling pour générer la distribution $(r_m^{(t)})_{m,t} | (Y^{(t)})_t, \theta^k$.

Infinite HMM

La question se pose, lorsque l'on crée un modèle HMM, de savoir comment choisir le nombre N d'états cachés. Bien que des critères tels que AIC et BIC soient utiles à la prise de décision, Beal,

Ghahramani et Rasmussen entendent s'en passer dans [6] en créant un modèle de HMM dans lequel le nombre d'états cachés est potentiellement infini dénombrable. Le "fitting" de ce modèle sur un jeu de données permet donc, entre autres, de retrouver la meilleure représentation de N .

Market-making avec information asymétrique

Modèle de Glosten-Milgrom

Le marché consiste de traders informés (en proportion α) et non-informés (proportion $1 - \alpha$). On suppose qu'il existe à chaque instant t une valeur fondamentale du marché que l'on note $V^{(t)}$ et que la première valeur V^0 est connue des market-makers. Dans la formulation de Glosten-Milgrom, on cherche les prix Bid et Ask auxquels l'agent modélisé (le market-maker) est prêt à acheter et vendre respectivement l'actif sous-jacent.

Un trader informé achètera le sous-jacent dès lors que $V^{(t)} > Ask^{(t)}$ et le vendra lorsque $V^{(t)} < Bid^{(t)}$. Le reste du temps, il ne placera aucun ordre au marché. Un trader non-informé, quant à lui, placera un ordre d'achat et de vente avec la même probabilité η et aucun trade avec la probabilité $1 - 2\eta$.

Dans le cadre de la théorie de l'équilibre de Nash entre market-makers compétitifs et sans profit (zero-sum game), on en vient aux égalités suivantes :

$$Bid^{(t)} = E[V^{(t)} | Vente^{(t)}]$$

$$Ask^{(t)} = E[V^{(t)} | Achat^{(t)}]$$

En discrétisant l'intégrale :

$$E[V | Vente] = \int_0^\infty x P(V = x | Vente) dx$$

et en la bornant à un intervalle fini bien choisi $[V_{min}, V_{max}]$, on obtient :

$$E[V | Vente] = \sum_{V_k=V_{min}}^{V_k=V_{max}} \frac{V_k P(Vente | V = V_k) P(V = V_k)}{P(Vente)}$$

$$P(Vente) = \sum_{V_k=V_{min}}^{V_k=Bid-1} [(\alpha + (1 - \alpha)\eta)P(V = V_k)] + \sum_{V_k=Bid}^{V_k=V_{max}} [(1 - \alpha)\eta P(V = V_k)]$$

Puis,

$$Bid = \frac{1}{P(Vente)} \sum_{V_k=V_{min}}^{V_k=Bid-1} [(\alpha + (1 - \alpha)\eta)V_k P(V = V_k)] + \sum_{V_k=Bid}^{V_k=V_{max}} [(1 - \alpha)\eta V_k P(V = V_k)]$$

On obtient des formules parallèles pour $P(Achat)$ et Ask . Pour un prior $P(V = V_k)$ donné, on a $Bid < E[V] < Ask$, donc on trouve la valeur de Bid (resp. Ask) en décrémentant (resp. incrémentant) progressivement sa valeur à partir de $E[V]$ jusqu'à ce que l'égalité ci-dessus soit vérifiée.

Parallèlement, à chaque fois que l'on reçoit un ordre (ou même aucun ordre), on réactualise le prior $P(V = V_k)$ en calculant le postérieur $P(V = V^{(t)} | Action)$ où $Action = Achat, Vente$ ou $NoOrder$ à partir de la formule d'inversion de Bayes.

Information bruitée

Dans le modèle d'information bruitée tel qu'expliqué par Das dans [4], les traders informés n'ont pas tous la même information à propos de la valeur fondamentale du marché. On suppose, de ce fait, leurs croyances distribuées selon une gaussienne $N(V^{(t)}, \sigma^2)$ autour de la valeur fondamentale. Dans ce contexte,

$$P(Action|V) = P(N(0, \sigma^2) \in D_{Action}(V))$$

où $D_{Achat} = [Ask - V, +\infty]$, $D_{Vente} = [-\infty, Bid - V]$ et $D_{NoDeal} = [Bid - V, Ask - V]$, qui est donc continue en V . Ainsi, le raisonnement pour trouver Ask et Bid reste le même et les formules deviennent :

$$P(Vente) = \sum_{V_k=V_{min}}^{V_k=V_{max}} [\alpha P(N(0, \sigma^2) < (Bid - V_k)) + (1 - \alpha)\eta] P(V = V_k)$$

et,

$$Bid = \frac{1}{P(Vente)} \sum_{V_k=V_{min}}^{V_k=V_{max}} [\alpha P(N(0, \sigma^2) < (Bid - V_k)) + (1 - \alpha)\eta] V_k P(V = V_k)$$

L'update du posterior se fait de manière beaucoup plus continue que dans la version sans bruit, ce qui mène à des densités postérieures qui se concentrent autour d'un mode et à des estimées de Ask et Bid plus stables.

Probabilité de traders informés

Le problème de l'estimation du paramètre α de proportion de trades informés est majeur pour le market-maker car c'est l'assymétrie d'information distribuée entre les traders qui mène à des spreads plus ou moins élevés. Samuel Dua Oduro explicite dans [2] des méthodes bayésiennes qui permettent de calculer sa densité à postériori à partir des données du marché.

Dans le modèle, le marché a trois états possibles, selon qu'une mauvaise nouvelle, une bonne nouvelle ou pas de nouvelle soit publiée le jour même (noté t) :

$$D_t = \begin{cases} 1 & \text{mauvaise nouvelle} \\ 2 & \text{bonne nouvelle} \\ 3 & \text{pas de nouvelle} \end{cases}$$

Cette état est latent et n'est pas observable par le market-maker. On a :

$$P(D_t = 1) = \alpha\delta$$

$$P(D_t = 2) = \alpha(1 - \delta)$$

$$P(D_t = 1) = 1 - \alpha$$

où α est la probabilité d'avoir une nouvelle ce jour-là, et δ la probabilité que la nouvelle soit mauvaise.

Le nombre de trades effectués au cours de la journée par des traders non-informés est supposée suivre une distribution de Poisson de paramètre ϵ , que ce soit à la vente ou à l'achat. Le nombre de trades des traders informés suit une loi de Poisson de paramètre μ , mais uniquement dans le sens favorable au sentiment global de la journée. Autrement dit, si l'on note S_t et B_t le nombre de trades effectué auprès du market-maker à la vente et à l'achat respectivement, on a :

$$S_t | D_t = 1 \sim \text{Poisson}(\mu + \epsilon)$$

$$B_t | D_t = 1 \sim \text{Poisson}(\epsilon)$$

$$S_t | D_t = 2 \sim \text{Poisson}(\epsilon)$$

$$B_t | D_t = 2 \sim \text{Poisson}(\mu + \epsilon)$$

$$S_t | D_t = 3 \sim \text{Poisson}(\epsilon)$$

$$B_t | D_t = 3 \sim \text{Poisson}(\epsilon)$$

De sorte que la proportion de trades informés sera : $PIN = \frac{\alpha\mu}{\alpha\mu + 2\epsilon}$. On note $\theta = (\alpha, \delta, \mu, \epsilon)$ et l'on cherche à calculer la distribution à posteriori $P(\theta | S_t, B_t)$. Pour ce faire, on choisit un prior conjugué sous la forme :

$$\mu \sim \text{Gamma}(\gamma_0, \beta_0)$$

$$\epsilon \sim \text{Gamma}(\gamma_1, \beta_1)$$

$$\alpha \sim \text{Beta}(\rho, \phi)$$

$$\delta \sim \text{Beta}(\nu, \tau)$$

et on implemente l'algorithme de Metropolis-Hasting ou celui de Gibb's sampling.

Gibb's sampling : en introduisant les variables latentes (D_t) et (S_t^i) comme en première partie, on a :

$$\begin{aligned} P(\theta | B_t, S_t, D_t) &\propto P(\theta) \prod_{t=1}^T [P(B_t, S_t | D_t) P(D_t | \theta)] \\ &= \mu^{\gamma_0-1} e^{-\beta_0 \mu} \epsilon^{\gamma_1-1} e^{-\beta_1 \epsilon} \alpha^{\rho-1} (1-\alpha)^{\phi-1} \delta^{\nu-1} (1-\delta)^{\tau-1} [(\alpha\delta)^{T_1} (\alpha(1-\delta))^{T_2} (1-\alpha)^{T_3}] \\ &\times \prod_{t=1}^T \left[\frac{e^{-\mu} \mu^{S_t^i}}{S_t^i!} \frac{e^{-\epsilon} \epsilon^{B_t}}{B_t!} \frac{e^{-\epsilon} \epsilon^{S_t - S_t^i}}{(S_t - S_t^i)!} \right]^{d_1^{(t)}} \left[\frac{e^{-\mu} \mu^{B_t^i}}{B_t^i!} \frac{e^{-\epsilon} \epsilon^{S_t}}{S_t!} \frac{e^{-\epsilon} \epsilon^{B_t - B_t^i}}{(B_t - B_t^i)!} \right]^{d_2^{(t)}} \left[\frac{e^{-2\epsilon} \epsilon^{B_t + S_t}}{B_t! S_t!} \right]^{d_3^{(t)}} \end{aligned}$$

et l'algorithme de Gibb qui en découle est similaire à celui exposé en première partie.

Strategy-based models

Prix forward et stratégies

On suppose un modèle de HMM donné et son paramètre θ calibré. On cherche à calculer le prix forward et à trouver la meilleure stratégie de trading associée à cette calibration.

On définit le vecteur de prix forward $F_R^{(t)}$ tronqué au temps t , associé à l'univers R des régimes possibles, par ses composantes :

$$F_{i,R}^{(t)} = E\left[\frac{S^{(t)}}{S^{(0)}} \mid r_i^{(0)} \in R, S^{(0)}\right]$$

et on a la relation de récurrence :

$$F_R^{(t+1)\dagger} = F_R^{(t)\dagger} \tilde{Q}P$$

où $\tilde{Q} = \int_{\mathbb{R}} ye^{Q(y)} dy = \text{Diag}(e^\mu)$. D'où le vecteur de prix forward non tronqué :

$$F_R^{\infty\dagger} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{1}^\dagger (\tilde{Q}P)^t$$

Remarque : Dans le cas d'un espace des observables multi-dimensionnelles ne comprenant pas la description de la variable de spot $S^{(t)}$, le HMM n'en tient donc pas compte. Il est néanmoins possible de la réintégrer au modèle et d'obtenir une estimée de \tilde{Q} :

$$\tilde{Q} = \text{Diag}\left(\left[\sum_{t=1}^T \frac{S^{(t)}}{S^{(t-1)}} \xi_{t,T}\right] \div \left[\sum_{t=1}^T \xi_{t,T}\right]\right)$$

Le vecteur F_R^{∞} donne une estimée du gain espéré à chaque instant en achetant l'indice au temps t et en revendant à $T \gg t$ assez grand : $G_t^{\infty} = S^{(t)}(F_R^{\infty} \cdot \xi_{t,T} - 1)$.

Le trader peut néanmoins opter pour une stratégie autre que "buy and hold" pour obtenir de meilleurs rendements. Soit $(u^{(t)})$ un processus stochastique à valeur dans un ensemble U (ensemble des paramètres utilisés pour la prise de décision du trader) appelé "univers". On considère qu'une stratégie spéculative "single-asset" est un temps d'arrêt τ sur U . Il est possible de montrer qu'il existe une stratégie maximale (au sens du gain espéré) que celle-ci soit à l'achat ou à la vente et, de manière corollaire au théorème de Doob, si l'on rajoute de bonnes conditions sur τ et sur $(S^{(t)})$ (τ presque sûrement fini, $(S^{(t)})$ presque sûrement borné,...), on montre qu'une telle stratégie maximale s'exprime sous la forme :

$$\tau_D = \inf\{t \geq 0 \mid u^{(t)} \notin D\}$$

où $D \subset U$ est le domaine sur lequel le trader tient sa position. Dans le cas des HMM, l'univers sera le simplex $\mathcal{S}_n = \{(p_1, \dots, p_n) \in [0, 1]^n \mid \sum_i p_i = 1\}$.

On définit, de même que précédemment le vecteur forward associé à la stratégie τ_D :

$$F_{i,D}^{(t)} = E\left[\frac{S^{(\max(\tau_D, t))}}{S^{(0)}} \mid u_i^{(0)} \in U, S^{(0)}\right]$$

et on a, de même que précédemment, une relation de récurrence :

$$F_{i,D}^{(t+1)} = \begin{cases} (AF_D^{(t)})_i & \text{si } u_i \in D \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

où A de taille $|U| \times |U|$ est l'équivalent sur l'univers U de la matrice $(\tilde{Q}P)^\dagger$. La stratégie maximale est alors obtenue comme limite de la suite croissante :

$$D^{k+1} = \text{Support}[\max(AF_{D^k}^\infty - 1, 0)]$$

et on a : $F_{D^\infty}^\infty = \max(AF_{D^\infty}^\infty, 1)$.

Adaptation du modèle de Das-Glosten-Milgrom

On suppose données un certain nombre fini $i = 1, \dots, N$ de stratégies et on note $f_i^{(t)}(x) = P(S(\tau_i) = x | u^{(t)}, S^{(t)})$ la densité du spot en sortie de trade i , $X_i^{(t)}$ une variable aléatoire de densité $f_i^{(t)}$ et $m_i^{(t)} = E[X_i^{(t)}]$ sa moyenne (le prix forward associé à la stratégie). On introduit aussi la stratégie associée aux traders non-informés (ou l'absence de stratégie) qui consiste en la v.a. réelle $X_0^{(t)} = (1 - \eta)\delta_{S^{(t)}} + \eta N(S^{(t)}, 1)$. Contrairement à Glosten et Milgrom qui introduisent une valeur fondamentale de l'indice, indépendante des traders, nous partons plutôt du principe que ce sont les croyances des traders qui forgent l'apparition de la notion de prix. On propose donc un modèle de prix dépendant de l'allocation de chaque trader à chaque stratégie :

$$V^{(t)} = \sum_i p_i^{(t)} m_i^{(t)}$$

La réactualisation du prior se fait donc sur la densité de p , qui se fait à chaque donnée reçue :

$$P(\text{Achat}^{(t)} | p^{(t)}) = \sum_i p_i^{(t)} P(\text{Ask} < X_i^{(t)})$$

$$P(\text{Vente}^{(t)} | p^{(t)}) = \sum_i p_i^{(t)} P(X_i^{(t)} < \text{Bid})$$

$$P(\text{NoOrder}^{(t)} | p^{(t)}) = \sum_i p_i^{(t)} P(\text{Bid} \leq X_i^{(t)} \leq \text{Ask})$$

De manière générale donc, on a :

$$P(\text{Action}^{(t)} | p^{(t)}) = p^{(t)} \cdot \chi_{\text{Action}}^{(t)}$$

Et le modèle de Glosten-Milgrom s'applique pour déterminer le prix Ask (de même pour le Bid) :

$$\text{Ask} = E[V | \text{Achat}] = m \cdot E[p | \text{Achat}]$$

où l'update de p se fait sur le maillage discrétisé $M_k = \{\frac{1}{k+n}(a_1, \dots, a_n) | a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \sum_i a_i = k + n\}$ de taille $\binom{n+k-1}{n-1}$ du simplex S_n de dimension n , avec k choisi assez grand pour que la maille soit assez fine.

Dans le cas où l'on cherche la valeur de l'allocation p qui synthetise le mieux les données, on peut implémenter l'algorithme E-M avec :

$$\ln(P((Action^{(t)})_t, (R^{(t)})_t|p)) = \sum_{t,i} R_i^{(t)} [\ln(\chi_{Action,i}^{(t)}) + \ln(p_i)]$$

qui produit alors la suite d'updates convergente suivante :

$$p^{k+1} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \tilde{r}^{(t),k}$$

$$\tilde{r}^{(t),k} = E[R^{(t)}|(Action^{(t)})_t, p^k] = \frac{\chi_{Action}^{(t)} \otimes p^k}{\|\chi_{Action}^{(t)} \otimes p^k\|_1}$$

Attribution en A-Book et B-Book

Lorsqu'il en vient à gérer son inventaire, le broker peut décider d'opérer une dichotomie entre les traders jugés risqués et les autres. Le broker préférera déléguer le risque de ses traders risqués, au marché, en annulant la partie d'inventaire consacrée à ce trader. En d'autres termes, si le trader achète une certaine quantité de l'asset, le broker achètera aussi (auprès d'un tiers, un liquidity provider par exemple) et agira alors en simple intermédiaire de la transaction. On appelle cette délégation du risque le A-booking alors que dans le reste des cas, les traders sont dits en B-book. Il est important de noter que le mode de gestion de ces deux types de "book" est différent.

Seulement, la délégation des risques veut aussi parfois dire une perte de profits et on essaie d'avoir recours à ce genre de solution uniquement lorsque c'est réellement justifié et c'est pourquoi il est important de pouvoir identifier les trades "dangereux". Un même trader, selon qu'il trade à un instant ou à un autre pourra être jugé dangereux ou non. Globalement, on juge de la dangerosité d'un trade à la densité du PnL (profit and loss) attendu, et plus précisément, il s'agit de regarder la queue de cette distribution (avec des indicateurs comme la VAR, par exemple). Le problème se résume donc à la détermination la plus exacte de cette densité de probabilité.

Pour un trader donné, on note \mathcal{T} l'ensemble de temps auxquels il trade. Avec la formalisation précédente, on calcule la distribution à postériori :

$$P(p|(Action^{(t)})_t) \propto \prod_{t \in \mathcal{T}} (p \cdot \chi_{Action^{(t)}}^{(t)}) P(p)$$

Conclusion

Nous avons donc vu comment l'inférence bayésienne ainsi que des méthodes MCMC simples comme le Gibb's Sampling permettent de retrouver des information 1. sur des états cachés du marché à partir des courbes de prix du marché ainsi qu'à l'aide de différents indicateurs comme le RSI,... 2. sur le prix du sous-jacent à partir des différentes actions engagées par les traders (achat, vente) 3. sur la classification des traders en différents groupes (informés/non-informés, allocation à différentes stratégies,...).

Il est important de noter que dans le cas de :

1. , le gros du travail est celui de la construction d'un bon espace des features, c'est-à-dire, d'indicateurs cohérents avec la réalité du marché;
2. , le volume n'est pas pris en compte dans le modèle de Glosten et Milgrom ni dans celui de la PIN (probability of informed trader) de S. D. Oduro explicité plus haut. Néanmoins, des modèles existent qui les généralisent, comme par exemple le VPIN (que l'on peut retrouver aussi dans [2]);
3. , le modèle de Glosten-Milgrom peut être étendu en temps continu mais dans ce cas, et pour des raisons de convergence non voulue de la densité postérieure, il est bon de définir, en plus, une matrice de transition de probabilité sur p (ou "blurring").

Les probabilités p obtenues à partir de l'algorithme EM dans 3. peuvent servir de mesure de fitness dans des algorithmes génétiques en recherche de stratégies. En effet, les meilleurs modèles de stratégies sont ceux qui décrivent les tendances de la masse et il est donc important de cerner les croyances des traders le plus justement possible. Nous n'avons abordé le problème de l'inventaire que très brièvement or il est essentiel pour le marker-maker de savoir gérer le risque qui y est afférent. Avellaneda et Stoikov traitent de ce sujet dans [10]. L'inférence bayésienne permet aussi de traiter des problèmes plus classiques d'allocation d'actifs, dans le cadre théorique posé par Markowitz, avec, en plus, une caractérisation de l'incertitude dans estimation des paramètres (le vecteur des returns et la matrice de corrélation), lesquels modèles sont abordés dans [8] et [9].

Références

- [1] Kole Eric. *Markov switching models : An example for a stock market index*, (2019)
- [2] Samuel Dua Oduro. *Bayesian economic modelling of informed trading, bid-ask spread and volatility*, (2016)
- [3] L.R. Glosten, P.R. Milgrom. *Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders*, Journal of Financial Economics, 14 :71-100, (1985)
- [4] Das Sanmay. *A learning market-maker in the Glosten-Milgrom model*, Quantitative Finance, vol. 5, issue 2, 169-180, (2005)
- [5] Zoubin Ghahramani, Michael I. Jordan. *Factorial hidden Markov models*, Machine Learning 29, 245–273, (1997).
- [6] Matthew J. Beal, Zoubin Ghahramani, Carl Edward Rasmussen. *The infinite hidden Markov models*, Advances in Neural Information Processing Systems, MIT Press, volume 14, (2001)
- [7] Aditya Tayal. *Regime Switching and Technical Trading with Dynamic Bayesian Networks in High-Frequency Stock Markets*, (2009)
- [8] Carmine De Franco, Johann Nicolle, Huyên Pham. *Dealing with Drift Uncertainty : A Bayesian Learning Approach*, SSRN Electronic Journal, (2019)
- [9] Jacquier E., Polson N., *Bayesian methods in finance*, The Oxford handbook of Bayesian Econometrics, (2012)
- [10] Avellaneda Marco, Stoikov Sacha. *High frequency trading in a limit order book*, Quantitative Finance, (2008)

Application de la méthode des "ponts unifiants" de O. Caramello à la génération de dualités de type Stone

ALBANET Nolan et CHACHAY Victor

15 mai 2020

Table des matières

0	Introduction	3
1	Dualité de type Stone	3
1.1	Dualité de Stone	3
1.2	Dualité de Lindenbaum-Tarski	5
1.3	Dualité (équivalence) d’Alexandroff	6
1.4	Dualité de Birkhoff	7
1.5	Dualité de Andrew Moshier et Peter Jipsen	8
2	La méthode des ponts de O. Caramello	8
2.0	Intro	8
2.1	Lemme de comparaison de Grothendieck	9
2.2	Les arches du pont	13
3	Génération de dualités de type Stone	17
3.0	Passage aux topologies	17
3.1	Dualité de Stone	19
3.2	Dualité de Lindenbaum-Tarski	19
3.3	Dualité (équivalence) d’Alexandroff	21
3.4	Dualité de Andrew Moshier et Peter Jipsen	21
3.5	Dualité de Birkhoff	22
4	Appendice	23
4.1	Topologies usuelles	23
4.2	Adjonction Hom-tenseur	24
4.3	Adjonction entre topos	25
4.4	Morphismes de sites	27
4.5	Topologie sans points	29
5	Références	34

0 Introduction

Dans ce document, nous traitons de différentes dualités de type Stone. Il s'agit de trouver des équivalences et correspondances fonctorielles entre catégories. Nous explicitons dans un premier temps plusieurs exemples de dualités telles qu'elles ont été historiquement montrées, en construisant des foncteurs quasi-inverses à partir d'une intuition sur la correspondance entre catégories. Dans la suite, nous introduisons la méthode des ponts d'O. Caramello qui permet créer ce type de dualités de manière quasi-mécanique et de retrouver les cas traités en partie 1. En appendice (partie 4) se trouvent des propriétés et définitions importantes pour la compréhension préalable de certaines notions qui seront cruciales pour faire fonctionner la méthode des ponts, notamment différents exemples de topologies, des adjonctions entre topos, ainsi que les notions de morphisme de sites et de topologie sans points.

Par commodité, on travaille sur un univers \mathcal{U} fixé tout au long du papier.

1 Dualité de type Stone

On regroupe sous le nom de dualité de type Stone toute équivalence de catégories ou dualités entre des préordres et des espaces topologiques particuliers. Cette notion est toutefois assez large et peut désigner des équivalences $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ comme on le verra dans l'exemple de la dualité d'Alexandroff.

Les dualités de type Stone recouvrent une variété large de dualités entre des structures préordonnées d'une part, et certains espaces topologiques d'autre part. Ces dualités doivent être comprises comme celle entre un espace topologique sobre et sa classe des ouverts $\mathcal{O}(X)$ (Cf. 4.5).

Nous présentons ici quelques dualités qui motiveront la généralisation faite en 3.

1.1 Dualité de Stone

On note :

- *Bool* la catégorie des algèbres de Boole

- *Stone* la catégorie des espaces de Stone, i.e. la catégorie des espaces topologiques compacts totalement discontinus.

Exemple 1.1.1

Espaces de Stone

- Espaces finis discrets

- Les espaces de Cantor $\{0, 1\}^k$

Proposition 1.1.2

On a la dualité dite "dualité de Stone" suivante :

$$Bool \simeq Stone^{op}$$

Pour montrer cette dualité, on va construire des foncteurs $S : Bool \rightarrow Stone^{op}$ et $Cl : Stone^{op} \rightarrow Bool$ qui seront pseudo-inverses l'un de l'autre.

Soit A une algèbre de Boole, on note $S(A) := \text{Hom}_{Bool^{op}}(1_{Bool^{op}}, A)$ l'ensemble des morphismes d'algèbres de Boole $h : A \rightarrow \{0, 1\}$, ou encore l'ensemble des "points" de A , ou encore "espace de

Stone associé à A ". Dans un premier temps, le but est justement de montrer que c'est en effet un espace de Stone. À un tel morphisme h on associe un ultrafiltre :

$$U_h = \{a \in A \mid h(a) = 1\}$$

C'est en effet une section finissante cofiltrante de A telle que $0 \notin U_h$. De plus, elle est maximale car A est booléenne et pour tout $a \in A$, soit $h(a) = 1$, soit $h(\neg a) = \neg h(a) = \neg 0 = 1$. Réciproquement, à chaque ultrafiltre U on associe un morphisme $h_U \in S(A)$:

$$h_U(a) = 1 \text{ si et seulement si } a \in U$$

dont on vérifie qu'il est bien dans $S(A)$.

Par cette construction, l'espace des points de A peut être vu comme l'ensemble des ultrafiltres de A . C'est une analogie assez familière en topologie générale lorsque l'espace est compact. On peut donc munir $S(A)$ de la topologie usuelle sur les ultrafiltres.

On a : $S(A) \subset \{0, 1\}^A$, ce dernier étant compact d'après le théorème de Tychonoff. On montre que $S(A)$ est fermé dans $\{0, 1\}^A$ donc $S(A)$ est compact. De plus, le produit d'espaces totalement discontinus étant totalement discontinu, on obtient en particulier la totale discontinuité de $S(A)$. $S(A)$ est donc un espace de Stone.

Proposition 1.1.3

Les ouverts-fermés de $S(A)$ sont les parties de la forme $\phi_A(a) = \{h \in S(A) \mid h(a) = 1\}$ pour un certain $a \in A$.

Démonstration 1.1.4

Les ensembles $\phi_A(a)$ sont évidemment ouverts-fermés il suffit donc de montrer que ce sont les seuls. Soit F un ouvert-fermé de $S(A)$. Il existe P et P' deux parties de l'ensemble sous-jacent A telles que :

$$F = \{U \in S(A) \mid P \cap U \neq \emptyset\} = \{U \in S(A) \mid P' \cap U = \emptyset\}$$

On peut évidemment se ramener au cas où aucun élément de P n'est inutile, c'est-à-dire, pour tout $a \in P$ il existe $U \in S(A)$ tel que $a \in U$ (c'est même le cas pour toute partie P si on admet l'axiome du choix). On a donc, pour tout $a, b \in P \times P'$:

$$a \wedge b = 0$$

d'où par distributivité,

$$a \wedge \bigvee_{b \in P'} b = 0$$

On note $c = \bigwedge_{b \in P'} \neg b$ et montrons que $F = \phi_A(c)$. Soit $U \in F$, il existe $a \in P$ tel que $a \in U$. Or $a \leq c$ d'après ce qui précède donc $c \in U$ et ainsi $U \in \phi_A(c)$. Réciproquement, si U est un ultrafiltre tel que $c \in U$, alors pour tout $b \in P'$, $\neg b \in U$ ou encore $P' \cap U = \emptyset$. D'où l'égalité :

$$F = \phi_A(c)$$

et ainsi, on a montré que les ouverts-fermés de $S(A)$ sont exactement les $\phi_A(a)$ pour $a \in A$.

QED

Pour tout homomorphisme d'algèbres de Boole $f : A \rightarrow B$, on note :

$$S(f) : h \in S(B) \longrightarrow h \circ f \in S(A)$$

L'image réciproque de tout ouvert-fermé $\phi_A(a)$ par $S(f)$ est l'ouvert-fermé $\phi_B(f(a))$ de B . Les ouverts-fermés formant une base de $S(A)$, $S(f)$ est donc continue. $S : Bool \rightarrow Stone^{op}$ forme donc un foncteur contravariant de $Bool$ dans $Stone$.

Réciproquement, à tout espace de Stone X , on associe l'ensemble $Cl(X)$ de ses parties à la fois ouvertes et fermées. $Cl(X)$ est stable par réunion finie, intersection finie et négation. Il forme donc une algèbre de Boole pour les relations ensemblistes usuelles.

Pour toute application continue $F : X \rightarrow Y$, on associe l'homomorphisme d'algèbres de Boole évident :

$$Cl(F) : V \in Cl(Y) \longrightarrow F^{-1}(V) \in Cl(X)$$

$Cl : Stone \rightarrow Bool^{op}$ forme donc un foncteur contravariant de $Stone$ dans $Bool$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 1.1.2.

Démonstration 1.1.5

Montrons que Cl et S sont pseudo-inverses l'un de l'autre.

Pour tout algèbre de Boole A , l'application ϕ_A est un isomorphisme de A dans $Cl(S(A))$, d'après la propriété 1.1.3. C'est évidemment un morphisme d'algèbres de Boole. De plus, ϕ forme une transformation naturelle de l'identité dans $Cl \circ S$: pour $a \in A$ et $f : A \rightarrow B$, $\phi_B(f(a)) = \{h \in S(B) \mid h(f(a)) = 1\} = F^{-1}(\phi_A(a))$ où $F : h \rightarrow h \circ f$. Donc $Id_A \simeq Cl \circ S$.

Réciproquement, pour $x \in X$ on définit $\delta_x^X : Cl(X) \rightarrow \{0, 1\}$ par :

$$\delta_x^X(C) = 1 \text{ si et seulement si } x \in C$$

C'est évidemment un élément de $S(Cl(X))$. On définit alors l'application :

$$\delta^X : x \in X \longrightarrow \delta_x^X \in S(Cl(X))$$

Pour $C \in Cl(X)$, l'image réciproque d'un élément $\phi_{Cl(X)}(C)$ de la base d'ouvert-fermés de $S(Cl(X))$ par cette application est exactement l'ouvert-fermé C de X donc δ^X est continue. On montre qu'elle est bijective et donc que c'est un homéomorphisme puisque X est compact. De plus, δ forme une transformation naturelle de l'identité dans $S \circ Cl$: pour $x \in X$ et $f : X \rightarrow Y$, $\delta_{f(x)}^Y(C) = 1$ si et seulement si $f(x) \in C$ si et seulement si $x \in f^{-1}(C)$ si et seulement si $\delta_x^X(f^{-1}(C)) = 1$ i.e. $S(Cl(f))(\delta_x^X)(C) = 1$. Donc $Id_B \simeq S \circ Cl$.

Finalement,

$$Bool \simeq Stone^{op}$$

comme annoncé.

QED

1.2 Dualité de Lindenbaum-Tarski

On note :

- BCA la catégorie des algèbres de Boole complètes et atomiques (et morphismes complets)

Proposition 1.2.1

On a la dualité suivante de "Lindenbaum-Tarski" :

$$BCA \simeq Set^{op}$$

Démonstration 1.2.2

A tout ensemble E , on associe l'algèbre de Boole $\mathcal{P}(E)$ de ses parties qui est évidemment complète et atomique. Une fonction $f : E \rightarrow F$ s'envoie sur le morphisme d'image inverse $\mathcal{P}(f)$ qui est complet lui aussi. \mathcal{P} constitue donc un foncteur $Set \rightarrow BCA^{op}$.

A toute algèbre de Boole complète et atomique A , on associe l'ensemble $At(A)$ de ses atomes. $At(A)$ est en bijection avec $Hom_{BCA}(A, \{0, 1\})$: en effet, pour tout morphisme $h : A \rightarrow \{0, 1\}$ complet et tous atomes $a \neq b$, $h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b) = h(0) = 0$ et donc il existe au plus un atome a tel que $h(a) = 1$. Comme h est non nulle ($h(1) = 1$), il en existe exactement un. Pour tout morphisme complet $f : A \rightarrow B$, on associe une fonction :

$$\begin{aligned} At(B) &\longrightarrow At(A) \\ (\{0, 1\} \xleftarrow{\hat{a}} B) &\longmapsto (\{0, 1\} \xleftarrow{\hat{a}} B \xleftarrow{f} A) \end{aligned}$$

qui a un sens via la correspondance bijective précédente. On a donc créé un foncteur $At : BCA \rightarrow Set^{op}$.

Montrons que les foncteurs At et \mathcal{P} ainsi construits sont pseudo-inverses l'un de l'autre. Les atomes de $\mathcal{P}(X)$ pour X un ensemble sont exactement les singletons. De plus, pour $x \in X$ et $f : X \rightarrow Y$ une fonction, alors $x \in f^{-1}(\{f(x)\})$. Donc si $h : \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$ est le morphisme principal associé à x , alors $h \circ \mathcal{P}(f)$ est le morphisme associé à $f(x)$. Ainsi, $At \circ \mathcal{P} = Id_{Set}$.

Réciproquement, on considère pour tout $A \in BCA$ l'application $\phi_A : \mathcal{P}(At(A)) \rightarrow A$ qui à tout ensemble d'atomes de A , associe le sup de ses éléments dans A . Une telle application est évidemment un morphisme complet d'algèbres de Boole. De plus, elle est surjective car les atomes génèrent l'algèbre par atomicité. Elle est injective car si a_0 est un atome tel que $a_0 \leq a$ et $\bigvee a_i = a$ est une décomposition atomique de a , alors $\bigvee (a_i \wedge a_0) = a \wedge a_0 = a_0 \neq 0$ par distributivité, donc a_0 apparaît dans toutes les décompositions de a en éléments atomiques et finalement, cette décomposition est unique. Enfin, ϕ forme une transformation naturelle de $\mathcal{P} \circ At$ dans Id_{BCA} : pour tout $f : A \rightarrow B$ complet et a un atome de A , $\mathcal{P}(At(f))(\{a\}) = \{f(a)\}$ donc $\mathcal{P}(At(f))$ est la fonction "image directe" et la complétude de f permet de conclure.

QED

1.3 Dualité (équivalence) d'Alexandroff

On note :

- \mathbb{P} la catégorie des préordres
- *Alexandroff* la catégorie des espaces d'Alexandroff (espaces topologiques dans lesquels les intersections arbitraires d'ouverts sont encore des ouverts)

Proposition 1.3.1

On a l'équivalence suivante, dite "dualité d'Alexandroff" :

$$\mathbb{P} \simeq Alexandroff$$

Démonstration 1.3.2

Pour montrer cette équivalence, on va construire deux foncteurs $\mathcal{A} : \mathbb{P} \rightarrow Alexandroff$ et $Sp : Alexandroff \rightarrow \mathbb{P}$ pseudo-inverses l'un de l'autre.

A tout préordre $P = (X, \leq)$, on associe l'espace X muni de la topologie d'Alexandroff, dont les ouverts sont exactement les sections finissantes pour \leq . Un tel espace est alors évidemment un espace d'Alexandroff. De plus, tout morphisme croissant $f : P \rightarrow P'$ constitue une application continue entre les espaces $\mathcal{A}(X)$ et $\mathcal{A}(X')$, ce qui fait de $\mathcal{A} : \mathbb{P} \rightarrow Alexandroff$ un foncteur covariant.

Réciproquement, à tout espace d'Alexandroff A on associe son préordre de "spécialisation" $Sp(A)$ de sorte que $x \leq y$ si et seulement si $x \in \overline{\{y\}}$. Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue et $y \in X$, on a $f(\overline{\{y\}}) \subset \overline{\{f(y)\}}$. Donc f est croissante pour les préordres de spécialisation, ce qui fait de $Sp : Alexandroff \rightarrow \mathbb{P}$ un foncteur covariant.

Un préordre est toujours identique au préordre de spécialisation de son espace d'Alexandroff associé. En effet, si l'on note $\leq_{Sp} = Sp(\mathcal{A}(\leq))$, on a $x \not\leq_{Sp} y$ si et seulement si $x \notin \overline{\{y\}}$ si et seulement si il existe une section finissante F de \leq tel que $x \in F$ et $y \notin F$ si et seulement si $x \not\leq y$.

Pour toute topologie T , la topologie d'Alexandroff du préordre de spécialisation de T est plus fine que celle de T . En effet, pour tout ouvert U de T et deux éléments $x \in U$, $y \in T$ tels que $x \in \overline{\{y\}}$, on a $y \in U$. Ainsi, U est une section finissante pour \leq . Si de plus T est un espace d'Alexandroff, alors les deux topologies coïncident. On raisonne par contraposée : Soit $A \subset T$ non ouvert, il existe $a \in A$ tel que le plus petit ouvert contenant a (existe car T est d'Alexandroff) possède un élément $b \notin A$. Dès lors, $a \in \overline{\{b\}}$ et $a \in A$ mais $b \notin A$ donc A n'est pas une section finissante.

QED

1.4 Dualité de Birkhoff

On note :

- $FinDistLat$ la catégorie des treillis distributifs finis
- $FinPOSet$ la catégorie des ensembles partiellement ordonnés finis.

Proposition 1.4.1

On a la dualité suivante, dite "dualité de Birkhoff" :

$$FinDistLat \simeq FinPOSet^{op}$$

Pour montrer cette équivalence, on va construire deux foncteurs $Irr : FinDistLat \rightarrow FinPOSet^{op}$ et $LowSet : FinPOSet \rightarrow FinDistLat^{op}$ pseudo-inverses l'un de l'autre.

Définition 1.4.2

Un élément non nul d d'un treillis T est dit irréductible (ou sup-irréductible) si :

$$\forall a, b \in T, (a \vee b = d) \Rightarrow (a = d \text{ ou } b = d)$$

ou de manière équivalente, si d n'est pas le sup d'une famille finie d'éléments plus petits.

L'ensemble de tous les éléments irréductibles de T est noté $Irr(T)$.

Irr forme un foncteur $FinDistLat \rightarrow FinPOSet^{op}$.

Réciproquement, à chaque ensemble fini partiellement ordonné P , on associe l'ensemble fini de ses sections commençantes $LowSet(P)$ (lower set) qui est un treillis distributif pour l'inclusion, l'union et l'intersection des ensembles. Si f est une application croissante entre ensembles

finis partiellement ordonnés, alors les sections commençantes sont préservés par image inverse et cette dernière forme donc un morphisme entre les treillis correspondants. On a donc un foncteur $LowSet : FinPOSet^{op} \rightarrow FinDistLat$.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer la proposition 1.4.1 :

Démonstration 1.4.3

Montrons que $LowSet$ et Irr sont pseudo-inverses l'un de l'autre. Une transformation naturelle $\phi : LowSet \circ Irr \rightarrow Id_{FinDistLat}$ est donnée par les morphismes de treillis ϕ_T qui, à une section commençante d'éléments irréductibles de T , associe le sup de ses éléments. Soient S une section commençante d'éléments irréductibles de T et x leur sup. Si on note L la section commençante formée des éléments irréductibles inférieurs à x , alors on a $S = L$. En effet, tout élément de S est évidemment dans L , et si $l \leq x$ est un élément irréductible, alors il est inférieur à un certain élément de S par propriété d'irréductibilité, or S est une section commençante donc $l \in S$. Ainsi, ϕ_T est injective. On suppose qu'il existe $x \in T$ qui ne soit pas le sup d'éléments irréductibles et on va arriver à une absurdité. En effet, $x = a \vee b$ avec $a < x$ et $b < x$ puisqu'il n'est pas irréductible. Alors, par hypothèse a ou b n'est pas le sup d'irréductibles. On construit de cette manière une suite strictement décroissante d'éléments de T , or T est fini d'où la contradiction.

De plus, on a évidemment $Irr \circ LowSet = Id_{FinPOSet}$.

QED

1.5 Dualité de Andrew Moshier et Peter Jipsen

La dualité de Moshier et Jipsen est une équivalence fonctorielle entre les inf semi-treillis et les espaces topologiques supercompacts. C'est un exemple de dualité découverte dans un cadre étranger à la méthode des ponts et que cette dernière permet de retrouver. Nous la détaillons en partie 3.4.

2 La méthode des ponts de O. Caramello

2.0 Intro

La méthode des ponts d'Olivia Caramello, dans le cas précis des dualités de Stone, consiste en une fonctorialisation des équivalences de topos données par le lemme de comparaison de Grothendieck. Elle se décline en deux étapes principales, à savoir, l'établissement d'une équivalence de topos puis la construction des arches ou comment passer des sites aux topos et inversement.

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}) \simeq \text{Sh}(\mathcal{D}, \mathcal{K}) & \\
 \text{---} & \text{---} & \text{---} \\
 (\mathcal{C}, \mathcal{J}) & & (\mathcal{D}, \mathcal{K})
 \end{array}$$

Les équivalences de topos pour la partie centrale du pont s'obtiennent souvent via le lemme de comparaison de Grothendieck qui est présenté en partie 2.1. La partie 2.2 présente les moyens de "monter" et "descendre" les arches du pont.

2.1 Lemme de comparaison de Grothendieck

Définition 2.1.1

Une sous-catégorie \mathcal{D} dans un site $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ est dite \mathcal{J} -dense si :

- i) $\forall u \in \mathcal{C}, \exists R \in \mathcal{J}(u), R$ engendré par $\{g : V \rightarrow u, V \in \text{ob}(\mathcal{D})\}$
- ii) pour $f : u \rightarrow V \in \mathcal{C}, V \in \text{ob}(\mathcal{D})$ le crible engendré par $\{g : W \rightarrow u, fg \in \mathcal{D}\}$ est dans $\mathcal{J}(u)$

Remarque 2.1.2

En particulier, si on vérifie i) et que \mathcal{D} est pleine alors \mathcal{D} vérifie automatiquement ii)

Proposition 2.1.3

Soit \mathcal{D} une sous-catégorie de $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$. On définit une topologie $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ sur \mathcal{D} en posant, pour $D \in \mathcal{D}$ et S crible sur D dans \mathcal{D} :

S est $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ -couvrant ssi il existe R crible \mathcal{J} -couvrant sur D dans \mathcal{C} tel que $S = R \cap \text{mor}(\mathcal{D})$

On va réexprimer cette topologie en termes plus enviables dans le cas où ii) est respecté dans la définition ci-dessus :

Proposition 2.1.4

Lemme intermédiaire

Sur $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ un site, une sous-catégorie \mathcal{D} vérifiant ii) dans la définition de densité vérifie alors :

- i) un crible S sur $V \in \text{ob}(\mathcal{D})$ est $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ -couvrant ssi le crible \bar{S} de \mathcal{C} est \mathcal{J} -couvrant.
- ii) $\forall F \in \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}), F|_{\mathcal{D}} \in \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, \mathcal{J}_{\mathcal{D}})$.

Démonstration 2.1.5

1. $\Leftarrow \bar{S} \cap \text{mor}(\mathcal{D}) = S$ donc, S est $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ -couvrant comme \bar{S} est \mathcal{J} -couvrant.
 \Rightarrow Soit S $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ -couvrant sur V, R un crible \mathcal{J} -couvrant dans \mathcal{C} tel que $S = R \cap \text{mor}(\mathcal{D})$.
 Pour $f : u \rightarrow V$ dans $R, f^*(\bar{S})$ contient tous les $g : W \rightarrow u$ tels que $fg \in \text{mor}(\mathcal{D})$, par l'hypothèse ii). La transitivité assure donc que \bar{S} est \mathcal{J} -couvrant.
2. Soient $S \in \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(V)$ et $(s_f \in \text{Dom}(f) \mid f \in S)$ une famille S -compatible. i) implique \bar{S} est \mathcal{J} -couvrant donc il suffit de montrer que si on a le carré commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & & \searrow h & & \\
 & & W & \xrightarrow{g_1} & U_1 \\
 & & \downarrow g_2 & & \downarrow f_1 \\
 & & U_2 & \xrightarrow{f_2} & V
 \end{array}$$

alors $F(g_2)(s_{f_2}) = F(g_1)(s_{f_1})$.

Soit donc R engendré par $\{h : X \rightarrow W \mid g_1 h \in \mathcal{D} \wedge g_2 h \in \mathcal{D}\}$, alors $R \in \mathcal{J}(W)$ par hypothèse ii). De plus, les images sous l'action de $F(h)$ des deux éléments $s_{f_1} g_1$ et $s_{f_2} g_2$ coïncident car $(s_f)_{f \in S}$ est S -compatible. Or F est un faisceau sur $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ donc on a l'égalité voulue et $F|_{\mathcal{D}} \in \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, \mathcal{J}_{\mathcal{D}})$.

QED

Proposition 2.1.6

Lemme de comparaison de Grothendieck

Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ un site, \mathcal{C} localement petite et \mathcal{D} une petite sous-catégorie \mathcal{J} -dense dans \mathcal{C} . Alors, on a l'équivalence $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, \mathcal{J}_{\mathcal{D}})$.

Démonstration 2.1.7

Un sens est donné par la restriction à \mathcal{D} , l'autre par l'extension de Kan à droite pour les faisceaux de \mathcal{D} .

Soit $B \in \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, \mathcal{J}_{\mathcal{D}})$, pour $u \in \text{ob}(\mathcal{C})$, on note $(\mathcal{D} \downarrow u)$ la catégorie dont les objets sont les $f : V \rightarrow u, V \in \mathcal{D}$ et les morphismes $g : f \rightarrow f'$ sont les $g : \text{dom}f \rightarrow \text{dom}f' \mid f'g = f, g \in \mathcal{D}$. Comme \mathcal{D} est petite, alors $(\mathcal{D} \downarrow u)$ l'est aussi. On peut donc définir la limite :

$$A(u) = \varprojlim((\mathcal{D} \downarrow u) \rightarrow \mathcal{D}^{op} \rightarrow \text{Set})$$

du foncteur d'oubli suivi de B . On a construit l'extension de Kan à droite de B . Montrons que $A : u \mapsto A(u)$ est un faisceau du site $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$. Premièrement, A est un pré-faisceau : en effet, les flèches s'obtiennent par restriction des indices dans la limite. Pour montrer que A est un faisceau, considérons $R \in \mathcal{J}(u)$ et $\alpha : R \rightarrow A$ une famille R -compatible. Il nous faut engendrer un élément de $A(u)$, c'est à dire une famille $(x_f \in B(V) \mid f : V \rightarrow u, V \in \text{ob}(\mathcal{D}))$ $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ -compatible. Pour de tels morphismes $f, f^*(R) \cap \text{mor}(\mathcal{D}) \in \mathcal{J}_{\mathcal{D}}(V)$ par définition, et α donne une famille B -compatible par restriction à \mathcal{D} pour ce recouvrement. La propriété du faisceau B assure donc l'existence d'une famille (x_f) de la forme voulue ainsi que sa compatibilité grâce à l'unicité dans la propriété des faisceaux. Cette famille compatible (x_f) est évidemment l'unique élément de $A(u)$ qui engendre la famille R -compatible α . On a donc montré que l'extension de Kan A de B est un faisceau lorsque B est un faisceau.

La densité de \mathcal{D} assure que tout $A \in \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ est isomorphe à l'extension de Kan de sa restriction. En effet, si on se donne un élément de la limite, c'est à dire $(s_f \in B(\text{dom}f) \mid f \in (\mathcal{D} \downarrow u))$ une famille $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ -compatible ; en remontant comme pour le lemme précédent, on l'étend en une famille \mathcal{J} -compatible (par rapport au crible donné en i) dans la définition de la densité, donc d'un unique $s \in A(u)$ tel que $Af(u) = s_f$, pour tout f .

Réciproquement, soit $B \in \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, \mathcal{J}_{\mathcal{D}})$, alors $B \simeq A|_{\mathcal{D}}$ avec A son extension à droite de Kan. Dans le cas où \mathcal{D} est pleine, 1_V est alors terminal dans $(\mathcal{D} \downarrow V)$ avec $V \in \text{ob}(\mathcal{D})$, donc on a l'isomorphisme. Autrement, on se donne $(s_f \in B\text{dom}(f) \mid f \in (\mathcal{D} \downarrow V))$ famille compatible de $A(V)$. Pour tout f , les $g : X \rightarrow W$ tels que $fg \in \mathcal{D}$ induisent un crible $\mathcal{J}_{\mathcal{D}}$ -couvrant. Donc s_f est déterminé de manière unique par les s_{fg} eux-même déterminés de manière unique par s_{1_V} . Ainsi, $B(V)$ est canoniquement isomorphe à $A(V)$. Donc $A|_{\mathcal{D}}$ est un faisceau (d'après le lemme), et on a l'isomorphisme avec B .

QED

La démonstration proposée ci-dessus et les constructions que nous avons utilisées sont celles proposées dans [SE]. Nous allons maintenant voir démonstration proposée dans [SGA 4]. Cependant, pour cette démonstration, nous avons besoin des notions de morphismes couvrants et de la construction de l'adjoint à gauche $u_!$ de u^* (c.f. 4.2).

Définition 2.1.8

Morphisme couvrant

Étant donné un site $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$, un morphisme $f : H \rightarrow K$ de préfaisceaux est dit couvrant s'il satisfait les propriétés :

i) Pour tout $\mathbf{y}X \rightarrow K$, le crible image formé par le morphisme induit $H \times_K \mathbf{y}X \rightarrow \mathbf{y}X$ est couvrant sur X .

ii) Le morphisme $\underline{a}(f) : \underline{a}H \rightarrow \underline{a}K$, sur les faisceaux associés, est un épimorphisme.

ii bis) Pour tout $F \in \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$, l'application $\mathrm{Hom}(K, F) \rightarrow \mathrm{Hom}(H, F)$ déduite de f est injective.

Proposition 2.1.9

Ces propriétés sont équivalentes.

Démonstration 2.1.10

On a immédiatement ii) \iff ii bis) en utilisant l'adjonction $\underline{a} \dashv i$.

On note :

i bis) Pour tout $\mathbf{y}X \rightarrow K$, le morphisme induit $\underline{a}(\pi) : \underline{a}(H \times_K \mathbf{y}X) \rightarrow \underline{a}(\mathbf{y}X)$ est un épimorphisme.

On a i) \iff i bis).

En effet, pour $\mathbf{y}X \rightarrow K$ donné, notons R le crible dont il est question en i). On raisonne par équivalences : $\underline{a}(\pi)$ est un épimorphisme si et seulement si π est "localement surjective" ([SGA 4 § 2] ou [MM III § 7]), si et seulement si pour tout $u : Y \rightarrow X$, le crible $(v : Z \rightarrow Y \mid u \circ v \in R)$ est couvrant, i.e. $u^*(R) \in \mathcal{J}(Y)$. Finalement, cette dernière propriété est équivalente à $R \in \mathcal{J}(X)$, par transitivité et stabilité par pullback des cribles couvrants. Remarquons que la preuve reste valable si l'on remplace $H \times_K \mathbf{y}X$ par n'importe quels pré-faisceau \mathcal{P} et transformation naturelle $P \rightarrow \mathbf{y}X$ dont le crible image est couvrant.

Montrons i bis) \iff ii).

Comme le foncteur de faisceautisation commute aux limites finies, on a $\underline{a}(H \times_K \mathbf{y}X) \simeq \underline{a}(H) \times_{\underline{a}(K)} \underline{a}(\mathbf{y}X)$. On déduit $\underline{a}(\pi)$ de l'épimorphisme $\underline{a}(f)$ par changement de base. Or dans un topos, les épimorphismes sont préservés par pullback. On a donc ii) \implies i bis).

Réciproquement, on suppose i bis) vérifiée. Étant donné un faisceau G et deux morphismes $u, v : \underline{a}(K) \rightrightarrows G$ tels que $u \circ \underline{a}(f) = v \circ \underline{a}(f)$, on montre alors que $u \circ \underline{a}(\lambda) = v \circ \underline{a}(\lambda)$ pour tout $\lambda : \mathbf{y}X \rightarrow K$ puis que $u = v$ en passant à la limite inductive $K \simeq \varinjlim \mathbf{y}X_i$ (tout pré-faisceau est limite inductive de représentables).

QED

On a ainsi besoin de ne vérifier qu'une des trois propriétés de la définition pour avoir un morphisme couvrant.

Définition 2.1.11

Un morphisme $f : H \rightarrow K$ est dit bicouvrant s'il est couvrant et si le morphisme diagonal $H \rightarrow H \times_K H$ est couvrant.

Proposition 2.1.12

Soit \mathcal{C} une petite catégorie, $(\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ un site et $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur pleinement fidèle. On peut donc munir \mathcal{C} de la topologie \mathcal{J} induite par u .

Si tout objet de \mathcal{C}' peut être recouvert par des objets de \mathcal{C} , alors le foncteur $F \mapsto F \circ u$ induit une équivalence de catégorie entre les faisceaux sur $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ et ceux sur $(\mathcal{C}', \mathcal{J}')$.

La réciproque n'est vraie que si la topologie sur \mathcal{C}' est moins fine que la topologie canonique.

On note déjà des différences dans l'énoncé du lemme. On ne parle pas explicitement de densité de \mathcal{C} mais la propriété i) de recouvrement assure la densité de \mathcal{C} en tant que sous-catégorie pleine de \mathcal{C}' . On remarque aussi que les hypothèses ici sont plus fortes car on demande systématiquement la plénitude de la sous-catégorie. Néanmoins, on a ici une hypothèse plus laxte sur les catégories car u n'est pas forcément le foncteur d'inclusion, ce qui peut permettre des interprétations et utilisations plus larges.

Démonstration 2.1.13

Nous allons démontrer l'implication en deux étapes. Tout d'abord, pour H un préfaisceau sur \mathcal{C}' , on montre que le morphisme $\varphi : u_!u^*H \rightarrow H$ d'adjonction est bicouvrant (cela ne sert pas directement, mais on l'utilisera dans la seconde étape pour finir l'équivalence) et que le foncteur $u_s : \mathbf{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{J}') \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ (cf. 4.3.4) est pleinement fidèle (ce qui donnera une première partie de l'équivalence).

Soit \mathcal{C}/H la petite catégorie dont les objets sont les couples $(Y \in \mathcal{C}, \alpha : \mathbf{y}u(Y) \rightarrow H)$ et dont les morphismes sont les $\mathbf{y}u(m)$ tels que :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{y}u(Y) & \xrightarrow{\mathbf{y}u(m)} & \mathbf{y}u(Y') \\ & \searrow & \swarrow \\ & H & \end{array}$$

commute. On a $\varinjlim_{\mathcal{C}/H} \mathbf{y}Y \simeq u^*H$ (\mathcal{C}/H est petite). En effet, on construit $\eta : \varinjlim_{\mathcal{C}/H} \mathbf{y}Y \rightarrow u^*H$ à partir des transformations naturelles $\eta^\alpha : \mathbf{y}Y \rightarrow u^*H$ telles que $\eta_Z^\alpha(m : Z \rightarrow Y) = \alpha_{u(Z)}(u(m))$ pour $\alpha \in \text{Obj}(\mathcal{C}/H)$. Les η_Z pour $Z \in \mathcal{C}$ sont surjectives car pour $x \in H(u(Z))$, le lemme de Yoneda fournit un $\alpha : \mathbf{y}u(Z) \rightarrow H$ tel que $\alpha_{u(Z)}(Id_{u(Z)}) = x$ et donc la classe de (Id_Z, α) dans $\varinjlim_{(Y,\beta) \in \mathcal{C}/H} \text{Hom}(Z, Y)$ convient. Si $(m : Y \rightarrow Z, \beta : \mathbf{y}u(Y) \rightarrow H)$ est un autre antécédant de x par η_Z , alors $\beta \circ \mathbf{y}u(m) = \alpha$, donc les classes de (Id_Z, α) et (m, β) dans $\varinjlim_{(Y,\beta) \in \mathcal{C}/H} \text{Hom}(Z, Y)$ sont égales. Donc η est un isomorphisme et $\varinjlim_{\mathcal{C}/H} \mathbf{y}Y \simeq u^*H$.

Comme $u_!$ possède un adjoint à droite et que $u_!(\mathbf{y}Y) = \mathbf{y}u(Y)$, on a donc $u_!u^*H \simeq \varinjlim_{\mathcal{C}/H} \mathbf{y}(u(Y))$. Le morphisme d'adjonction est le morphisme évident qui résulte de la description de $u_!u^*H$ comme limite inductive. Le morphisme φ vérifie : pour tout $Y \in \mathcal{C}$, tout $m : u(Y) \rightarrow H$ se factorise de manière unique en le morphisme canonique $\alpha(m) : uY \rightarrow u_!u^*H$ et le morphisme φ . Il résulte de l'hypothèse i) que φ est couvrant (cf 2.1.8), montrons qu'il est aussi bicouvrant. Soient $p, q : Z \rightrightarrows u_!u^*H$ deux morphismes tels que $\varphi p = \varphi q$ et $Z \in \mathcal{C}'$. Pour tout $Y \in \mathcal{C}$ et tout $n : uY \rightarrow Z$, on a ainsi $\varphi p n = \varphi q n$. La propriété de factorisation énoncée plus haut entraîne que $p n = q n$, comme les uY recouvrent Z par hypothèse, le noyau de (p, q) est donc un crible couvrant sur Z . Le morphisme φ est donc bien bicouvrant (cf 2.1.11). Pour tout faisceau H sur \mathcal{C}' , u^*H est un faisceau sur \mathcal{C} noté $u_s H$ (cf 4.3.4). On a de plus $u^s u_s H = \underline{a}' u_! u_s H$ (4.3.7), et le morphisme d'adjonction $u^s u_s H \rightarrow H$ s'obtient en appliquant le foncteur « faisceau associé » à φ (comme H est un faisceau, il ne change pas). Comme φ est bicouvrant, sous l'action de \underline{a}' on a un isomorphisme (qui est justement $u^s u_s$). En effet, la démonstration donnée en 2.1.10 justifie de que c'est un épimorphisme, la functorialisation commute aux produit fibrés, donc le diagonal $\underline{a}'(u_!u^*H) \rightarrow \underline{a}'(u_!u^*H) \times_{\underline{a}'H} \underline{a}'(u_!u^*H)$ est un épimorphisme, or c'est toujours un monomorphisme donc on a bien l'isomorphisme voulu. Ainsi, u_s est pleinement fidèle.

On va monter que u est cocontinu et que $u^s : \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ est pleinement fidèle. Il suivra donc que $u_s : \mathbf{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{J}') \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ est une équivalence.

Soient Y objet de \mathcal{C} et $i : R \hookrightarrow u(Y)$ un crible couvrant. Comme le foncteur u^* commute aux limites projectives (adjoint à droite), le morphisme $u^*(i) : u^*R \hookrightarrow u^*uY$ est un monomorphisme. Comme u est pleinement fidèle, on a $u^*uY \simeq Y$, d'où un crible sur Y , $u^*(i) : u^*R \hookrightarrow Y$. Pour montrer que u est cocontinu, il suffit de montrer que $u^*(i)$ est un crible couvrant pour la topologie induite sur \mathcal{C} . Pour cela, on va montrer que pour tout changement de base, $m : X \rightarrow Y$, le morphisme $u_!(u^*(R) \times_Y X) \rightarrow u(X)$ est bicouvrant et ce sera suffisant pour conclure sur la bicontinuité (car c'est équivalent à dire que le crible est couvrant, chose que l'on constate – pour la réciproque – en regardant l'isomorphisme d'applications $\text{Hom}(Y, u^*F) \rightarrow \text{Hom}(R \times_X Y, u^*F) \simeq \text{Hom}(uY, F) \rightarrow \text{Hom}(u_!(R \times_X Y), F)$ dont la seconde est bijective). Comme u^* commute aux limites projectives, on a $u^*(R) \times_Y X = u^*(R \times_{u(Y)} uX)$ et $R \times_{uY} uX$ est un crible couvrant X . Il suffit donc de montrer que pour tout objet $Y \in \mathcal{C}$ et tout cribles couvrant $i : R \hookrightarrow uY$, le morphisme de \mathcal{C}' , $u_!u^*(R) \xrightarrow{u_!u^*(i)} uY$, est bicouvrant. Or ce morphisme se factorise en le morphisme d'adjonction $u_!u^*(R) \rightarrow R$, qui est bicouvrant (première étape), et le monomorphisme $R \hookrightarrow uY$ qui est couvrant. Il est donc bicouvrant. Ainsi, u est cocontinu. Comme u est continu et pleinement fidèle, il résulte donc (comme \mathcal{C} est petite) que u^s est pleinement fidèle. Comme u^s et u_s sont adjoints l'un de l'autre et sont pleinement fidèles, ils sont quasi-inverses, on a donc l'équivalence voulue.

Q.E.D

Remarque 2.1.14

La démonstration que l'on vient d'achever est plus abstraite que celle donnée dans [SE] pour 2.1.6. Dans le premier cas, nous avons construit « à la main » l'adjonction de faisceaux en utilisant l'extension de Kan à droite car nous avons une sous-catégorie. Ici, la seule donnée de u ne permettait pas de procéder ainsi et nous avons donc montré des propriétés entre les espaces des faisceaux à partir de u et de l'adjonction précédemment établie ($u_! \dashv u^*$). Nous n'avons donc qu'une construction « abstraite » de l'adjonction dans le sens où nous n'avons pas calculé explicitement les actions de $u_!$ ni u^* .

Une application naturelle et évidente est donnée par l'exemple suivant :

Exemple 2.1.15

Cas des bases topologiques

Soient un espace topologique X et B une base. Alors ;

$$\text{Sh}(X) \simeq \text{Sh}(B, \mathcal{J}_B^{can})$$

2.2 Les arches du pont

Nous allons voir des théorèmes qui permettent de construire les dualités en faisant des ponts entre les catégories et le monde des topos. Dans un premier temps, on va établir une dualité entre une certaine catégorie de préordres et une sous-catégorie de la catégorie des repères. La version du lemme de comparaison de Grothendieck qui nous sert donc en premier lieu fait intervenir les idéaux. En effet, ils vérifient des propriétés que nous retrouvons sur les sous-terminaux d'un topos et donc vont nous permettre de faire « fonctionner » le pont.

Définition 2.2.1

Idéal

Étant donné un site $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ définissant un préordre, un \mathcal{J} -idéal est un $I \subseteq \mathcal{C}$ tel que :

1. $\forall a, b \in \mathcal{C}, (b \leq a \wedge a \in I) \Rightarrow b \in I$
2. $\forall R \in \mathcal{J}(c), (\forall a \in R, a \in I) \Rightarrow c \in I$

On notera alors $\text{Id}_{\mathcal{J}}(\mathcal{C})$ l'ensemble de tous les \mathcal{J} -idéaux.

Proposition 2.2.2

$(\text{Id}_{\mathcal{J}}(\mathcal{C}), \subseteq)$ est un repère en tant que repère des sous-terminaux du topos des faisceaux et on a :

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}) \simeq \mathbf{Sh}(\text{Id}_{\mathcal{J}}(\mathcal{C}))$$

Démonstration 2.2.3

En effet, $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ est localic car \mathcal{C} est préordonné [SE], donc

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}) \simeq \mathbf{Sh}(\text{Sub}_{\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})}(1))$$

d'après 4.5.13.

QED

Avec cette équivalence toposique, nous allons pouvoir construire nos dualités de Stone :

Théorème 2.2.4

Tout morphisme de sites f (c.f. 4.4.1) induit un morphisme de repères $\dot{f} : \text{Id}_{\mathcal{J}}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D})$ si les sites $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ et $(\mathcal{D}, \mathcal{K})$ sont des préordres. On a alors le pont (donc la dualité) :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}) \simeq \mathbf{Sh}(\text{Id}_{\mathcal{J}}(\mathcal{C})) & \\
 & \mathbf{Sh}(f) \uparrow & \uparrow \\
 & \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, \mathcal{K}) \simeq \mathbf{Sh}(\text{Id}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D})) & \\
 \swarrow \text{---} & & \searrow \text{---} \\
 (\mathcal{C}, \mathcal{J}) & & \text{Id}_{\mathcal{J}}(\mathcal{C}) \\
 f \downarrow & & \downarrow \dot{f} \\
 (\mathcal{D}, \mathcal{K}) & & \text{Id}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D})
 \end{array}$$

Démonstration 2.2.5

Une grande partie du travail a déjà été vue. En effet, à partir de f , on construit le morphisme géométrique $\mathbf{Sh}(f)$ (c.f. 4.4.3) et la précédente proposition 2.2.2 donne l'équivalence toposique, et donc induit le morphisme géométrique $\mathbf{Sh}(\text{Id}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D})) \rightarrow \mathbf{Sh}(\text{Id}_{\mathcal{J}}(\mathcal{C}))$. Il ne nous reste plus qu'à redescendre du pont et à construire \dot{f} . On pose donc, pour $I \in \text{Id}_{\mathcal{J}}(\mathcal{C})$:

$$\dot{f}(I) \text{ le plus petit } \mathcal{K}\text{-idéal contenant } f(I)$$

On était assuré de son existence car le topos des faisceaux sur les idéaux est localic (car la catégorie des idéaux est un repère). En effet, comme le topos est localic, tous les objets sont limite inductives de sous-terminaux. Or $\text{Sub}(1)$ est ici identifiable à la catégorie des idéaux, donc la donnée d'un morphisme géométrique sur le repère des sous-terminaux est exactement la donnée d'un morphisme de sites sur les idéaux sous-jacents. Ainsi définie, \dot{f} est bien le morphisme de repères induit par le morphisme géométrique que l'on a construit à partir de f .

QED

Le théorème que nous venons de voir permet, à l'aide des morphismes de sites, de construire des dualités de manière contravariante sur la catégorie des topos. Nous allons avoir besoin d'une construction covariante pour passer d'un foncteur entre catégories à un morphisme géométrique entre topos des préfaisceaux. Cette construction permet de compléter la méthode d'obtention de dualités (on l'utilise notamment dans l'exemple de la dualité de Lindenbaum-Tarski cf. 3.2).

Théorème 2.2.6

Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux ensembles préordonnés, alors :

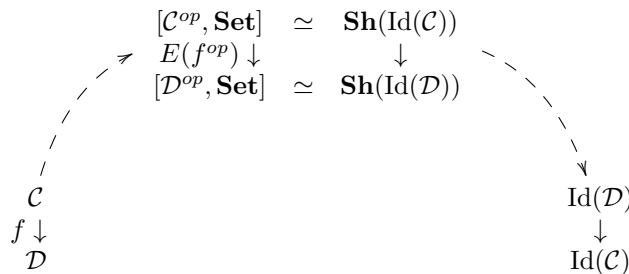
1. toute application monotone $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ induit un homomorphisme de repères $B_f : \text{Id}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Id}(\mathcal{C})$ qui envoie tout idéal I de \mathcal{D} sur l'idéal $f^{-1}(I) \in \text{Id}(\mathcal{C})$,
2. un homomorphisme de repères $F : \text{Id}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Id}(\mathcal{C})$ est de la forme B_f pour un f donné si et seulement si il préserve les inf arbitraires (i.e. il possède un adjoint à gauche $F_! : I \in \text{Id}(\mathcal{C}) \mapsto \bigcap_{I' \subseteq fF(I')} I'$),
3. si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont partiellement ordonnés, alors toute application monotone $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ peut être déterminée à partir de $(B_f)_!$ comme sa restriction aux idéaux principaux (qui déterminent les points des ensembles).

Démonstration 2.2.7

En regardant \mathcal{C} et \mathcal{D} comme des catégories, f est un foncteur et il induit $E(f) : [\mathcal{C}, \text{Set}] \rightarrow [\mathcal{C}, \text{Set}]$ qui est un morphisme géométrique essentiel (4.2.7). Pour l'extension de Kan à droite, nous n'avons pas d'hypothèse de densité ici, mais on ne cherche qu'un morphisme géométrique et non une équivalence donc elle n'est pas nécessaire. Donc $E(f)$ est constitué de l'extension de Kan à droite de f en guise d'image directe, de f^* en image réciproque et l'extension de Kan à gauche de f assure son caractère essentiel. On peut de même construire $E(f^{op}) : [\mathcal{C}^{op}, \text{Set}] \rightarrow [\mathcal{D}^{op}, \text{Set}]$ en passant aux catégories opposées. On peut alors remarquer l'équivalence donnée par le lemme de comparaison :

$$[\mathcal{C}^{op}, \text{Set}] \simeq \text{Sh}(\text{Id}(\mathcal{C}))$$

Comme dans le théorème précédent, on peut alors redescendre des topos des faisceaux sur les idéaux aux idéaux eux-même en identifiant chaque idéal au repère des sous-terminaux du topos. Il en découle de manière contravariante un homomorphisme de repères donné par l'action de l'image réciproque du morphisme géométrique sur les sous-terminaux. On obtient donc :



QED

Ces deux dernières constructions vont être essentielles pour reconstruire les différentes dualités vues en 1. Nous allons en effet les retrouver en suivant cette méthode, mais en faisant varier les topologies, les topos et les catégories principalement.

On veut vérifier maintenant sous quelles conditions il n'y a pas d'ambiguïté pour passer structures partiellement ordonnées aux repères. on cherche une Pour se faire, nous considérons κ la catégorie des structures partiellement ordonnées, **Frm** la catégorie des repères et A le foncteur :

$$\begin{aligned} A : \kappa &\rightarrow \mathbf{Frm} \\ \mathcal{C} &\mapsto \text{Id}_{\mathcal{J}}(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

où \mathcal{J} est une topologie. Les morphismes considérés dans κ sont donc les morphismes de sites. Le foncteur A est donc une équivalence de catégories sur la catégorie $\text{ExtIm}(A)$ de l'extension de son image dans \mathbf{Frm} aux objets isomorphes.

Définition 2.2.8

Soit C une propriété invariante de familles d'éléments d'un repère dans la théorie des repères (ex : être fini, être un singleton ...). Une topologie $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ sur un objet \mathcal{C} de κ est dite C -induite si :

pour toute inclusion $i : \mathcal{C} \hookrightarrow F$ $\mathcal{J}_{\text{can}}^F$ -dense et monotone, où F est un repère, telle que les $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ -recouvrements soient envoyés par i sur des recouvrements de F et que pour toute famille \mathcal{A} d'objets de \mathcal{C} , il existe un recouvrement S de $c \in \mathcal{C}$ généré par les $a \in \mathcal{A}$ tels que $a \leq c$ si et seulement si $i(\mathcal{A})$ admet un raffinement satisfaisant C dans F constitué d'éléments $i(c')$, $c' \in \mathcal{C}$ de l'image de \mathcal{C} .

Exemple 2.2.9

La topologie triviale (resp. cohérente, canonique) est induite par la propriété « être un singleton » (resp. « être finie », « être n'importe quelle famille »).

Définition 2.2.10

C -compacité

Un élément $u \in F$ d'un repère F est dit C -compact, si tout recouvrement de u dans F (au sens des repères donc) admet un raffinement satisfaisant C .

Remarque 2.2.11

Si on prend la propriété « être finie » pour les familles, on se retrouve bien dans le cas de Stone car, dans le cadre topologique, cela se traduit en « être compact ».

Théorème 2.2.12

Si toute topologie $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ associée à \mathcal{C} dans κ est C -induite et que l'invariant C satisfait que pour tout \mathcal{C} dans κ et que pour toute famille \mathcal{F} d'idéaux $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ -principaux, \mathcal{F} admet un raffinement satisfaisant C (si et) seulement si il admet un raffinement satisfaisant C constitué d'idéaux principaux, alors A admet un foncteur quasi-inverse de $\text{ExtIm}(A) \rightarrow \kappa$ qui envoie les repères F sur l'ensemble partiellement ordonné des éléments C -compacts de F , et les morphismes de repères envoyés sur les structures pour former le quasi-inverse.

Ces théorèmes sont tout le bagage dont on a besoin pour s'assurer que l'on peut toujours construire des dualités car ils assurent que, sous les bonnes hypothèses, on pourra toujours monter et descendre des équivalences toposiques et induire des morphismes entre catégories à partir de morphismes géométriques convenables.

3 Génération de dualités de type Stone

3.0 Passage aux topologies

Quand nous avons construits les arches et les dualités en 2.2, nous avons à droite des idéaux, or on voudrait pouvoir caractériser A en passant par la catégorie des espaces topologiques pour pouvoir construire nos dualités qui sont souvent avec certains types d'espaces topologiques. On voudrait :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbf{Top}^{op} \\
 & \nearrow & \downarrow \sigma \\
 A : \kappa & \longrightarrow & \mathbf{Frm}
 \end{array}$$

Si le diagramme commute, on pourra regarder indifféremment les espaces topologiques ou les repères. C'est ici que va nous servir la notion de topologie sous-terminale (cf. 3.0.4), le repère dans \mathbf{Frm} sera vu comme repère des sous-terminaux d'un topos (le topos localic des faisceaux sur les idéaux), et X sera un sous-ensemble des points du topos.

À une catégorie $\mathcal{C} \in \kappa$ munie d'une topologie \mathcal{J} , on peut donc associer l'espace topologique d'un ensemble de points séparants (i.e. les images inverses des points reflètent globalement les isomorphismes) du topos des faisceaux sur les idéaux (un tel ensemble existe car le topos alors considéré est localic et donc a assez de points m'a-t-on dit). La topologie sur cet ensemble étant celle définie en 3.0.4. Comme l'homomorphisme de repères $\phi_{\mathcal{E}}$ (ici $\mathcal{E} = \mathbf{Sh}(\text{Id}_{\mathcal{J}}(\mathcal{C}))$) est alors un isomorphisme sur son image, à l'espace topologique on associe naturellement la catégorie des idéaux sur \mathcal{C} pour la topologie \mathcal{J} qui est isomorphe à $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(1)$. Le diagramme ci-dessus est bien fonctoriel.

Avant de parler de topologie sous-terminale, nous allons d'abord remarquer la propriété suivante :

Proposition 3.0.1

Étant donné \mathcal{E} un topos, $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(1)$ (les sous-terminaux) est toujours un repère.

Démonstration 3.0.2

Tout $s \in \text{Sub}_{\mathcal{E}}(1)$, i.e. un monomorphisme $s \rightarrow 1$, est stable par pullback, donc on a les inf finis par composée des deux monos. Les sup arbitraires sont construits comme image de la somme et existent donc toujours dans un topos. La propriété de distributivité s'obtient en considérant le pullback de la factorisation épi-mono qui est préservée dans un topos (les épis sont préservés par pullbacks dans un topos).

QED

Remarque 3.0.3

La démonstration précédente est identique pour montrer que $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(e)$ forme un repère, quelque soit l'objet $e \in \mathcal{E}$.

Définition 3.0.4

Soit \mathcal{E} un topos. Pour X un ensemble et $\xi : X \rightarrow P$ un indexation des points du topos \mathcal{E} , on peut définir une topologie sur X comme l'image par le morphisme de repères $\phi_{\mathcal{E}} : \text{Sub}_{\mathcal{E}}(1) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ défini par $\phi_{\mathcal{E}}(u) = \{x \in X \mid \xi(x)^(u) \simeq 1_{\mathbf{Set}}\}$. L'image de ce morphisme est la topologie "sous-terminale" que l'on note $\tau_{\xi}^{\mathcal{E}}$ pour l'espace topologique $X_{\tau_{\xi}^{\mathcal{E}}}$.*

Remarque 3.0.5

Le morphisme $\phi_{\mathcal{E}}$ est bien un morphisme de repères car l'image inverse $\xi(x)^*$ du morphisme géométrique $\xi(x)$ préserve toutes les colimites et les limites finies. Ainsi, l'image par ce morphisme est un repère et $\tau_{\xi}^{\mathcal{E}}$ est bien une topologie sur X .

Proposition 3.0.6

Si l'ensemble des points concernés dans l'indexation ξ reflète globalement les isomorphismes, alors l'application $\phi_{\mathcal{E}}$ est injective.

Démonstration 3.0.7

En effet, considérons deux sous-terminaux u et v que l'on suppose différents. Dès lors, leur pull-back w n'est pas tel que $v = w = u$, mettons $u \neq w$. Alors, par hypothèse, il existe un point $\xi(x)$ tel que $\xi(x)^*(w) = \emptyset$ et $\xi(x)^*(u) = \{1\}$. Ainsi, $\xi(x)^*(v) = \emptyset$ car $\xi(x)^*$ préserve les pullbacks et que $\{1\} \cap \{1\} = \{1\}$.

QED

On comprend à présent pourquoi il est préférable d'avoir un choix suffisant de points pour pouvoir "séparer" les sous-terminaux. C'est ce qui motive la définition suivante ainsi que différentes caractérisations de topos avec assez de points.

Définition 3.0.8

On dit qu'un topos a assez de points les images inverses de tous ses points reflètent globalement les isomorphismes.

Proposition 3.0.9

Théorème de Deligne (Admis) Tout topos cohérent possède assez de points.

Remarque 3.0.10

La démonstration du théorème de Deligne nécessite l'utilisation de l'axiome du choix. Cependant, pour certains types de topos, on peut démontrer l'existence de suffisamment de point sans y avoir recours. C'est le cas des topos de "type préfaisceau".

Proposition 3.0.11

Tout topos de préfaisceaux possède assez de points.

Démonstration 3.0.12

Rappelons (4.2.4) que l'on a :

$$Geom(Set, [C^{op}, Set]) \simeq Flat(C, Set)$$

que l'on obtient par extension de Kan à gauche de $f^* \circ \mathbf{y}$ selon le Yoneda \mathbf{y} (le "tensorisé" – \otimes_C ($f^* \circ \mathbf{y}) \simeq f^*$). Soit u un sous-terminal de \widehat{C} différent de 1, il existe un objet C_0 tel que $u(C_0) = \emptyset$. On considère le foncteur A définit par :

$$A(C) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } Hom(C_0, C) = \emptyset \\ \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$$

La catégorie $\int A$ est évidemment cofiltrante, donc A est plat d'après 4.2.6. De plus, pour tout C tel que $u(C) = \{1\}$, on a $A(C) = \emptyset$ car dans le cas contraire, on aurait $u(C_0) = \{1\}$, ce qui n'est pas le cas. Autrement dit, on a $u \otimes_C A = \emptyset$ et donc l'ensemble des points de $[C^{op}, Set]$ reflète globalement les isomorphismes.

QED

3.1 Dualité de Stone

Avec la méthode développée en 2.2, nous allons décrire d'une nouvelle façon la dualité de Stone vue en 1.1 et la functorialiser. Pour \mathcal{B} un treillis distributif et $\mathcal{J}_{\mathcal{B}}^{coh}$ sa topologie de Grothendieck cohérente associée, on a l'équivalence toposique :

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{B}, \mathcal{J}_{\mathcal{B}}^{coh}) \simeq \mathbf{Sh}(X_{\mathcal{B}})$$

donnée par l'équivalence $\mathbf{Sh}(\mathrm{Id}_{\mathcal{J}_{\mathcal{B}}^{coh}}(\mathcal{B})) \simeq \mathbf{Sh}(X_{\mathcal{B}})$ qui découle du passage par \mathbf{Top}^{op} en fin de 2.2, $X_{\mathcal{B}}$ est donc l'espace de Stone associé à \mathcal{B} . En effet, comme le topos $\mathbf{Sh}(\mathcal{B}, \mathcal{J}_{\mathcal{B}}^{coh})$ est cohérent, il a assez de points (c.f. 3.0.9) et pour $X_{\mathcal{B}}$ on prend un indexation de tous les points du topos.

Pour functorialiser l'équivalence et avoir la dualité de Stone, il faut voir quels morphismes de treillis distributifs induisent des morphismes de sites sur les catégories munies des topologies cohérentes. En fait, ces conditions suffisent. Tout morphisme de treillis distributif est un morphisme de sites dans les catégories sous-jacentes. Les conditions des morphismes de sites se vérifient en rapellant que les morphismes sont les relations d'ordres et que la distributivité assure le caractère commutatif. Donc un morphisme de treillis distributifs induit un morphisme de sites : $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ et d'après 4.4.3 on a donc un morphisme géométrique $\mathbf{Sh}(\mathcal{B}', \mathcal{J}_{\mathcal{B}'}^{coh}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{B}, \mathcal{J}_{\mathcal{B}}^{coh})$. D'après la méthode développée en 2.2, on a la dualité :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{Sh}(\mathcal{B}, \mathcal{J}_{\mathcal{B}}^{coh}) \simeq \mathbf{Sh}(X_{\mathcal{B}}) & \\
 & \uparrow & \uparrow \\
 & \mathbf{Sh}(\mathcal{B}', \mathcal{J}_{\mathcal{B}'}^{coh}) \simeq \mathbf{Sh}(X_{\mathcal{B}'}) & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 (\mathcal{B}, \mathcal{J}_{\mathcal{B}}^{coh}) & & X_{\mathcal{B}} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathcal{B}', \mathcal{J}_{\mathcal{B}'}^{coh}) & & X_{\mathcal{B}'}
 \end{array}$$

$X_{\mathcal{B}}$ étant un espace sobre, on peut le caractériser uniquement à partir de ses ouverts donc on peut « descendre du pont » à droite sans ambiguïté (c.f. 4.5.18). De même, à gauche le site $(\mathcal{B}, \mathcal{J}_{\mathcal{B}}^{coh})$ est déterminé sans ambiguïté comme le treillis de ses sous-terminaux compacts (dont les recouvrements satisfont le critère de compacité : "être fini"). Du côté des espaces de Stone, l'application engendrée par la functorialisation est donc une application continue dont l'image inverse d'un ouvert compact est compacte (toujours pour respecter le critère de compacité : "être fini"). On a donc retrouvé notre dualité de Stone car les espaces ont donc une base d'ouverts-fermés (compacts ouverts). Cette base est équivalente au treillis distributif.

3.2 Dualité de Lindenbaum-Tarski

On va construire à nouveau la dualité de Lindenbaum-Tarski, en passant par la méthode des ponts. Pour se faire, nous allons functorialiser les équivalences de la forme :

$$[A, \mathbf{Set}] \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{P}(A))$$

où A est un ensemble quelconque, ou celles de la forme :

$$\mathbf{Sh}(\mathrm{At}(B)) \simeq \mathbf{Sh}(B)$$

où B est une algèbre booléenne atomique complète. Ces équivalences sont données par le lemme de comparaison 2.1 (pour le premier cas, on a bien les préfaisceaux car les points de A sont bien une base des parties et la topologie induite est la topologie triviale). Dans le second cas, la topologie sur les atomes étant triviale, on a l'égalité avec le topos des préfaisceaux. On passe des topos aux catégories en remarquant que B est entre autres un repère et donc identifiable aux sous-terminaux du topos, les atomes sont aussi retrouvés en regardant les sous-terminaux qui sont les idéaux principaux et donc identifiables aux atomes. On peut donc identifier les deux équivalences en considérant $\text{At}(B)$ comme l'ensemble A .

Maintenant que l'on a nos équivalences toposiques, on veut les functorialiser pour avoir des morphismes de sites et notre dualité. On sait, dans le cas général que tout morphisme géométrique ne vient pas d'un morphisme de sites.

Proposition 3.2.1

Tout morphisme géométrique $[A, \mathbf{Set}] \xrightarrow{E(f)} [B, \mathbf{Set}]$ provient d'une application entre ensembles $f : A \rightarrow B$ et donc est essentiel.

Démonstration 3.2.2

La dernière implication est immédiate d'après 4.2.7. On considère $F : [A, \mathbf{Set}] \rightarrow [B, \mathbf{Set}]$ un morphisme géométrique. On construit une application f ou, de manière équivalente, le fibré des images inverses F^* des singeltons de B (points de B) de la façon suivante : pour tout point de B , ou de manière équivalente tout représentable de $[B, \mathbf{Set}]$ l'image par F^* est un sous-terminal (i.e. une partie de A). Le $\mathbf{1}$ et les intersections de points sont préservés comme $E(f)^*$ admet un adjoint à droite et comme les intersections sont l'objet initial, elles s'envoient sur le vide. On a bien une partition de A donc une application de A dans B donnée par son image inverse.

QED

Cela implique que tout morphisme géométrique $E(f)$ est stable aux limites et colimites arbitraires, donc le morphisme de repère $B_f : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ doit préserver les inf arbitraires. On a donc la dualité suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 & [A, \mathbf{Set}] \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{P}(A)) & \\
 & \downarrow E(f) & \downarrow \\
 & [B, \mathbf{Set}] \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{P}(B)) & \\
 \begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ A \\ \downarrow f \\ B \end{array} & & \begin{array}{c} \text{---} \searrow \\ \mathcal{P}(B) \\ \downarrow B_f \\ \mathcal{P}(A) \end{array}
 \end{array}$$

qui peut aussi être interprétée entre les ensembles des atomes pour A et B et les algèbres de boole pour $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ (et c'est l'objet de la dualité). Comme on travaille avec la condition de compacité « être un singleton », on est assuré de la non-ambiguïté des caractérisations en termes d'ensembles et de repères des parties.

3.3 Dualité (équivalence) d’Alexandroff

On rappelle qu’un espace d’Alexandroff est un espace topologique dans lequel les intersections arbitraires d’ouverts sont des ouverts. Soit P un espace préordonné, on va alors considérer l’équivalence topologique suivante :

$$[P^{op}, \mathbf{Set}] \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{A}_P)$$

où \mathcal{A}_P est l’espace d’Alexandroff associé à P . En effet, pour un indexation ξ des points du topos $[P^{op}, \mathbf{Set}]$, la topologie sous-terminale associée est une topologie d’Alexandroff. Pour l’indexation des points, on veut des points essentiels. On choisit donc l’indexation correspondant aux éléments de P et montrons que cette indexation possède assez de points (pour séparer les sous-terminaux). En effet, si on prend deux sous-terminaux $u \neq v$ dans \widehat{P} , alors il diffèrent en au moins un point $p \in P$ donc le point correspondant (dont l’image inverse est l’évaluation en p , ev_p) sépare bien les sous-terminaux u et v . On définit bien de manière non-ambiguë un espace topologique dont les ouverts sont stables par intersections et unions quelconques.

On a donc :

$$\begin{array}{ccc}
 & [P^{op}, \mathbf{Set}] \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{A}_P) & \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & [P'^{op}, \mathbf{Set}] \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{A}_{P'}) & \\
 \begin{array}{c} P \\ \downarrow \\ P' \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} \mathcal{A}_{P'} \\ \downarrow \\ \mathcal{A}_P \end{array}
 \end{array}$$

car, ainsi, le morphisme entre préordres donne un morphisme essentiel (donc les intersections quelconques d’ouverts sont des ouverts) qui se traduit donc en une application continue entre espaces d’Alexandroff qui doit préserver les intersections quelconques (pour que le foncteur image réciproque commute aux limites quelconques, c’est comme pour la dualité de Lindenbaum-Tarski). D’ailleurs, on a le même critère de compacité (la topologie triviale donnant les préfaisceaux en faisceaux) donc on est aussi assuré de la non-ambiguïté de notre correspondance.

3.4 Dualité de Andrew Moshier et Peter Jipsen

La dualité de Moshier-Jipsen est entre les inf semi-treillis et les espaces topologiques super-compacts.

Définition 3.4.1

Espace super-compact Un espace topologique est dit *supercompact* s’il possède une base topologique d’ouverts supercompacte, c’est-à-dire tout recouvrement d’un élément de la base est trivial et la base est fermée pour les intersections finies.

On va donc chercher à montrer dans un premier temps l’équivalence :

$$[\mathcal{M}^{op}, \mathbf{Set}] \simeq \mathbf{Sh}(X_{\mathcal{M}})$$

dans laquelle \mathcal{M} est un inf semi-treillis et $X_{\mathcal{M}}$ un espace supercompact. En prenant en base des idéaux l'ensemble des idéaux principaux, cette base vérifie l'axiome d'inf semi-treillis par définition de \mathcal{M} , elle engendre bien l'espace et est supercompacte. L'axiome d'inf semi-treillis est ici la condition de compacité et assure cette équivalence et la construction non-ambiguë de la dualité. Pour finir de functorialiser la dualité, il reste à définir l'action sur les morphismes. Un homomorphisme d'inf semi-treillis $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ induit de manière covariante un morphisme géométrique $E(f) : [\mathcal{M}, \mathbf{Set}] \rightarrow [\mathcal{N}, \mathbf{Set}]$ et, par équivalence entre topos, sur les faisceaux d'espaces topologiques supercompacts associés. Ce morphisme provient de manière unique d'une application continue $\hat{f} : X_{\mathcal{N}} \rightarrow X_{\mathcal{M}}$. L'image inverse de \hat{f} doit en plus envoyer les ouverts supercompacts sur des ouverts supercompacts car ils forment une base et l'action de $\mathbf{Sh}(\hat{f})$ est entièrement déterminée par son action sur les bases donc il en va de même pour f . On a donc :

$$\begin{array}{ccc}
 & [\mathcal{M}^{op}, \mathbf{Set}] \simeq \mathbf{Sh}(X_{\mathcal{M}}) & \\
 & E(f^{op}) \downarrow & \downarrow \mathbf{Sh}(\hat{f}) \\
 & [\mathcal{N}^{op}, \mathbf{Set}] \simeq \mathbf{Sh}(X_{\mathcal{N}}) & \\
 \mathcal{M} & \xrightarrow{\quad} & X_{\mathcal{N}} \\
 f \downarrow & & \downarrow \hat{f} \\
 \mathcal{N} & & X_{\mathcal{M}}
 \end{array}$$

Les flèches en pointillés indiquent dans quel sens on a construit la dualité, cependant on peut bien sûr le faire dans l'autre sens et partir d'une application continue entre espaces supercompacts et les inf semi-treillis dont les points sont les ouverts supercompacts de la base topologique (On est assuré de tous les avoir car la base doit être fermée aux intersections finies).

3.5 Dualité de Birkhoff

Nous allons ici voir une version plus générale de la dualité de Birkhoff, dans le cas des treillis distributifs générés irréductiblement plutôt que celui des treillis distributifs finis.

Définition 3.5.1

Un treillis distributif est dit généré irréductiblement s'il est généré par les sup finis de ses éléments irréductibles.

Pour une catégorie \mathcal{C} décrivant un treillis distributif généré irréductiblement, le lemme de comparaison nous donne alors l'équivalence toposique suivante :

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}_{coh}) \simeq [Irr(\mathcal{C})^{op}, \mathbf{Set}]$$

par définition des treillis distributifs générés irréductiblement.

Un morphisme $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ de treillis distributifs est donc un morphisme de sites sur les sites munis des topologies cohérentes. Il permet donc de définir un morphisme géométrique $\mathbf{Sh}(f) : \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, \mathcal{K}_{coh}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}_{coh})$. Néanmoins, de l'autre côté de l'équivalence on a une catégorie de préfaisceaux, donc on voudrait un morphisme essentiel. Il faut donc prendre les homomorphismes de treillis distributifs tels que le morphisme induit sur les idéaux (construit en 2.2.4) commute

aux inf arbitraires. En descendant du pont de l'autre côté, on retrouve les ensembles partiellement ordonnés et les fonctions croissantes. Il faut que ces ensembles traduisent le fait d'être la base des éléments irréductibles de nos treillis, on impose donc que pour un tel ensemble I , pour tous $a, b \in I$ il existe une collection finie d'éléments $\{c_k, k \in K\}$ tels que pour $i \in I, i \leq a$ et $i \leq b$ si et seulement si $i \leq c_k$ pour un k dans K . Les fonctions simplement croissantes ne suffisent donc pas et on impose, pour préserver ces propriétés, que pour $f : I \rightarrow I'$ et $j \in I'$, il existe $\{a_k, k \in K\}$ un ensemble fini d'éléments de I tel que pour $i \in I, f(i) \leq j$ si et seulement si $i \leq a_k$ pour un k dans K . La dualité de Birkhoff « classique » se retrouve en restreignant les treillis aux treillis finis et donc les ensembles partiellement ordonnés avec la propriété énoncée avant aux ensembles partiellement ordonnés finis et aux applications croissantes (les propriétés étant trivialement respectées).

On a donc la dualité suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\text{coh}}) \simeq [\text{Irr}(\mathcal{C})^{\text{op}}, \text{Set}] & \\
 & \text{Sh}(f) \uparrow & \uparrow \\
 & \text{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{J}_{\mathcal{C}'}^{\text{coh}}) \simeq [\text{Irr}(\mathcal{C}')^{\text{op}}, \text{Set}] & \\
 \begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ (\mathcal{C}, \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{\text{coh}}) \\ f \downarrow \\ (\mathcal{C}', \mathcal{J}_{\mathcal{C}'}^{\text{coh}}) \end{array} & & \begin{array}{c} \searrow \text{---} \\ \text{Irr}(\mathcal{C}')^{\text{op}} \\ \downarrow \\ \text{Irr}(\mathcal{C})^{\text{op}} \end{array}
 \end{array}$$

4 Appendice

4.1 Topologies usuelles

Proposition 4.1.1

Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ un site, avec \mathcal{C} préordonné. Alors la topologie \mathcal{J} est sous-canonique si et seulement si, pour tous $c, d \in \mathcal{C}$ et tout crible $(a_j)_{j \in J} \in \mathcal{J}(c)$, on a :

$$(\forall j \in J, d \geq a_j) \Rightarrow (d \geq c)$$

Définition 4.1.2

topologie cohérente

Une topologie sur un treillis distributif \mathcal{C} est dite cohérente si tout crible sur un objet d de \mathcal{C} est généré par une famille finie d_i vérifiant $d = \bigvee d_i$.

Remarque 4.1.3

On a besoin que le treillis soit distributif pour assurer la stabilité par pullback.

Définition 4.1.4

La topologie \mathcal{J} sur une catégorie \mathcal{C} est la topologie triviale si pour tout objet c , le seul crible de $\mathcal{J}(c)$ est le crible maximal.

Définition 4.1.5

La topologie canonique d'une catégorie est la plus grande topologie sous-canonique (i.e. la plus grande telle que tout représentable soit un faisceau).

Proposition 4.1.6

Sur un repère, la topologie \mathcal{J} est canonique si les recouvrements sont ceux engendrés par les sup arbitraires. C'est-à-dire :

$$\{d_i \rightarrow d\} \in \mathcal{J}(c) \iff (\bigvee d_i = d)$$

4.2 Adjonction Hom-tenseur

Nous nous limitons ici au cas des faisceaux d'ensembles, mais une généralisation à d'autres catégories d'arrivée existe. Rappelons une propriété bien connue qui permet, entre autres, de montrer que tout préfaisceau est colimite de représentables.

Proposition 4.2.1

Soient \mathcal{E} une catégorie cocomplète, \mathcal{C} une petite catégorie et $A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ un foncteur. On note $R : \mathcal{E} \rightarrow \text{Ens}^{\mathcal{C}^{op}}$ le foncteur défini, pour $E \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{C}$ par :

$$R(E)(C) = \text{Hom}(A(C), E)$$

Alors, R admet un adjoint à gauche que l'on note L et définit par :

$$L(P) = \varinjlim (P \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E})$$

Usuellement, on note $R(E) =: \underline{\text{Hom}}(A, E)$ et $L(P) =: P \otimes_{\mathcal{C}} A$. La proposition précédente peut donc être reformulée par l'équivalence :

$$\text{Hom}_{\mathcal{E}}(P \otimes_{\mathcal{C}} A, E) \simeq \text{Hom}_{\text{Ens}^{\mathcal{C}^{op}}}(P, \underline{\text{Hom}}(A, E))$$

naturelle en P et E .

On applique la proposition 4.2.1 au cas $\mathcal{E} = \text{Ens}^{\mathcal{D}^{op}}$, où \mathcal{D} est petite (la catégorie \mathcal{E} est alors évidemment cocomplète). On obtient :

Proposition 4.2.2

Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} des petites catégories, et $A : \mathcal{C} \times \mathcal{D}^{op} \rightarrow \text{Ens}$ un foncteur. Alors, on a l'équivalence suivante :

$$\text{Hom}_{\text{Ens}^{\mathcal{D}^{op}}}(P \otimes_{\mathcal{C}} A, Q) \simeq \text{Hom}_{\text{Ens}^{\mathcal{C}^{op}}}(P, \underline{\text{Hom}}(A, Q))$$

où on a noté abusivement A pour $\tilde{A} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}^{\mathcal{D}^{op}}$ qui lui est associée par exponentielle dans la catégorie des catégories et foncteurs.

Définition 4.2.3

Les foncteurs A tels que $- \otimes_{\mathcal{C}} A$ est exact à gauche sont dits "plats". De tels foncteurs induisent donc, par définition, un morphisme géométrique $\mathcal{E} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$.

Une caractérisation des morphismes géométriques d'un topos \mathcal{E} dans un topos de préfaisceaux est donné par la proposition suivante :

Proposition 4.2.4

Soit \mathcal{E} un topos et \mathcal{C} une petite catégorie. Alors, on a l'équivalence :

$$\text{Geom}(\mathcal{E}, [\mathcal{C}^{op}, \text{Set}]) \simeq \text{Flat}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$$

Démonstration 4.2.5

Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow [\mathcal{C}^{op}, Set]$ un morphisme géométrique. Alors, $A = f^* \circ y$ est un foncteur de \mathcal{C} dans \mathcal{E} . On montre que $- \otimes_{\mathcal{C}} A \simeq f^*$ et donc que A est plat. De plus, pour tout foncteur $A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$, on a $(- \otimes_{\mathcal{C}} A) \circ y \simeq A$ donc on a bien l'équivalence recherchée.

QED

Ce qui donne lieu à une caractérisation des foncteurs plats à valeurs dans Set [MM VII] :

Proposition 4.2.6

Un foncteur $A : \mathcal{C} \rightarrow Set$ est plat si et seulement si la catégorie de ses éléments $\int A$ est cofiltrante i.e. :

- Il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $A(C) \neq \emptyset$.
- Pour toute paire d'éléments $(x, C), (x', C')$ de $\int A$, il existe $(y, D) \in \int A$ ainsi que deux morphismes $m : D \rightarrow C$ et $m' : D \rightarrow C'$ tels que $A(m)(y) = x$ et $A(m')(y) = x'$.
- Pour toute paire d'éléments $(x, C), (x', C')$ de $\int A$ et toute paire de morphismes $m, m' : C \rightarrow C'$ tels que $A(m)(x) = A(m')(x) = x'$, il existe $(y, D) \in \int A$ ainsi qu'un morphisme $l : D \rightarrow C$ tels que $A(m) \circ A(l) = A(m') \circ A(l)$ et $A(l)(y) = x$.

Proposition 4.2.7

Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} des petites catégories. Un foncteur $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ induit un morphisme géométrique :

$$f : Ens^{\mathcal{C}^{op}} \rightarrow Ens^{\mathcal{D}^{op}}$$

où f^* est donné par la composition avec ϕ . De plus, f^* admet un adjoint à gauche que l'on note $f_!$. Un morphisme géométrique tel que l'image inverse possède un adjoint à gauche est dit "essentiel".

Démonstration 4.2.8

Pour $Q \in Ens^{\mathcal{D}^{op}}$, on note $Q_\phi \in Ens^{\mathcal{C}^{op}}$ le foncteur induit par ϕ . On considère le foncteur $\bullet \mathcal{D}^\bullet : \mathcal{D} \times \mathcal{D}^{op} \rightarrow Ens$ définit par :

$$\bullet \mathcal{D}^\bullet(D, D') = Hom_{\mathcal{D}}(D', D)$$

et ${}_\phi \mathcal{D}^\bullet, \bullet \mathcal{D}_\phi$ les foncteurs induits par composition par ϕ à gauche et à droite respectivement. On a alors :

$$Q \otimes_{\mathcal{D}} \bullet \mathcal{D}_\phi \simeq Q_\phi \simeq Hom({}_\phi \mathcal{D}^\bullet, Q)$$

naturel en Q , la deuxième équivalence étant assurée par le lemme de Yoneda. Donc $Q_\phi =: f^*(Q)$ admet des adjoints à droite et à gauche d'après 4.2.2. L'adjoint à gauche assure que f^* est exact à gauche. Ainsi, $f : f^* \dashv f_*$ est un morphisme géométrique. De plus, f^* est induit par composition avec ϕ et admet un adjoint à gauche comme annoncé.

QED

4.3 Adjonction entre tops

4.3.1 Continuité d'un foncteur

Définition 4.3.2

Soient $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ et $(\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ deux sites et u un foncteur entre les catégories sous-jacentes. On dit que u est continu si pour tout faisceau $F \in \mathbf{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{J}')$, le préfaisceau $F \circ u$ est un faisceau sur $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$.

Définition 4.3.3

Un foncteur u est cocontinu s'il vérifie la propriété :

Pour tout objet $Y \in \mathcal{C}$ et pour tout crible R couvrant uY , le crible sur Y engendré par $Z \rightarrow Y$ telles que $uZ \rightarrow uY$ soit dans R , couvre Y .

Proposition 4.3.4

Caractérisation de la continuité

Soit $u : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \rightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{K})$ un foncteur entre sites. Il est continu ssi il existe $u_s : \mathbf{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{K}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ tel que $iu_s = u^*i'$ où i et i' sont les inclusions des faisceaux dans les préfaisceaux.

4.3.5 Foncteur prolongeant

Définition 4.3.6

Foncteur prolongeant

Si u est un foncteur continu, on peut alors définir $u^s : \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{J}')$ commutant aux limites inductives et « prolongeant u » i.e. tel que le diagramme de foncteurs canoniques :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{u} & \mathcal{C}' \\ \in_{\mathcal{C}} \downarrow & & \downarrow \in_{\mathcal{C}'} \\ \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{u^s} & \mathbf{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{J}') \end{array}$$

soit commutatif à isomorphisme près.

Proposition 4.3.7

L'existence d'un tel u^s est équivalente à la continuité de u dans le cas où $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ est un petit site et on a u^s adjoint à gauche de u_s .

Démonstration 4.3.8

On ne montre qu'un seul sens de l'implication car l'implication réciproque ne nous sera pas utile. On suppose donc u continue et construisons u^s comme décrit dans l'énoncé.

Pour tout $G \in \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$, on pose $u^s G = \underline{a}'u_!iG$. Pour $F \in \mathbf{Sh}(\mathcal{C}', \mathcal{J}')$, on a la suite d'isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(G, u_s F) &\simeq \mathrm{Hom}(iG, iu_s F) \simeq \mathrm{Hom}(iG, u^*i'F) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(u_!iG, i'F) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{a}'u_!iG, F) \end{aligned}$$

qui ne sont que des jeux d'écriture sur des isomorphismes déjà vus pour la plupart. En regardant le premier et dernier terme, on constate que $u^s \dashv u_s$. En particulier, u^s commute aux limites inductives. Pour tout préfaisceau K sur \mathcal{C} , on a la nouvelle suite d'isomorphismes naturels : $\mathrm{Hom}(u^s \underline{a}K, F) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{a}K, u_s F) \simeq \mathrm{Hom}(K, iu_s F) \simeq \mathrm{Hom}(K, u^*i'F) \simeq \mathrm{Hom}(u!K, i'F) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{a}'u_!K, F)$ (par adjonctions et définitions). On a donc un isomorphisme fonctoriel $u^s \underline{a}K \simeq \underline{a}'u_!K$ qui donne, dans le cas où K est représentable, avec le choix de $u_!$ tel que :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{u} & \mathcal{C}' \\ \downarrow \mathbf{y} & & \downarrow \mathbf{y}' \\ \hat{\mathcal{C}} & \xrightarrow{u_!} & \hat{\mathcal{C}}' \end{array}$$

commute (où y et y' sont les inclusions canoniques), on obtient bien le diagramme commutatif de la définition 4.3.6.

QED

4.4 Morphismes de sites

Pour construire des dualités et les rendre « consistantes » nous allons faire varier les catégories d'un côté et étudier comment cela se répercute de l'autre côté de la dualité.

Définition 4.4.1

Morphisme de sites

Soient $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ et $(\mathcal{D}, \mathcal{K})$ des sites, un morphisme de sites est un foncteur $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ qui vérifie les conditions suivantes :

1. Il envoie tout crible \mathcal{J} -couvrant sur un crible \mathcal{K} -couvrant.
2. Chaque objet $d \in \mathcal{D}$ admet un \mathcal{K} -recouvrement $d_i \rightarrow d, i \in I$ tel que l'on ait des objets c'_i de \mathcal{C} et des morphismes $d_i \rightarrow f(c'_i)$.
3. Pour chaque $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ et pour chaque paire de morphismes de \mathcal{D}

$$g_1 : d \rightarrow f(c_1), \quad g_2 : d \rightarrow f(c_2),$$

il existe une famille \mathcal{K} -couvrante $g'_i : d_i \rightarrow d, i \in I$, une famille de paires de morphismes

$$f_1^i : c'_i \rightarrow c_1, \quad f_2^i : c'_i \rightarrow c_2$$

et une famille de morphismes $h_i : d_i \rightarrow f(c'_i)$ telles que les carrés suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} d_i & \xrightarrow{g'_i} & d \\ h_i \downarrow & & \downarrow g_1 \\ f(c'_i) & \xrightarrow{f(f_1^i)} & f(c_1) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} d_i & \xrightarrow{g'_i} & d \\ h_i \downarrow & & \downarrow g_2 \\ f(c'_i) & \xrightarrow{f(f_2^i)} & f(c_2) \end{array}$$

4. Pour toute paire de flèches $f_1, f_2 : c_1 \rightrightarrows c_2$ dans \mathcal{C} , et pour toute flèche de \mathcal{D} $g : d \rightarrow f(c_1)$ telle que :

$$f(f_1) \circ g = f(f_2) \circ g,$$

il existe une famille \mathcal{K} -couvrante $g_i : d_i \rightarrow d$, une famille de morphismes $k_i : c'_i \rightarrow c_1$ telle que :

$$f_1 \circ k_i = f_2 \circ k_i, \quad \forall i$$

et une famille de morphismes $h_i : d_i \rightarrow f(c'_i)$ telle que le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} d_i & \xrightarrow{g_i} & d \\ h_i \downarrow & & \downarrow g \\ f(c'_i) & \xrightarrow{f(k_i)} & f(c_1) \end{array}$$

Remarque 4.4.2

- Les morphismes de sites sont en particulier continus (4.3.2) grâce à la propriété 1.
- Dans le cas des catégories cartésiennes, un foncteur est un morphisme de sites s'il est continu et cartésien.

En fait, cette définition est la traduction des conditions sur un foncteur f pour que $(\underline{a}_{\mathcal{D}\mathbf{y}}) \circ f$ soit un foncteur plat (cf.4.2.3). De tels foncteurs permettent de « faire varier » nos topos de faisceaux en fournissant un morphisme géométrique. En effet :

Proposition 4.4.3

Tout morphisme de site $f : (\mathcal{C}, \mathcal{J}) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathcal{K})$ induit de manière contravariante un morphisme géométrique $\mathbf{Sh}(f) : \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$.

Démonstration 4.4.4

Pour justifier de son existence et unicité, on peut remarquer que comme $(\underline{a}_{\mathcal{D}\mathbf{y}}) \circ f$ est un foncteur plat et que la donnée d'un foncteur plat est équivalente à celle d'un morphisme géométrique, on a bien de manière unique $\mathbf{Sh}(f)$.

Nous allons exhiber le morphisme géométrique en question en utilisant la composition avec f d'une part et l'extension de Kan à gauche d'autre part.

Construisons d'abord $\mathbf{Sh}f_*$. On remarque l'analogie avec le cas des applications continues dans le cadre des espaces topologiques. On pose donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{Sh}f_* : \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, \mathcal{K}) &\longrightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}) \\ S &\mapsto S \circ f \end{aligned}$$

$S \circ f$ est bien un faisceau par continuité de f .

Il nous reste à construire $\mathbf{Sh}f^*$. On utilise l'extension de Kan à gauche :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}) & \hookrightarrow & \widehat{\mathcal{C}} & \xrightarrow{f_!} & \widehat{\mathcal{D}} \\ & & & & \downarrow \underline{a}_{\mathcal{K}} \\ & & & \mathbf{Sh}f^* & \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, \mathcal{K}) \end{array}$$

QED

Remarque 4.4.5

Cependant, tout morphisme géométrique n'est pas induit en général par un morphisme de sites, il faudrait considérer en plus les foncteurs (ou distributeurs) dans le cas général.

En particulier, on a la proposition suivante :

Proposition 4.4.6

Soient $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ et $(\mathcal{D}, \mathcal{K})$ deux sites avec limites finies. Tout foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ qui préserve les cribles couvrants ainsi que les limites finies induit un morphisme géométrique $Sh(F) : \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, \mathcal{K}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$. De plus, si \mathcal{J} et \mathcal{K} sont sous-canoniques, alors F s'identifie à la restriction de l'image inverse $Sh(F)^* : \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, \mathcal{K})$ aux représentables.

4.5 Topologie sans points

Dans le cadre du topos $\mathbf{Sh}(X)$ associés à un espace topologique X , il est légitime de se demander si la connaissance seule de ce topos permet de retrouver la topologie initiale et si les opérations sur le topos émanent d'opérations sur l'espace sous-jacent. Considérons X et Y deux espaces topologiques avec Y séparé, et $f : \mathbf{Sh}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(Y)$ un morphisme géométrique. Puisque $f^* \dashv f_*$, on a $f^*(1) = 1$ et f^* préserve les sous-terminaux ainsi que les conjonctions finitaires et les disjonctions infinitaires. Les sous-objets de 1 correspondent évidemment aux ouverts pour la topologie considérée. Donc f^* se restreint en une application $f^* : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$. On pose alors pour $x \in X$:

$$\bar{f}(x) = y \text{ ssi pour tout voisinage } y \in V \subset Y \text{ on a } x \in f^*(V)$$

Défini de cette manière, \bar{f} est bien une fonction. En effet, pour $x \in X$ il existe au plus une image par \bar{f} : si $y_1 \neq y_2$ sont deux éléments de Y , alors il existe deux voisinages distincts $V_1 \ni y_1$ et $V_2 \ni y_2$ donc $\emptyset = f^*(V_1 \cap V_2) = f^*(V_1) \cap f^*(V_2)$ et ainsi x ne peut appartenir aux deux ouverts $f^*(V_1)$ et $f^*(V_2)$ à la fois. Pour montrer l'existence d'un tel élément y , raisonnons par l'absurde : supposons que pour tout y il existe un voisinage V_y tel que $x \notin f^*(V_y)$. Alors, on a :

$$x \notin \bigcup_{y \in Y} f^*(V_y) = f^*\left(\bigcup_{y \in Y} V_y\right) = f^*(Y) = X$$

ce qui est absurde. On a donc montré que \bar{f} est bien définie.

On a : $Sh(\bar{f}) = f$

De plus, il existe une unique application continue $f : X \rightarrow Y$ telle que f_* soit construite comme image directe à partir de f . En effet, on retrouve la topologie de X et de Y via les sous-terminaux de $\mathbf{Sh}(X)$ et de $\mathbf{Sh}(Y)$ d'après ce qui précède.

Mais de manière générale, l'algèbre de Heyting des sous-terminaux ne permet pas de retrouver les points, i.e. les espaces eux-mêmes. Beaucoup de propriétés des espaces topologiques (compacité, connexité, ...) ne font pas référence à la notion de point et peuvent donc être décrites simplement en terme des ouverts. Cet aspect de la topologie, sans référence aux points, privilégie donc l'étude de $\mathcal{O}(X)$, l'algèbre de Heyting complète (AHC) des ouverts de X . Ceci motive la définition suivante :

Définition 4.5.1

Un locale est un treillis semi-complet pour les sups arbitraires qui satisfait la loi de distributivité infinie :

$$a \wedge \left(\bigvee_{i \in I} b_i\right) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i)$$

Un homomorphisme de locales $X \rightarrow Y$ est une application de Y dans X qui préserve les intersections (conjonctions) finies ainsi que toutes les unions (disjonctions).

La notion de locale est la notion duale de celle repère :

$$Loc \simeq \mathbf{Frm}^{op}$$

A travers la notion de locale, on cherche à cerner celle d'espace. Tout espace topologique X donne lieu à un locale $\mathcal{O}(X)$ formé des ouverts. La réciproque est fautive en général ; il existe des locales ne provenant pas d'une telle construction. Cependant, on possède une telle caractérisation des locales en termes topologiques via la proposition suivante :

Proposition 4.5.2

Un locale est de la forme $\mathcal{O}(X)$ pour un certain espace topologique X ssi tout élément du locale s'exprime comme l'inf d'éléments premiers.

Dans ce cas, on dit que le locale est "spatial".

Démonstration 4.5.3

Soit U un ouvert d'un espace topologique X . Alors :

$$U = \bigcup_{x \notin U} X \setminus \overline{\{x\}}$$

On a évidemment $U \subset V$. De plus, si l'on note V ce deuxième ensemble et si $y \in V$, alors $y \neq x$ pour tout $x \notin U$ donc $y \in U$.

Réciproquement, soit L un locale tel que tout élément s'exprime comme l'inf d'éléments premiers. Alors on note $X = \text{Hom}_{\text{Form}}(L, \{0, 1\})$ qui s'identifie aux filtres complètement premiers sur L . La topologie des filtres complètement premiers est définie par :

$$U_a = \{h \in X \mid h(a) = 1\}$$

où $a \in L$, et on a $U_{\bigvee a} = \bigcup U_a$ et $U_{\bigwedge a} = \bigcap U_a$ (lorsque l'inf existe). L'application :

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & \mathcal{O}(X) \\ a & \longmapsto & U_a \end{array}$$

est donc un morphisme de repères surjectif. Il suffit, par la propriété précédente, de montrer l'injectivité sur les éléments premiers. Ce qui est le cas, car l'application est strictement croissante.

QED

L'espace topologique en question n'est, en général, pas unique. On voit clairement que cette propriété d'unicité tient au fait d'avoir ou non des points "inutiles". On introduit donc la notion d'espace sobre.

Définition 4.5.4

Un espace topologique est dit sobre si tout fermé irréductible non vide est la fermeture d'un unique point.

Remarque 4.5.5

- Les espaces séparés (au sens d'Hausdorff T_2) sont évidemment sobres
- Tout espace sobre respecte l'axiome de séparation T_0

Proposition 4.5.6

Soient X et Y des espaces topologiques sobres et $\phi : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ un homomorphisme de repères. Alors il existe une unique application $f : X \rightarrow Y$ continue telle que ϕ soit la fonction "image inverse" f^{-1} restreinte aux ouverts.

On va d'abord montrer le lemme suivant :

Lemme 4.5.7

Soit X un espace topologique. Les points de $\mathcal{O}(X)$ dans Loc (i.e. les morphismes de repères $\mathcal{O}(X) \rightarrow \{0, 1\}$) sont en bijection avec les fermés irréductibles de X via l'application suivante :

$$\begin{aligned} Hom_{Frm}(\mathcal{O}(X), \mathcal{O}(1)) &\xrightarrow{\cong} IrrClSub(X) \\ \phi &\longmapsto X \setminus U_\emptyset(\phi) \end{aligned}$$

$$\text{où } U_\emptyset(\phi) = \bigcup_{\phi(U)=\emptyset} U.$$

Démonstration 4.5.8

Montrons d'abord que cette application est bien définie, c'est-à-dire que le fermé ainsi défini est bien irréductible. Pour U_1 et U_2 deux ouverts de X tels que $U_1 \cap U_2 \subset U_\emptyset(\phi)$, on a :

$$\begin{aligned} \phi(U_1) \cap \phi(U_2) &= \phi(U_1 \cap U_2) \\ &\subset \phi(U_\emptyset(\phi)) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

et ainsi $U_1 \subset U_\emptyset(\phi)$ ou $U_2 \subset U_\emptyset(\phi)$. Donc $U_\emptyset(\phi)$ est un ouvert premier le fermé $X \setminus U_\emptyset(\phi)$ est irréductible.

Réciproquement, étant donné un fermé irréductible $X \setminus U_0$, on définit une application ϕ par :

$$\phi(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } U \subset U_0 \\ \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre aisément que ϕ préserve les unions arbitraires. Montrons qu'elle préserve aussi les intersections finies. Si U_1 et U_2 sont deux ouverts tels que $U_1 \cap U_2 \subset U_0$ alors, d'après ce qui précède $U_1 \subset U_0$ ou $U_2 \subset U_0$ et donc $\phi(U_1) \cap \phi(U_2) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset = \phi(U_1 \cap U_2)$. Si $U_1 \cap U_2$ n'est pas inclus dans U_0 , alors ni U_1 ni U_2 n'est inclus dans U_0 et donc $\phi(U_1) \cap \phi(U_2) = \{1\} = \phi(U_1 \cap U_2)$. Finalement, l'application ϕ ainsi définie est un morphisme de repères.

Les deux opérations sont inverses l'une de l'autre.

QED

On peut maintenant montrer la proposition 4.5.6.

Démonstration 4.5.9

On commence par le cas des morphismes de repères de la forme $\phi : \mathcal{O}(X) \rightarrow \{0, 1\}$. D'après ce qui précède, un tel morphisme correspond, de manière biunivoque, à un fermé irréductible $X \setminus U_\emptyset(\phi)$. Par sobriété de X , il existe un unique point x tel que $U_\emptyset(\phi) = \overline{\{x\}}$. Ainsi, pour tout voisinage ouvert U_x de x , U_x n'est pas inclus dans $U_\emptyset(\phi)$ et donc $\phi(U_x) = \{1\}$. Finalement, ϕ est le morphisme d'image inverse de la fonction continue $\{1\} \mapsto x$. On remarque en particulier que X est en bijection avec $Hom_{Frm}(\mathcal{O}(X), \mathcal{O}(1))$.

Dans le cas général, soit $\phi : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ un morphisme de repère. On définit l'application :

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow Y \\ (\{0, 1\} \xleftarrow{\hat{x}} \mathcal{O}(X)) &\longmapsto (\{0, 1\} \xleftarrow{\hat{x}} \mathcal{O}(X) \xleftarrow{\phi} \mathcal{O}(Y)) \end{aligned}$$

On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \phi(V) &\iff \widehat{x}(\phi(V)) = \{1\} \\ &\iff (\widehat{x} \circ \phi)(V) = \{1\} \\ &\iff f(x) \in V \end{aligned}$$

Donc $\phi = f^{-1}$ et comme ϕ envoie les ouverts de Y sur des ouverts de X , alors f est continue.

QED

Proposition 4.5.10

On a l'équivalence suivante :

$$\text{Sobre} \simeq \text{Spatial}^{\text{op}}$$

entre la catégorie des espaces sobres et celle des locales spatiaux.

Démonstration 4.5.11

Le foncteur \mathcal{O} est pleinement fidèle d'après 4.5.6. Pour montrer que c'est essentiellement surjectif on fait la sobrification. Moyennant l'axiome du choix, on a un quasi-inverse pour \mathcal{O} et donc l'essentielle surjectivité.

QED

Proposition 4.5.12

Soit \mathcal{E} un topos de Grothendieck. On a l'équivalence suivante :

- \mathcal{E} est équivalent à un topos de faisceaux sur un locale
- les sous-terminaux engendrent \mathcal{E} au sens de la colimite

Dans le cas où l'une de ces propriétés est vérifiée, on dit que \mathcal{E} est un "topos localique".

Démonstration 4.5.13

Soit L un locale. La topologie dite "canonique" sur L est sous-canonique d'après 4.1.1 (en fait, c'est même la topologie canonique) et donc son topos associé $\mathbf{Sh}(L)$ est engendré par les représentables qui sont évidemment des sous-terminaux (en fait, ce sont exactement les sous-terminaux car les sup arbitraires existent).

Réciproquement, soit \mathcal{E} un topos que l'on suppose engendré par ses sous-terminaux. Alors, on a :

$$\mathcal{E} \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{E}, \mathcal{J}^{\text{can}}) \simeq \mathbf{Sh}(\text{Sub}_{\mathcal{E}}(1))$$

où l'on a muni \mathcal{E} de la topologie des recouvrements épimorphiques (précisons que dans un topos, les épis sont stables par pullback) et la deuxième équivalence est immédiate à partir du lemme de comparaison (2.1). Il reste à montrer la première équivalence : on commence par remarquer que la topologie des recouvrements épimorphiques est sous-canonique (elle est en fait canonique) et donc que l'on possède déjà un foncteur $\mathbf{y}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{E}, \mathcal{J}^{\text{can}})$ pleinement fidèle. Par souci de simplicité, supposons que $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ est un site sous-canonique pour \mathcal{E} et que $(\)_{\mathcal{C}} : \mathbf{Sh}(\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ est le foncteur de restriction du domaine selon le Yoneda $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$. Ce dernier foncteur est bien défini car tout crible \mathcal{J} -couvrant sur \mathcal{C} s'envoie sur une famille épimorphique dans $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ [MM III.7] et donc le préfaisceau sur \mathcal{C} résultant est un faisceau. Montrons que

ces foncteurs sont pseudo-inverses l'un de l'autre. Etant donné $F : \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ un faisceau, on construit une transformation naturelle $Hom(-, F_C) \rightarrow F$: étant donnée un faisceau $X : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$, ainsi qu'une représentation en terme de représentables $X \simeq \varinjlim \mathbf{y}C$ et une transformation naturelle $\alpha : X \rightarrow F_C$, alors chaque flèche $\mathbf{y}C \rightarrow X$ fournit un élément de $X(C)$ qui s'envoie par α sur un élément de $F(\mathbf{y}C)$ et la famille de tous ces éléments est F -compatible. La famille des morphismes $\mathbf{y}C \rightarrow X$ considérés est épimorphique et F est un faisceau, donc il existe un unique élément de $F(X)$ qui engendre cette famille F -compatible. Un tel élément ne dépend pas de la représentation $X \simeq \varinjlim \mathbf{y}C$ considérée car la réunion de deux cribles couvrants est un crible couvrant. On construit en fait une transformation naturelle $Hom(-, F_C) \rightarrow F$ et cette construction est naturelle en F . Finalement, ces transformations naturelles $Hom(-, F_C) \rightarrow F$ sont des isomorphismes par propriété universelle de la limite inductive. Ainsi, $\mathbf{y}_E \circ ()_C \simeq Id_{Sh(E)}$.

L'isomorphisme $()_C \circ \mathbf{y}_E \simeq Id_E$ est simplement le lemme de Yoneda.

QED

Remarque 4.5.14

Il est sous-entendu, ici, que l'on travaille sur un univers $\mathcal{V} \ni \mathcal{U}$.

Proposition 4.5.15

Soient L et L' deux locales et $F : \mathbf{Sh}(L) \rightarrow \mathbf{Sh}(L')$ un morphisme géométrique. Alors il existe un unique morphisme de locales $f : L \rightarrow L'$ tel que F_* soit la composée par f^{op} . De plus, f se retrouve comme la restriction de F_* aux représentables (sous-terminaux).

Démonstration 4.5.16

La topologie considérée est sous-canonique (c.f. 4.1.1), et on retrouve le locale grâce aux sous-terminaux. De plus, l'image inverse préserve les sous-terminaux, ce qui justifie que la restriction aux représentables forme bien une application $L' \rightarrow L$. C'est un morphisme de repères par propriété de l'adjoint à gauche exact à gauche.

QED

Remarque 4.5.17

Il est évident, par 4.4.6, qu'un morphisme de locales induit un morphisme géométrique de cette façon. La topologie de Grothendieck utilisée est la topologie canonique ($S \in \mathcal{J}(c)$ si et seulement si $\bigvee_{s \in S} s = c$).

Proposition 4.5.18

Soient X et Y deux espaces topologiques sobres et $F : Sh(Y) \rightarrow Sh(X)$ un morphisme géométrique. Alors il existe une unique application continue $f : X \rightarrow Y$ telle que F_* soit la composée par f .

Démonstration 4.5.19

C'est la combinaison des théorèmes 4.5.10 et 4.5.15.

QED

Finalement, la notion de locale englobe celle d'espace topologique, ce qui motive de les voir comme des espaces généralisés. La méthode développée en 3.0 montre l'importance d'une telle notion en travaillant avec la catégorie **Frm** avant de "remonter" vers la catégorie **Top**.

5 Références

Sheaves in geometry and logic; S. MacLane et I. Moerdijk [**MM**]

Sketches of an elephant; P. Johnstone [**SE**]

Stone Spaces; P. Johnstone

A Topos-theoretic approach to Stone-type dualities; O. Caramello

Denseness conditions, morphisms and equivalences of toposes; O. Caramello

Séminaire de géométrie algébrique 4; A. Grothendieck et J.-L. Verdier [**SGA 4**]

Topologie des groupes de difféomorphismes

ALBANET Nolan et LAZARUS Rodrigue

Mars-Juin 2021

Table des matières

0 Résultats préliminaires	4
0.1 Structure de variété des groupes de difféomorphismes d'une surface et équivalence faible d'homotopie	4
0.2 Fibration et homotopie	5
0.3 Topologie des surfaces compactes connexes	8
1 Plongement d'un segment dans une somme connexe	10
2 Démonstration du théorème 3	13
2.1 Cas particulier facile	13
2.2 Cas général	15
3 Plongement du cercle ou du segment dans une surface	17
4 Démonstration du théorème 2	21
5 Démonstration du théorème 1	24
5.1 Cas général	24
5.2 Traitement des cas particuliers	26

Préambule

Le type d'homotopie du groupe \mathcal{D}_0 des difféomorphismes homotopes à l'identité d'une surface compacte a été calculé par C.Earle et J.Eells en faisant appel aux équations de Beltrami et à l'espace de Teichmüller. Ce mémoire sera consacré à l'étude de ce résultat, nous suivrons la démonstration d'A.Gramain qui ne fera appel qu'à des arguments de topologie différentielle et sera donc plus "directe". Le résultat principal sera le suivant :

THÉORÈME 1 Soit V une surface compacte connexe (orientable ou non, avec ou sans bords) et $\mathcal{D}_0(V)$ le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de V qui sont homotopes à l'identité, muni de la topologie C^∞ . Alors :

- Si V est la sphère \mathbf{S}_2 ou le plan projectif \mathbf{P}_2 , le groupe $\mathcal{D}_0(V)$ a le type d'homotopie de $\mathbf{SO}(3)$.
- Si V est le tore \mathbf{T} , le groupe $\mathcal{D}_0(V)$ a le type d'homotopie de \mathbf{T} .
- Si V est la bouteille de Klein \mathbf{T}' ou la bande de Moebius \mathbf{M} , le groupe $\mathcal{D}_0(V)$ a le type d'homotopie de $\mathbf{SO}(2)$.
- Si V est le cylindre \mathbf{C} ou le disque \mathbf{D}_2 , le groupe $\mathcal{D}_0(V)$ a le type d'homotopie de $\mathbf{O}(2)$.

Dans tous les autres cas, le groupe $\mathcal{D}_0(V)$ est contractile. [1]

Précisons tout d'abord que, hormis pour la sphère et le cylindre ou il admet deux composantes, le groupe $\mathcal{D}_0(V)$ est connexe. (Théorème de D.Epstein). Pour démontrer ce théorème nous allons construire une équivalence faible d'homotopie entre \mathcal{D}_0 et divers groupes de difféomorphismes, que nous noterons \mathcal{D}' et \mathcal{D}'' , et dont la nature dépendra du type de surface étudiée (Partie 5). En d'autres termes nous allons construire une suite d'isomorphismes entre les groupes π_i de ces espaces topologiques. Pour conclure nous allons utiliser la contractilité des composantes connexes d'un certain groupe de difféomorphismes d'une surface :

THÉORÈME 2 Soit V une surface compacte connexe (orientable ou non, avec ou sans bord) et v un point intérieur à V . Soit $\mathcal{D}(V, v)$ le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de V qui sont tangents à l'ordre 1 à l'identité en v , muni de la topologie C^∞ . Les composantes connexes de $\mathcal{D}(V, v)$ sont (faiblement) contractiles.

Par "difféomorphisme tangent à l'ordre 1 à l'identité en v " nous signifions ici qu'ils fixent v et que leur différentielle en v est l'identité; en termes de jets, cela signifie que le 1-jet en v de ces difféomorphismes coïncide avec celui de l'identité (nous définirons les 1-jets dans la partie suivante).

Pour démontrer ce résultat nous aurons besoin d'un troisième théorème-clé :

THÉORÈME 3 Soit V une surface compacte à bord non-vide, soient A et B deux éléments de ∂V . On note $Pl((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B))$ les plongements $C^\infty f : \mathbf{I} \rightarrow V$ tels que $f(0) = A, f(1) = B$ et $f(\mathring{[}0, 1]) \subset \mathring{V}$. Les composantes connexes de $Pl((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B))$ sont contractiles pour la topologie C^∞ .

Notre document se déroulera en plusieurs parties : nous énoncerons tout d'abord plusieurs résultats préliminaires qui nous seront utiles à plusieurs reprises tout le long de la démonstration; la première partie sera consacrée à l'étude des plongements du segment dans une somme connexe de surfaces (Théorème 4); en deuxième partie nous ferons la démonstration du théorème 3, qui

se distingue en un cas facile et un cas difficile; en troisième partie nous utiliserons ce résultat pour étudier les plongements du cercle et du segment dans une variété à bords (Théorèmes 5 et 6); dans la quatrième partie nous démontrerons le théorème 2 en utilisant des résultats sur certains groupes de difféomorphismes d'une surface connexe et enfin en cinquième partie nous démontrerons le théorème 1 à l'aide du théorème 2.

0 Résultats préliminaires

Dans cette partie nous énonçons plusieurs propositions et définitions à connaître pour mener notre démonstration. Les lecteurs à l'aise avec la géométrie différentielle et la topologie algébrique peuvent passer cette partie. Chaque utilisation d'un résultat préliminaire sera explicitement mentionnée.

0.1 Structure de variété des groupes de difféomorphismes d'une surface et équivalence faible d'homotopie

Les groupes de difféomorphismes d'une surface peuvent être vues comme des variétés de dimension infinie. Plus précisément, il s'agit de variétés localement homéomorphes à des espaces de Fréchet.

DÉFINITION 0.1.1 — [ÉQUIVALENCE FAIBLE D'HOMOTOPIE]

Soit (X, x) et (Y, y) deux espaces topologiques pointés. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue vérifiant $f(x) = y$. Alors f induit naturellement des morphismes $f_n : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$. On dit que f est une équivalence faible d'homotopie si les f_n sont des isomorphismes.

REMARQUE 0.1.2 f_0 est un morphisme d'ensembles pointés

THÉORÈME 0.1.3 — [WHITEHEAD]

Toute équivalence faible d'homotopie entre deux CW-Complexes est une équivalence d'homotopie.

LEMME 0.1.4 — [ECKMANN-HILTON]

Soit G un ensemble et $(G, m_1, e_1), (G, m_2, e_2)$ deux structures de groupe sur G . Si $e_1 = e_2$ et pour tout $a, b, c, d \in G$ on a :

$$m_1(m_2(a, b), m_2(c, d)) = m_2(m_1(a, c), m_1(b, d))$$

Alors $m_1 = m_2$ et G est abélien pour cette loi. Pour clarifier, si on note $m_1(a, b) = ab$ et $m_2(a, b) = a \circ b$ cela se réécrit :

$$(a \circ b)(c \circ d) = (ac) \circ (bd)$$

DÉMONSTRATION 0.1.5

En prenant $b = c = e$, on a :

$$\forall (a, d) \in G, m_1(a, d) = m_2(a, d)$$

donc $m_1 = m_2 := m$ Ensuite, en prenant $a = d = e$ on a :

$$\forall (b, c) \in G, m(b, c) = m(c, b)$$

et (G, m, e) est abélien. [3]

PROPOSITION 0.1.6

Le groupe fondamental d'un groupe topologique est commutatif.

DÉMONSTRATION 0.1.7

Soit G un groupe topologique. Etant donnés $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(G)$, on note $\gamma_1 \gamma_2 \in \pi_1(G)$ l'application $t \mapsto \gamma_1(t) \gamma_2(t)$. L'application $\gamma_1, \gamma_2 \mapsto \gamma_1 \gamma_2$ ainsi construite est une loi de groupe sur $\pi_1(G)$. De plus, on note \cdot la loi usuelle sur $\pi_1(G, e)$. Soient $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \pi_1(G)$. Alors, pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$:

$\gamma_1 \gamma_2 \cdot \gamma_3 \gamma_4$:

$t \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto \gamma_1 \gamma_2(2t)$

$t \in [\frac{1}{2}, 1] \mapsto \gamma_3 \gamma_4(2t - 1)$

et $(\gamma_1 \cdot \gamma_3)(\gamma_2 \cdot \gamma_4)$:

$t \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto \gamma_1 \gamma_2(2t)$

$t \in [\frac{1}{2}, 1] \mapsto \gamma_3 \gamma_4(2t - 1)$

Le chemin constant étant l'élément neutre pour les deux lois, elles sont égales et $\pi_1(G)$ est abélien.

[3]

DÉFINITION 0.1.8 — [TOPOLOGIE C^∞ DES GROUPES DE DIFFÉOMORPHISMES]

Soit $r \geq 0$

Soit $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ une application C^∞ , soit $x \in \mathbf{R}^n$, le r -jet de f en x est la troncature du développement de Taylor de f au voisinage de x à l'ordre r , c'est un polynôme.

Exemple : $J^0 f(h) = f(x)$

$J^1 f(h) = f(x) + Df(x)h$

On considère maintenant les fonctions $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$ qui sont C^∞ avec M une variété. On définit une classe d'équivalence d'ordre r sur ces fonctions par $\gamma \sim \delta \iff$ pour tout $\phi : M \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ , $J^r(\phi \circ \gamma) = J^r(\phi \circ \delta)$

Le r -jet de γ en 0 sera alors sa classe d'équivalence pour la relation d'ordre r .

Enfin, dans le cas des fonctions $f : M \rightarrow N$ qui sont C^∞ avec M et N des variétés, pour $p \in M$ on définit la relation d'équivalence d'ordre r par :

$f \sim g \iff$ pour tout $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$ tel que $\gamma(0) = p$, $J^r(f \circ \gamma) = J^r(g \circ \gamma)$

Le r -jet de f en p est alors sa classe d'équivalence d'ordre r .

Si X est un ensemble de fonctions C^∞ sur une variété M , pour $k \geq 0$ on définit $J^k(X)$ l'ensemble des k -jets des éléments de X . Cet ensemble peut être vu comme une variété lisse et est donc un espace topologique.

Pour U ouvert dans $J^k(x)$, on définit $S^k(U) = \{f \in X : J^k(f) \subset U\}$ et on note W^k la topologie engendrée par les $S^k(U)$, il s'agit de la topologie C^k de Whitney.

La topologie C^∞ est alors la topologie engendrée par la base W avec $W = \bigcup_{k=0}^{\infty} W^k$

0.2 Fibration et homotopie

DÉFINITION 0.2.1 — [GROUPES D'HOMOTOIE RELATIFS]

Considérons un couple (X, A) d'espaces topologiques où $A \subset X$ est non vide (autrement dit, une paire topologique). Fixons $x_0 \in A$ et un entier $k \geq 1$. On note $\Omega_k(X, A, x_0)$ l'ensemble des applications continues $\sigma : I^k \rightarrow X$ telles que :

— $\sigma(t) \in A$ pour tout $t \in I^{k-1} \times \{0\}$

— $\sigma(t) = x_0$ pour tout $t \in \partial I^k - (I^{\circ k-1} \times \{0\})$ où $I^{\circ k-1}$ est l'intérieur de I^{k-1}

On note $\pi_k(X, A, x_0)$ l'ensemble des classes d'homotopie de telles applications. C'est le k -ième groupe d'homotopie relatif du triplet (X, A, x_0) .

Voici quelques propriétés intéressantes de l'ensemble $\pi_k(X, A)$:

PROPOSITION 0.2.2

Lorsque $k \geq 2$, l'ensemble $\pi_k(X, A)$ peut être muni d'une structure de groupe via la multiplication sur $\Omega_k(X, A)$:

$$(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \sigma_1(2t_1, t_2, \dots, t_k) & \text{si } t \leq 1/2, \\ \sigma_1(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_k) & \text{si } t \geq 1/2, \end{cases}$$

Le groupe obtenu s'appelle le k -ième groupe d'homotopie de la paire (X, A) de base x_0 .

PROPOSITION 0.2.3

Pour tout $k \geq 1$, toute application continue $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$ induit une application $f_* : \pi_k(X, A) \rightarrow \pi_k(Y, B)$. De plus, si $k \geq 2$, alors f_* est un morphisme de groupes.

DÉFINITION 0.2.4

Lorsque $k \geq 1$, on note $\partial : \pi_k(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{k-1}(A, x_0)$ qui à $[\sigma]$ associe $[\sigma|_{I^{k-1} \times \{0\}}]$. Lorsque $k \geq 2$, c'est un morphismes de groupes.

THÉORÈME 0.2.5

Soit (X, A) une paire topologique telle que A est non vide, et soit $x_0 \in A$ un point. On a la suite exacte suivante :

$$\dots \xrightarrow{\partial} \pi_k(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_k(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \dots$$

où i_*, j_* sont induits par les inclusions $(A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ et $(X, \{x_0\}, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$. Les trois derniers ensembles de la suite n'ont pas de structure naturelle de groupe mais ils possèdent chacune un élément privilégié. Il faut alors remplacer la notion de noyau par l'image inverse de l'élément privilégié pour les deux dernières flèches.

DÉMONSTRATION 0.2.6

Pour tout $k \geq 1$, on note $J^{k-1} := \partial I^k - (I^{\circ k-1} \times \{0\})$.

Terme $\pi_k(A, x_0)$: Montrons que la suite :

$$\pi_{k+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_k(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X, x_0)$$

est exacte lorsque $i \geq 0$.

Se donner une application continue $\sigma : (I^k + 1, \partial I^k + 1, J^k) \rightarrow (X, A, x_0)$ revient exactement à se donner une homotopie dans X (relative à ∂I^k) entre $\sigma|_{I^k \times \{0\}}$ et l'application constante $\sigma|_{I^k \times \{1\}}$. Donc, $i_* \partial[\sigma]$ est l'élément neutre de $\pi_k(X, x_0)$ et ainsi $Im(\partial) \subset Ker(i_*)$. Et réciproquement, tout élément de $[\tilde{\sigma}] \in Ker(i_*)$ est de la forme $\partial[\sigma]$ où σ est une homotopie entre $\tilde{\sigma}$ et l'application constante. Donc $Im(\partial) = Ker(i_*)$

Terme $\pi_k(X, x_0)$: Montrons que la suite :

$$\pi_k(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_k(X, A, x_0)$$

est exacte lorsque $i > 0$.

Soit $\sigma : (I^k, \partial I^k) \rightarrow (A, x_0)$ une application continue. L'application $i \circ \sigma$ est homotope, à J^k fixé, à l'application constante égale à x_0 via $F : I^k \times I \rightarrow X$ définie par :

$$F(t^1, \dots, t^k, t) = (i \circ \sigma)(t^1, \dots, t^{k-1}, (1-t)t^k + t) \in A$$

et donc $j_* i_* [\sigma]$ est l'élément neutre dans $\pi_k(X, A, x_0)$. Donc $Im(i_*) \subset Ker(j_*)$.

Réciproquement, montrons que $Ker(j_*) \subset Im(i_*)$. Soit $\sigma_0 : (I^k, \partial I^k) \rightarrow (X, x_0)$ une application continue telle que $j_*[\sigma_0] = 0$. Il existe une homotopie $G : I^k \times I \rightarrow X$ entre σ_0 et l'application constante, que l'on peut voir comme une application continue $(I^{k+1}, \partial I^k \times I, J^{k-1} \times I) \rightarrow (X, A, x_0)$. Ainsi, la rotation paramétrée par I autour de l'axe $I^{k-1} \times I$ est une homotopie dans $\pi_k(X, x_0)$ entre σ_0 et un élément de $\pi_k(A)$. Donc $[\sigma_0] \in Im(i_*)$.

Terme $\pi_k(X, A, x_0)$: Montrons que la suite :

$$\pi_k(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_k(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(A, x_0)$$

est exacte quand $k > 0$. Lorsque $[\sigma]$ est un élément de $\pi_k(X, x_0)$, alors $\partial j_*[\sigma] = [\sigma|_{I^{k-1} \times \{0\}}] = e$. Donc $Im(j_*) \subset Ker(\partial)$. Réciproquement, considérons $\sigma : (I^k, \partial I^k, J^{k-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ une application continue telle que $\partial[\sigma] = 0$. Il existe donc une homotopie $H : I^k \times I \rightarrow A$ entre σ et l'application constante égale à x_0 . On définit l'application $G : (I^k \times \{0\}) \cup (\partial I^k \times I) \rightarrow X$ par :

- $G|_{I^k \times \{0\}} = \sigma$
- Sur $\partial I^k \times I$:

$$G(t_1, \dots, t_k, t) = \begin{cases} H(t_1, \dots, t_{k-1}, t) & \text{si } t_k = 0 \\ x_0 & \text{si } t_k > 0 \end{cases}$$

Enfin on définit $P : I^k \times I \rightarrow (I^k \times \{0\}) \cup (\partial I^k) \times I$ comme la projection sur $(I^k \times \{0\}) \cup (\partial I^k) \times I$ de centre $(1/2, \dots, 1/2, 1)$ (et où $P(1/2, \dots, 1/2, 1)$ est un élément de $J^{k-1} \times I$ quelconque). Alors $P \circ G$ est continue et c'est une homotopie dans $\pi_k(X, A, x_0)$ entre $(G \circ P)|_{I^k \times \{0\}} = \sigma$ et $(G \circ P)|_{\partial I^k \times I} \in \pi_k(X, x_0)$. Donc $[\sigma] \in Im(j_*)$ et $Im(j_*) = Ker(\partial)$.

PROPOSITION 0.2.7

Soit $p : (E, x) \rightarrow (B, b)$ une fibration localement triviale et $F = p^{-1}(b)$ la fibre. Alors :

$$p_* : \pi_k(E, F, x_0) \rightarrow \pi_k(B, b)$$

est un isomorphisme pour tout $k \geq 2$ (et c'est une bijection pour $k = 1$).

COROLLAIRE 0.2.8

Soit $E \rightarrow B$ une fibration localement triviale de fibre F . Alors on a une suite exacte longue donnée par les morphismes construits précédemment :

$$\dots \rightarrow \pi_i(F) \rightarrow \pi_i(E) \rightarrow \pi_i(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(F) \rightarrow \dots$$

0.3 Topologie des surfaces compactes connexes

Nous donnons ici quelques résultats topologiques sur une surface V compacte connexe.

DÉFINITION 0.3.1 — [SOMME CONNEXE]

Soit X et Y deux variétés. On considère $x \in X$, $y \in Y$ et deux cartes locales respectivement en x et y , ϕ et ψ . On note $X' = X - \phi^{-1}(B(0, \frac{1}{2}))$ et $Y' = Y - \psi^{-1}(B(0, \frac{1}{2}))$. Alors l'ensemble $X' \sqcup Y'$ quotienté par l'identification des bords, que l'on note $X \# Y$, est une variété que l'on appelle somme connexe de X et Y . Intuitivement, cela correspond à coller X et Y ensemble (figure 1).

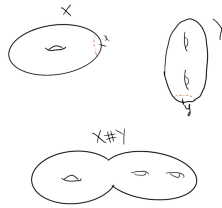


FIGURE 1 – Somme connexe de deux variétés

THÉORÈME 0.3.2 — [CLASSIFICATION]

Notons T_p la surface compacte connexe orientable de genre p (obtenue comme somme connexe de p tores) et U_q la surface compacte connexe non-orientable de genre q (obtenue comme somme connexe de q plans projectifs).

Alors, toute surface compacte connexe sans bord est homéomorphe à un T_p ou un U_q et ces surfaces ne sont pas homéomorphes deux à deux.

DÉMONSTRATION 0.3.3

Voir référence [2]

PROPOSITION 0.3.4 — [GROUPE FONDAMENTAL DES SURFACES T_p ET U_q]

Le groupe fondamental de T_p est le groupe libre à $2p$ -générateurs $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$ quotienté par le sous-groupe distingué engendré par $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$.

Le groupe fondamental de U_q est le groupe libre à q -générateurs quotienté par le sous-groupe distingué engendré par $a_1^2 a_2^2 a_3^2 \dots a_q^2$ [2]

DÉMONSTRATION 0.3.5

C'est une application répétée du théorème de Van Kampen sur les sommes connexes, sachant que l'on part de $Z \times Z$ dans le cas du tore et $Z/2Z$ dans le cas du plan projectif.

Ce théorème de classification et le calcul des groupes fondamentaux nous permettent d'en déduire plusieurs résultats :

PROPOSITION 0.3.6 — [GROUPE D'HOMOTOPIE SUPÉRIEURE DE LA SURFACE]

Si une surface compacte connexe sans bords V n'est pas difféomorphe à S_2 ou P_2 , alors pour $i \geq 2$, $\pi_i(V) = 0$

PROPOSITION 0.3.7 — [CENTRE DU GROUPE FONDAMENTAL DE LA SURFACE]

Si une surface compacte connexe sans bords V n'est pas difféomorphe à S_2, P_2, T, T', M ou C , alors le centre de $\pi_1(V)$ est réduit à zéro.

PROPOSITION 0.3.8 — [CENTRE DU GROUPE FONDAMENTAL DE LA SURFACE PRIVÉE D'UN POINT]

Si une surface compacte connexe sans bords V n'est pas difféomorphe à S_2, P_2 ou D_2 , pour $v \in V$, le centre de $\pi_1(V - \{v\})$ est trivial.

PROPOSITION 0.3.9 — [GROUPE FONDAMENTAL DE LA BOUTEILLE DE KLEIN]

Le groupe fondamental de la bouteille de Klein est le groupe libre à deux générateurs quotienté par la relation "aa = bb" i.e : $\pi_1(T', v) = \langle a, b \mid aa = bb \rangle$

PROPOSITION 0.3.10 — [GROUPE FONDAMENTAL DU CYLINDRE ET DU RUBAN DE MÖBIUS]

$\pi_1(C) = \pi_1(M) = Z$

1 Plongement d'un segment dans une somme connexe

Soit M une surface connexe à bord non-vide, non-nécessairement compacte. Soit K un segment plongé dans M joignant deux points de ∂M . On suppose que $M - K$ possède deux composantes ; leurs adhérences C et D et sont des surfaces à bord et M s'identifie à la somme connexe au bord de C et D (figure 2).

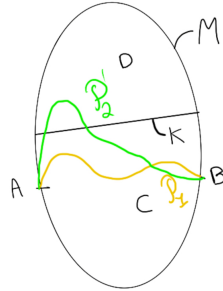


FIGURE 2 – Transformation d'une surface en somme connexe

Soient A et B deux points de $\partial B - K$, on note I pour le segment $[0,1]$. On note $\mathcal{P}_1 = \text{Pl}((I,0,1),(D,A,B))$ [respectivement $\mathcal{P}'_2 = \text{Pl}((I,0,1),(M,A,B))$] l'espace des plongements f de I dans D (respectivement M), de classe C^∞ , tels que $f(0) = A$, $f(1) = B$ et $f([0,1]) \subset \text{int } D$ (respectivement $\text{int } M$), muni de la topologie C^∞ . On note \mathcal{P}_2 l'ouvert de \mathcal{P}'_2 constitué des plongements homotopes à extrémités fixées à un élément de \mathcal{P}_1 .

THÉORÈME 4 Avec les notations précédentes, pour tout $i \geq 0$, les applications induites par l'injection canonique $\pi_i(\mathcal{P}_1) \rightarrow \pi_i(\mathcal{P}_2)$ sont injectives.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, nous allons construire une rétraction de tout compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_2$ dans \mathcal{P}_1 , c'est à dire que si \mathcal{K} est un compact de \mathcal{P}_2 , on veut construire $r : \mathcal{K} \times \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_1$ continue telle que $r|_{\mathcal{P}_1} : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_1$ soit homotope à l'identité.

Supposons cette construction réalisée, démontrons le théorème 3 :

Soit $F : \mathbf{S}_n \rightarrow \mathcal{P}_1$ une application continue. On suppose que F est homotope à 0 dans \mathcal{P}_2 , démontrons que F est aussi homotope à 0 dans \mathcal{P}_1 , ce qui prouvera l'injectivité du morphisme induit par l'injection canonique $\pi_n(\mathcal{P}_1, id) \rightarrow \pi_n(\mathcal{P}_2, id)$

Soit \mathcal{K} l'image de F , c'est un compact de \mathcal{P}_2 . On lui associe l'application r que l'on suppose construite. Alors $r \circ F$ est homotope à l'identité donc homotope à 0 dans \mathcal{P}_1 , mais alors F est nécessairement homotope à 0 également. Ce qui prouve le théorème. \square

Construction de la rétraction

Nous allons construire une somme connexe "relevée" : Soit $p : \hat{M} \rightarrow M$ un revêtement universel de M , on rappelle qu'alors \hat{M} est simplement connexe. Soit D_0 une composante de $p^{-1}(D)$.

Prenons K comme point-base dans M : $\pi_1(M, K)$ correspond au groupe fondamental de M avec pour point-base un élément de K . Alors, par le théorème de Van Kampen on a :

$$\pi_1(M, K) = \pi_1(C, K) \oplus \pi_1(D, K)$$

En particulier, l'application canonique $\pi_1(D, K) \rightarrow \pi_1(M, K)$ est injective. Ainsi, un lacet γ dans D_0 sera envoyé sur un lacet de D dont le relèvement dans \hat{M} est homotope au lacet constant tout en étant égal à γ . Donc D_0 est simplement connexe, c'est donc un revêtement universel de D .

Soit H le groupe des automorphismes de p qui envoient D_0 dans D_0 . On note $\tilde{M} = \hat{M}/H$ et $M_0 = D_0/H$. On note $u : \hat{M} \rightarrow \tilde{M}$ et $q : \tilde{M} \rightarrow M$ les applications canoniques. H s'identifie au groupe des automorphismes de p sur D_0 , ainsi q induit un homéomorphisme de M_0 sur D , q est un revêtement de D .

Notons $M_1 = \text{adh}(\tilde{M} - M_0)$. On relève K en un chemin \tilde{K} dans M_0 . Alors, \tilde{M} est la somme connexe de M_0 et M_1 le long de \tilde{K} .

u étant naturellement un revêtement universel de \tilde{M} ; par le théorème de Van Kampen, M_1 est nécessairement simplement connexe.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow M$ un chemin continu tel que $f(0) = A$ et $f(1) = B$. Si f est homotope à extrémités fixées à un chemin dans D , son relèvement dans \tilde{M} qu'on note \tilde{f} est homotope à un chemin de M_0 . De plus, $\tilde{f}(0) = \tilde{A} \in M_0$ et $\tilde{f}(1) = \tilde{B} \in M_0$.

Soit \mathcal{K} un compact de \mathcal{P}_2 , soit $Q = \bigcup \text{im}(\tilde{f})$ où \tilde{f} est le relèvement d'un élément de \mathcal{K} vérifiant $\tilde{f}(0) = \tilde{A}$. Q est compact dans \tilde{M} puisqu'un recouvrement de Q par des ouverts donne un recouvrement de $p(Q)$ qui est compact. Comme M_1 est simplement connexe, le compact $Q \cap M_1$ est inclus dans un plongement d'un disque fermé L (figure 3). Quitte à agrandir L , on peut supposer que L contient un voisinage de \tilde{K} . Soit U un voisinage tubulaire de K dans M , c'est-à-dire un ouvert de M contenant K et difféomorphe au fibré tangent de K . On note $V = C \cap U$ qu'on relève dans M_1 en \tilde{V} . Alors $\tilde{K} \subset \tilde{V}$.

Soit $\psi : L \rightarrow \tilde{V}$ un plongement égal à l'identité au voisinage de \tilde{K} (figure 4). On peut alors prolonger ce plongement en un plongement $\tilde{\psi} : M_0 \cup L \rightarrow M_0 \cup \tilde{V}$ tel que $\tilde{\psi}$ vaille l'identité en dehors de L . Nous pouvons alors construire notre rétraction :

Pour $f \in \mathcal{K}$, on pose $R(f) = q \circ \tilde{\psi} \circ \tilde{f}$. $R(f)$ est alors un plongement C^∞ de $[0, 1]$ dans $D' = D \cup V$. R est de plus continue. Soit $f \in \mathcal{P}_1$, alors $\psi \circ \tilde{f} = \tilde{f}$ donc $R(f) = f$ et R est l'identité sur \mathcal{P}_1 .

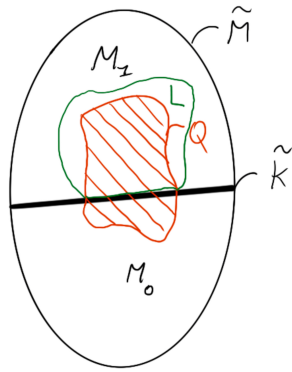


FIGURE 3 – Inclusion de $Q \cap M_1$ dans un plongement d'un disque fermé L .

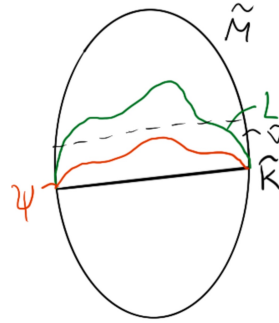


FIGURE 4 – Plongement de L dans \tilde{V} .

Notons $\mathcal{P}'_1 = Pl((I, 0, 1), (D', A, B))$, l'injection canonique $\mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}'_1$ est une équivalence d'homotopie : nous donnons ici une preuve graphique, une démonstration formelle sera faite pour un résultat similaire dans la prochaine partie (figure 5). Notons S un inverse à homotopie près de cette injection. L'application $r = S \circ R : \mathcal{K} \cup \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_1$ répond à la question.

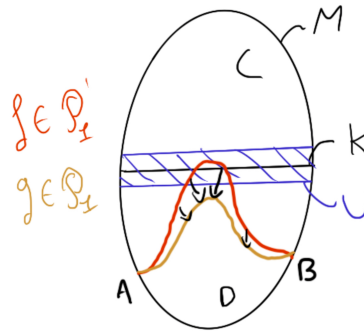


FIGURE 5 – Équivalence d'homotopie entre \mathcal{P}'_1 et \mathcal{P}_1 .

2 Démonstration du théorème 3

Soit V une surface compacte à bord non-vide, soient A et B deux éléments de ∂V . On note $Pl((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B))$ les plongements $C^\infty f : \mathbf{I} \rightarrow V$ tels que $f(0) = A$, $f(1) = B$ et $f(]0, 1[) \subset \overset{\circ}{V}$. Dans cette section, on montre le théorème 3 qui affirme que les composantes connexes par arcs de $Pl((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B))$ sont contractiles pour la topologie C^∞ .

2.1 Cas particulier facile

Avec les notations du théorème 3, supposons que les points A et B sont dans deux composantes connexes distinctes ∂V_0 et ∂V_1 du bord ∂V . On construit une variété à bord V'' en collant un disque par son bord le long de ∂V_1 . V'' étant une surface connexe à bord non vide ($\partial V_0 \neq \emptyset$), toute l'astuce de ce cas facile est contenue dans la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1.1

Toute surface connexe à bord non vide possède des groupes d'homotopie supérieurs ($i \geq 2$) triviaux.

DÉMONSTRATION 2.1.2

On considère une triangulation $\sqcup T_k$ de la surface connexe Σ à bord $\partial \Sigma$ non vide. On construit itérativement des espaces :

$$\begin{aligned} \Sigma_{i+1} &\subset \Sigma_i \subset \dots \subset \Sigma_0 = \Sigma \\ \partial \Sigma_{i+1} &\subset \partial \Sigma_i \subset \dots \subset \partial \Sigma_0 = \partial \Sigma \end{aligned}$$

via des rétracts par déformation successives des $\partial \Sigma_i$ sur les $\partial \Sigma_{i+1}$ selon les triangles adjacents (par au moins un de leurs côtés). L'espace $\tilde{\Sigma} = \bigcap \Sigma_i \subset \Sigma$ est un graphe car Σ est connexe. De plus, ces deux espaces sont homotopiquement équivalents. Ainsi $\pi_i(\Sigma) = \pi_i(\tilde{\Sigma})$ pour tout $i \geq 0$. Or, Le revêtement universel A d'un graphe est un arbre (graphe simplement connexe), donc il est contractile. Ainsi :

$$\pi_i(\Sigma) = \pi_i(\tilde{\Sigma}) = \pi_i(A) = 0$$

lorsque $i \geq 2$.

REMARQUE 2.1.3 La proposition précédente est encore vraie pour $\overset{\circ}{\Sigma}$ lorsque Σ est une surface connexe à bord non vide et la même démonstration fonctionne.

Établissons maintenant la contractilité des composantes de $Pl((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B))$. On note I' et J les segments $[1, 2]$ et $[0, 2]$ respectivement et on considère deux 1-jets j_0, j_1 de points bases A et B respectivement. On note $\mathcal{P} := Pl(I, V; j_0, j_1)$ l'espace des plongements C^∞ , $\gamma : I \rightarrow V$, de 1-jets j_0, j_1 en $0, 1$ avec $\gamma(I) \subset \overset{\circ}{V}$. On note $\mathcal{P}' = Pl(J, V''; j_0, \notin \partial V'')$ l'espace des plongements C^∞ , $\gamma : J \rightarrow V''$, de 1-jet j_0 en 0 avec $\gamma(J) \subset \overset{\circ}{V}''$ et tels que le 1-jet en 1 n'appartient pas à ∂V . De cette manière, on a $\gamma(I') \subset \overset{\circ}{V}''$. Enfin, $\mathcal{P}'' = Pl(I', V''; \notin \partial V'', \notin \partial V'')$.

LEMME 2.1.4

On a les isomorphismes suivants :

$$\pi_{i+1}(\mathcal{P}'') \xrightarrow{\sim} \pi_i(\mathcal{P})$$

pour $i \geq 0$.

DÉMONSTRATION 2.1.5

FAIT 2.1.6 \mathcal{P}' est contractile

PREUVE 2.1.7 On va construire une rétraction de \mathcal{P}' sur le singleton. On considère l'application continue :

$$H: \begin{cases} \mathcal{P}' \times I \longrightarrow \mathcal{P}' \\ \gamma, \alpha \longmapsto \tilde{\gamma} : \begin{cases} J \rightarrow V'' \\ t \mapsto \gamma(\alpha t) \end{cases} \end{cases}$$

ainsi qu'une carte $\phi : U \subset V'' \xrightarrow{\sim} B_f((0,0), 2) \cap (\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+)$ qui envoie le plongement $t \in J \mapsto (0, t)$ sur un élément γ_0 de \mathcal{P}' (donc de 1-jet j_0 en 0). Enfin, on note $F := \{\gamma \in \mathcal{P}' \mid \text{Im}(\gamma) \subset U\}$, $G := \mathcal{P}' - F$ et :

$$f: \begin{cases} \mathcal{P}' \longrightarrow \mathcal{P}' \\ \gamma \longmapsto \begin{cases} \gamma & \text{sur } G \\ \gamma/\text{diam}(\phi \circ \gamma) & \text{sur } F \end{cases} \end{cases}$$

La fonction f est continue et $f \circ H$ est un rétract par déformation de \mathcal{P}' sur le point γ_0 .

FAIT 2.1.8 L'application $\mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}''$ de restriction à I' est une fibration localement triviale.

FAIT 2.1.9 La fibre a le type d'homotopie de \mathcal{P} .

PREUVE 2.1.10 Soit f_0 un élément de \mathcal{P}'' . Comme $\gamma(I') \subset \overset{\circ}{V}''$, il existe un homéomorphisme $\phi : V'' - \text{Im}(f_0) \rightarrow V$ qui est un difféomorphisme sur $\overset{\circ}{V}''$ et tel que :

$$\phi(j_0) = j_0$$

$$\phi(J^1(f_0, 0)) = j_1$$

où $J^1(f_0, 0)$ désigne le 1-jet de f_0 en 0. La fibre est $Pl([0, 1], V'' - \text{Im}(f_0); j_0, J^1(f_0, 0))$ et est donc homéomorphe, via la composition par ϕ , à $Pl(I, V; j_0, j_1) = \mathcal{P}$.

Finalement, la suite exacte longue donnée par la fibration induit le résultat d'après 0.2.8.

LEMME 2.1.11

Les groupes $\pi_i(\mathcal{P}'')$ sont triviaux pour $i \geq 2$.

DÉMONSTRATION 2.1.12

FAIT 2.1.13 \mathcal{P}'' a le type d'homotopie de l'espace $T(\overset{\circ}{V}'')^{\neq 0}$ des vecteurs tangents non nuls à $\overset{\circ}{V}''$.

PREUVE 2.1.14 On considère l'application $\mathcal{P}'' \rightarrow T(\overset{\circ}{V}'')^{\neq 0}$ qui associe le 1-jet en 0. La fibre est homéomorphe à \mathcal{P}' donc est contractile et on conclut par 0.2.8.

L'application $T(\overset{\circ}{V}'')^{\neq 0} \rightarrow \overset{\circ}{V}''$ qui associe le point base est une fibration de fibre $\mathbf{R}^2 - 0$. Or $\pi_i(\overset{\circ}{V}'') = 0$ pour $i \geq 2$ d'après 2.1.3. De plus, $\pi_i(\mathbf{R}^2 - 0) = 0$ pour $i \geq 2$ donc la proposition 0.2.8 donne :

$$\pi_i(\mathcal{P}'') = 0$$

pour $i \geq 2$

Finalement, les lemmes précédents permettent de conclure que les composantes de \mathcal{P} sont contractiles. C'est seulement ici que nous utilisons que A et B sont sur le bord de V :

PROPOSITION 2.1.15

Lorsque A et B sont dans deux composantes connexes différentes de ∂V , alors $Pl((I, 0, 1), (V, A, B))$ est contractile.

DÉMONSTRATION 2.1.16

D'après ce qui précède, il suffit de montrer que l'inclusion $\mathcal{P} \subset Pl((I, 0, 1), (V, A, B))$ est une équivalence d'homotopie. Considérons la fibration donnée par les 1-jets $Pl((I, 0, 1), (V, A, B)) \rightarrow S_+^1$ où S_+^1 est le demi-cercle supérieur. La fibre à le type d'homotopie de $Pl((I, 0, 1), (V, j_0, B))$ et S_+^1 est contractile donc $Pl((I, 0, 1), (V, A, B))$ et $Pl((I, 0, 1), (V, j_0, B))$ sont homotopiquement équivalents d'après 0.2.8. On raisonne de la même manière pour le point B .

2.2 Cas général

On suppose à présent que les points A et B sont dans la même composante connexe C_0 de ∂V . On considère un plongement $g_0 : I \rightarrow V$ tel que $A = g_0(0)$ et $B = g_0(1)$. Quitte à reparamétriser g_0 , on peut choisir un disque plongé $\Delta \subset V$ tel que $\Delta \cap g_0(I) = g_0([1/3, 2/3])$. On note $W = V - \text{int}(\Delta)$ et $K = g_0([2/3, 1])$ ainsi que $C = g_0(1/3)$ et $f_0 : t \in I \mapsto g_0(t/3)$.

PROPOSITION 2.2.1

Il existe un homéomorphisme $\phi : V \xrightarrow{\cong} (W - K)$ entre les espaces V et $(W - K)$ qui est un difféomorphisme sur $\overset{\circ}{V}$ et tel que :

$$\phi(A) = A$$

$$\phi(B) = C$$

REMARQUE 2.2.2 Il suffit donc, pour avoir $\pi_i(Pl((I, 0, 1), (V, A, B))) = 0$ pour tout $i \geq 1$, de montrer que la composante connexe \mathcal{P}_1 de f_0 dans $Pl((I, 0, 1), (W - K, A, C))$ est contractile.

Pour cela, on va se ramener à étudier la composante connexe \mathcal{P}_2 de f_0 dans l'espace "plus gros" $Pl((I, 0, 1), (W, A, C))$ et donc se ramener au cas facile précédent. On construit maintenant un revêtement de W de la manière suivante :

- On choisit un point base $b \in W$
- D'après le théorème du voisinage tubulaire, on peut considérer la fibration $\phi : U \subset W \xrightarrow{\cong} K \times]-1, 1[$ au dessus de K (en effet, la base K est simplement connexe donc toute fibration est triviale). On note $Bas = \phi^{-1}(K \times]-1, 0[)$ et $Haut = \phi^{-1}(K \times]0, 1[)$.
- Lorsque $\gamma \in Hom_{Top^*}(S^1, (W, b))$, on associe à chaque composante connexe $]x, y[\subset \gamma^{-1}(U)$ l'élément $sgn(\gamma(y)) - sgn(\gamma(x)) \in \{-1, 0, 1\}$ où :

$$sgn(w) = \begin{cases} 1/2 & \text{sur Haut} \\ -1/2 & \text{sur Bas} \end{cases}$$

- Finalement, $f(\gamma)$ est défini comme la somme sur les composantes connexes de ces précédentes valeurs.

PROPOSITION 2.2.3

L'application $f : Hom_{Top^*}(S^1, (W, b)) \rightarrow \mathbf{Z}$ est un morphisme de groupes et elle induit un morphisme $\pi_1(W, b) \rightarrow \mathbf{Z}$ par passage au quotient.

On note $p : \hat{W} \rightarrow W$ le revêtement associé au sous-groupe $Ker(f) \leq \pi_1(W)$. C'est le revêtement de fibre \mathbf{Z} associé à la coupure K dont $Ker(f)$ est le stabilisateur.

PROPOSITION 2.2.4

On a :

- $c_0 := p^{-1}(C_0)$ et $c_1 := p^{-1}(\partial\Delta)$ sont le revêtement universel du cercle.
- $p^{-1}(K)$ est une famille $(k_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de segments disjoints d'extrémités $b_n \in c_0, d_n \in c_1$.
- Les segments k_n, k_{n+1} délimitent une surface compacte W_n homéomorphe à V et difféomorphes sur leurs intérieurs.
- Si on note a, c les relevés de A, C dans W_0 , alors l'application de composition avec p :

$$p_* : Hom^\infty((I, 0, 1), (\hat{W}, a, c)) \rightarrow Hom^\infty((I, 0, 1), (W, A, C))$$

est continue.

On note \hat{f}_0 le relevé de f_0 d'extrémités a, c et $\hat{\mathcal{P}}_1$ la composante connexe de \hat{f}_0 dans $Pl((I, 0, 1), (W_0 - (k_0 \cup k_1), a, c))$. On note $\hat{\mathcal{P}}_2$ la composante connexe de \hat{f}_0 dans $p_*^{-1}(\mathcal{P}_2)$.

PROPOSITION 2.2.5

p_* induit des homéomorphismes $\mathcal{P}_1 \simeq \hat{\mathcal{P}}_1$ et $\mathcal{P}_2 \simeq \hat{\mathcal{P}}_2$.

DÉMONSTRATION 2.2.6

Ce sont des homéomorphismes locaux et injectifs donc des homéomorphismes sur leurs images.

PROPOSITION 2.2.7

Les applications canoniques $\pi_i(\mathcal{P}_1) \rightarrow \pi_i(\mathcal{P}_2)$ sont des injections.

DÉMONSTRATION 2.2.8

On note $\hat{\mathcal{P}}$ le sous-espace de $\hat{\mathcal{P}}_2$ des plongements homotopes à extrémités fixes à un élément de $\hat{\mathcal{P}}_1$. Tous les éléments de $\hat{\mathcal{P}}_2$ sont homotopes à extrémités fixes à \hat{f}_0 donc $\hat{\mathcal{P}}_2 \subset \hat{\mathcal{P}}$. Les applications canoniques $\pi_i(\hat{\mathcal{P}}_1) \rightarrow \pi_i(\hat{\mathcal{P}})$ sont des injections d'après 4. Donc $\pi_i(\hat{\mathcal{P}}_1) \rightarrow \pi_i(\hat{\mathcal{P}}_2)$ aussi. Enfin, les homéomorphismes 2.2.5 induisent des isomorphismes en homotopie, d'où le résultat voulu.

Nous allons maintenant pouvoir démontrer le théorème 3 en toute généralité :

DÉMONSTRATION 2.2.9

Si A et B sont dans des composantes connexes différentes de ∂V , alors $Pl((I, 0, 1), (V, A, B))$ est contractile d'après 2.1.15. Sinon, A et B sont dans la même composante connexe de ∂V . On a $\pi_i(\mathcal{P}_2) = 0$ d'après le cas particulier 2.1.15 donc $\pi_i(\mathcal{P}_1) = 0$ d'après la proposition 2.2.7 précédente. La remarque 2.2.2 permet de conclure.

3 Plongement du cercle ou du segment dans une surface

Dans cette partie nous allons démontrer les théorèmes suivants :

THÉORÈME 5 Soit V une surface compacte, c un point du cercle S_1 et f_0 un plongement de S_1 dans V . On note j le 1-jet de f_0 en c . On rappelle que j correspond alors à un vecteur tangent à V au point c . Si on note $Pl(S_1, V, j)$ l'espace des plongements de S_1 dans V ayant j pour 1-jet en c , alors les composantes connexes de $Pl(S_1, V, j)$ sont contractiles pour la topologie C^∞ .

THÉORÈME 6 Avec les mêmes hypothèses que pour le théorème 3, soit ∂V_1 une composante connexe du bord de V . On note $Pl((I, 0, 1), (V, A, \partial V_1))$ les plongements $C^\infty f : I \rightarrow V$ tels que $f(0) = A, f(1) \in \partial V_1$ et $f(]0, 1[) \subset \overset{\circ}{V}$. Les composantes connexes de $Pl((I, 0, 1), (V, A, \partial V_1))$ sont contractiles.

DÉMONSTRATION 3.0.1

Montrons d'abord que le théorème 3 implique le théorème 5 :

Pour cela nous allons construire un certain plongement du disque dans V . Coupons le cercle S_1 en deux arcs J et J' tels que c soit le centre de J' . Notons a et b les points de jonction de ces deux arcs. On peut naturellement trouver un isomorphisme ϕ entre J' et le diamètre du disque D_2 que l'on notera D_1 . Quitte à prendre J' assez petit, on peut supposer qu'il existe un plongement $g : D_2 \rightarrow V$ tel que $f_{0,J'} = g \circ \phi$ et que $f_0(J)$ n'intersecte $U = g(D_2)$ qu'en $A = f_0(a)$ et $B = f_0(b)$. (figure 6)

Notons $V' = V - \text{int}(U)$, c'est une variété compacte à bord. Plongeons I dans V' de la manière suivante :

On identifie J à I et on construit un plongement $g_0 : I \rightarrow V'$ à partir de $f_{0,J}$ tel que $g_0(0) = A$ et $g_0(1) = B$.

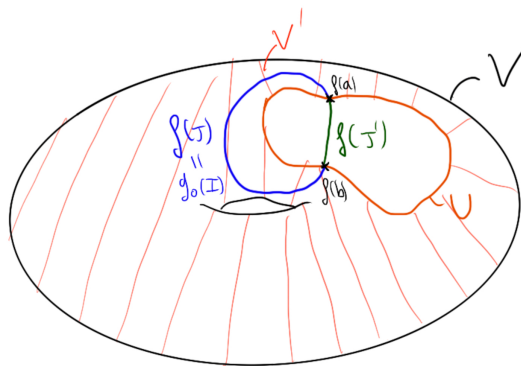


FIGURE 6 – Construction de la variété V'

Notons enfin j_0 (respectivement j_1) le jet d'ordre infini de g_0 en 0 (respectivement en 1).

PROPOSITION 3.0.2

Avec ces notations et hypothèses, les espaces $Pl(I, V', j_0, j_1)$ et $Pl(S_1, V, j)$ ont même type d'homotopie.

Le théorème 5 se déduira du théorème 3 grâce à la proposition 3.0.3 :

PROPOSITION 3.0.3

Soit $g \in Pl((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B))$. Soit $r \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$, on note j_0 et j_1 les r -jets de g en 0 et en 1 et $Pl(\mathbf{I}, V, j_0, j_1)$ le sous-espace de $Pl((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B))$ dont les éléments ont j_0 et j_1 pour r -jets en 0 et 1. Alors l'injection canonique de $Pl(\mathbf{I}, V, j_0, j_1)$ dans $Pl((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B))$ est une équivalence d'homotopie.

Ainsi, les deux propositions combinées donnent une équivalence d'homotopie entre $Pl((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B))$ et $Pl(\mathbf{S}_1, V, j)$, le théorème 3 implique donc le théorème 5.

Démontrons d'abord la proposition 3.0.3, nous le ferons pour $r = 1$, la démonstration étant analogue pour les autres rangs.

Dans le cas $r = 1$, on obtient une fibration $Pl((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B)) \longrightarrow T_A V \times T_B V$ qui envoie un plongement sur ses 1-jets en 0 et en 1 (qui sont alors des éléments des espaces tangents à V en A et B). La fibre est alors $Pl(\mathbf{I}, V, j_0, j_1)$. L'injection étudiée est donc l'injection d'une fibre dans l'espace total d'une fibration dont la base est contractile, c'est donc une équivalence d'homotopie.

Montrons maintenant la proposition 3.0.2 :

Soit $Pl_{J'}(\mathbf{S}_1, V, f_0)$ l'espace des plongements de \mathbf{S}_1 dans V qui coïncident avec f_0 sur J' . L'application canonique $Pl(\mathbf{I}, V', j_0, j_1) \longrightarrow Pl_{J'}(\mathbf{S}_1, V, f_0)$ est une équivalence d'homotopie, l'intuition étant que si l'on prend un plongement de \mathbf{I} dans V' dont les jets aux extrémités coïncident avec ceux de f_0 , alors on peut naturellement le prolonger en un plongement de \mathbf{S}_1 sur V en "rattachant" f_0 à ce plongement et si l'on prend un plongement du cercle qui coïncide avec f_0 sur J' , alors sa restriction à J fournit un plongement du segment dans V' dont les jets en 0 et 1 sont ceux recherchés.

De plus, l'inclusion : $Pl_{J'}(\mathbf{S}_1, V, f_0) \longrightarrow Pl(\mathbf{S}_1, V, j)$ est une équivalence d'homotopie. En effet, si un chemin a j pour 1-jet en c , il coïncide au premier ordre avec f_0 en c et on peut alors le redresser pour qu'il coïncide avec f_0 sur tout J' , ce qui nous donnera un élément de $Pl_{J'}(\mathbf{S}_1, V, f_0)$ (figure 7).

Ces deux équivalences d'homotopies donnent le résultat.

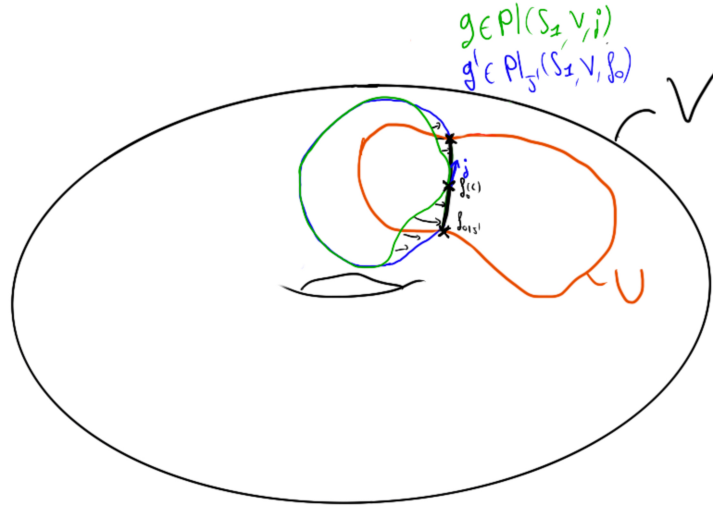


FIGURE 7 – Équivalence d'homotopie entre $Pl_{j_0}(S_1, V, f_0)$ et $Pl(S_1, V, j)$

Démontrons maintenant le théorème 6 :

Comme pour le théorème 3, nous devons à nouveau distinguer deux cas selon que $A \in \partial V_1$ ou non.

Supposons d'abord que A soit dans une composante ∂V_0 distincte de ∂V_1 . Nous noterons de nouveau $\mathcal{P}' = Pl(I, V'', j_0, \notin \partial V'')$ les plongements de I dans V'' la surface obtenue en collant un disque au bord ∂V_1 ayant j_0 pour jet en 0 et qui envoient $]0, 1]$ sur $\overset{\circ}{V}''$. Considérons la fibration $\mathcal{P}' \rightarrow (V'' - \partial V'')$ qui à f associe $f(1)$. Comme dans le cas facile du théorème 3, on démontre que la fibre F de cette fibration est contractile :

FAIT 3.0.4 La fibre F est homotope à $Pl((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, \partial V_1))$.

PREUVE 3.0.5 En effet, pour $v \in V'' - \partial V''$, il existe un homéomorphisme $\phi : V/\partial V_1 \rightarrow V''$ qui est un difféomorphisme sur $\overset{\circ}{V}$ et tel que :

- Si on note $x \in V/\partial V_1$ l'image de ∂V_1 , alors $\phi(x) = v$
- ϕ est tangent à l'identité en A

Or, cette fibre F correspond à l'ensemble des plongements $f : I \rightarrow V''$ ayant j_0 pour jet en 0 et dont l'autre point d'extrémité est v . Via ϕ , la fibre est donc homéomorphe à $Pl((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, \partial V_1))$, donc ils sont homotopiquement équivalents.

D'après 2.1.6, l'espace \mathcal{P}' est contractile donc la fibration et la proposition 0.2.8 nous donnent :

$$\pi_{i+1}(V'' - \partial V'') = \pi_i(F)$$

pour tout $i \geq 1$. Comme $V'' - \partial V''$ est connexe à bord non vide, la proposition 2.1.1 permet de conclure :

$$0 = \pi_{i+1}(V'' - \partial V'') = \pi_i(F) = \pi_i(Pl((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, \partial V_1)))$$

L'espace $Pl((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, \partial V_1))$ a ses composantes connexes par arcs contractiles. Le théorème est alors démontré dans ce cas particulier.

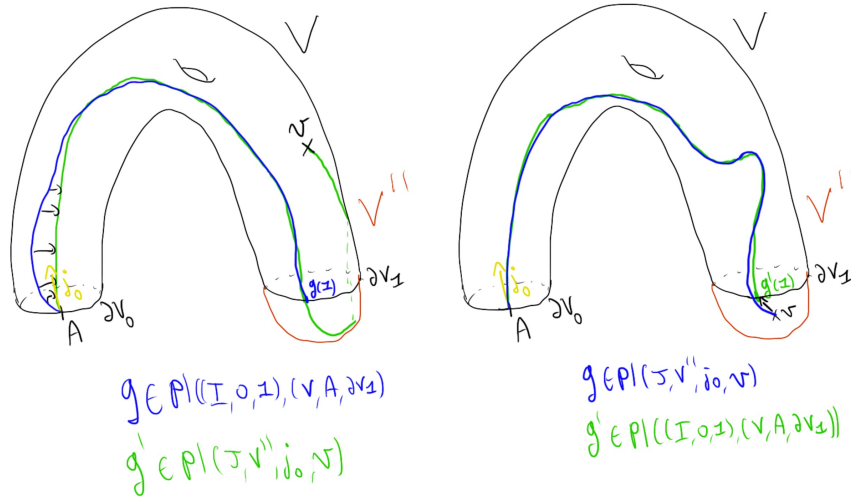


FIGURE 8 – Équivalence d'homotopie entre $Pl(\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, \partial V_1)$ et $Pl(\mathcal{J}, V'', j_0, v)$

Si $A \in \partial V_1$, soit $X = \partial V_1 - \{A\}$. L'application $Pl(\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, \partial V_1) \rightarrow X$ qui à un plongement f associe $f(1)$ est une fibration localement triviale. La fibre correspond aux plongements de \mathbf{I} dans V partant de A et dont l'extrémité en 1 est fixée, ses composantes connexes sont donc contractiles d'après le théorème 3. De plus, la base X est homotope à une droite donc est contractile, donc de surcroît, l'espace total est contractile, d'où le résultat.

4 Démonstration du théorème 2

Nous commencerons cette preuve par donner un résultat sur un groupe de difféomorphismes du disque :

PROPOSITION 4.0.1

Soit $\mathcal{D}(\mathbf{D}, \partial\mathbf{D})$ le groupe des difféomorphismes du disque valant l'identité sur son bord, muni de la topologie C^∞ . Alors $\mathcal{D}(\mathbf{D}, \partial\mathbf{D})$ est contractile.

DÉMONSTRATION 4.0.2

Considérons \mathbf{D}^+ le demi-disque supérieur. Son bord $\partial\mathbf{D}^+$ est constitué d'un diamètre J et du demi-cercle que l'on notera \mathbf{S}^+ . J et \mathbf{S}^+ s'intersectent en deux points anguleux A et B . Soit \mathcal{E} l'espace des plongements de \mathbf{D}^+ dans \mathbf{D} tangents à l'identité le long de \mathbf{S}^+ . De même qu'en 2.1.7, on montre que l'espace \mathcal{E} est contractile. Soit \mathcal{P} l'espace des plongements de J dans \mathbf{D} tangents à l'identité en A et en B . \mathcal{P} vérifie les hypothèses du théorème 3 et est donc contractile. En considérant la fibration $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$ qui correspond à la restriction sur J des plongements de \mathbf{D}^+ dans \mathbf{D} , on obtient donc que la fibre est contractile. Or cette fibre correspond à l'espace des difféomorphismes de \mathbf{D}^+ qui valent l'identité sur J et sont tangents à l'identité sur \mathbf{S}^+ .

D'autre part, on note \mathcal{E}' le produit fibré $\mathcal{E} \times_{\mathcal{P}} \mathcal{E}$ dans la catégorie Top . La contractilité de \mathcal{E} implique celle de \mathcal{E}' . On note $\Gamma_{Int}(S)$ l'espace des champs de vecteurs non nuls sur S qui pointent vers l'intérieur du disque D . Enfin, on considère la fibration $\mathcal{D}(\mathbf{D}, \partial\mathbf{D}) \rightarrow \mathcal{E}'$ de fibre $\Gamma_{Int}(S)$. La proposition 0.2.8 implique que $\mathcal{D}(\mathbf{D}, \partial\mathbf{D})$ et $\Gamma_{Int}(S)$ ont même type d'homotopie. Or, si on note N le fibré normal unitaire intérieur de S , alors l'application $H : \Gamma_{Int}(S) \times I \rightarrow \Gamma_{Int}(S)$ définie par :

$$H(X, t)(x) = (1 - t)X(x) + tN(x)$$

pour $x \in S$, est un rétract par déformation de $\Gamma_{Int}(S)$ sur le singleton N . Donc $\Gamma_{Int}(S)$ est contractile ainsi que l'espace $\mathcal{D}(\mathbf{D}, \partial\mathbf{D})$.

Voyons maintenant une version générale de ce résultat :

PROPOSITION 4.0.3

Soit V une surface compacte connexe à bord non-vide, soit M une partie non-vide de ∂V et $P \in M$. Soit $\mathcal{D}(V, M, P)$ le groupe des difféomorphismes de V valant l'identité sur M et tangents à l'identité en P . Alors les composantes connexes de ce groupe sont contractiles.

DÉMONSTRATION 4.0.4

Dans le cas du disque, cette proposition découle de la proposition précédente :

En effet, M est alors une partie de \mathbf{S}_1 . On peut alors considérer la fibration de $\mathcal{D}(V, M, P)$ sur l'espace des difféomorphismes de \mathbf{S}_1 valant l'identité sur M et tangents à l'identité sur P . Cet espace est contractile puisqu'on peut plonger $\mathbf{S}_1 - M$ dans \mathbf{R} et deux éléments de cet espace ne diffèrent qu'en dehors de M . De plus, la fibre est $\mathcal{D}(\mathbf{D}, \partial\mathbf{D}, P)$ qui a le type d'homotopie de $\mathcal{D}(\mathbf{D}, \partial\mathbf{D})$ donc est contractile. L'espace total, qui est $\mathcal{D}(V, M, P)$, est donc contractile.

Dans le cas général, on considère un plongement du segment dans V ayant pour extrémités P et $Q \in \partial V$, qu'on note J . On note ∂V_1 la composante de Q dans ∂V et \mathcal{P} l'ensemble des plonge-

ments $f : J \rightarrow V$ tangents à l'identité en P et tels que $f(Q) \in \partial V_1$. D'après le théorème 6, les composantes de \mathcal{P} sont contractiles. Nous allons alors "découper" la surface V selon J , cela nous donne donc une variété V_1 . Le point P (respectivement le segment J) donne deux points P' et P'' (respectivement J' et J'') dans V_1 . On note enfin $M_1 = M \cup J' \cup J'' \subset V_1$ (Figure 9).

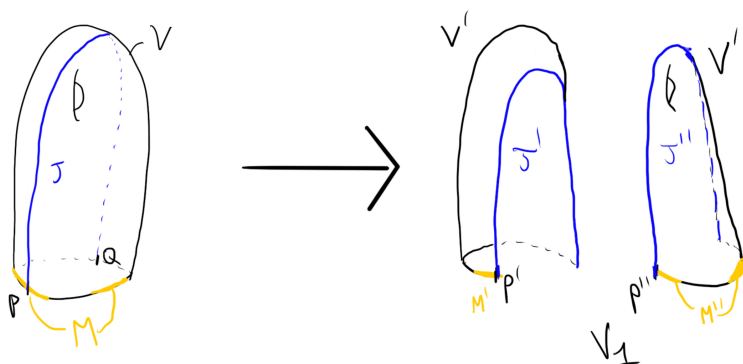


FIGURE 9 – Découpage de V en V_1

Considérons la fibration $\mathcal{D}(V, M, P) \rightarrow \mathcal{P}$ qui consiste en la restriction des difféomorphismes à J . D'une manière similaire à la proposition précédente, sa fibre correspond à l'ensemble des difféomorphismes de V_1 valant l'identité sur M_1 et tangents à l'identité en P' et P'' .

Si V_1 est connexe, ce groupe a le type d'homotopie de $\mathcal{D}(V_1, M_1, P')$

Si V_1 a deux composantes V' et V'' , notons $M' = M_1 \cap V'$ et $M'' = M_1 \cap V''$, alors un élément de ce groupe correspond, à homotopie près, à la donnée d'un élément de $\mathcal{D}(V', M', P')$ et d'un élément de $\mathcal{D}(V'', M'', P'')$. Autrement dit, la fibre a le type d'homotopie de $\mathcal{D}(V', M', P') \times \mathcal{D}(V'', M'', P'')$. La contractilité de ces espaces implique donc la contractilité de $\mathcal{D}(V, M, P)$

Nous pouvons alors procéder par récurrence sur le genre de la surface :

Au rang 0, la surface est équivalente au disque et ce cas a été traité.

Et si la proposition est vraie au rang n , alors une découpe bien choisie d'une surface V_{n+1} de genre $n + 1$ par le procédé précédent nous donne une surface V_n de genre n . Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{D}(V_n, M, P)$ est contractile et d'après le résultat obtenu juste avant, $\mathcal{D}(V_{n+1}, M, P)$ sera aussi contractile.

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer le théorème 2 :

DÉMONSTRATION 4.0.5 — [THÉORÈME 2]

On considère donc la surface compacte connexe V et v un point qui lui est intérieur. Soit S un cercle plongé dans V et contenant v . On note \mathcal{P} l'espace des plongements de S dans V tangents à l'injection canonique en v . On considère la fibration $\mathcal{D}(V, v) \rightarrow \mathcal{P}$ (où $\mathcal{D}(V, v)$ dénote l'espace des difféomorphismes de V tangents à l'identité en V) qui envoie un difféomorphisme sur sa restriction à S . On sait que S est contractile par le théorème 5, il suffit alors de montrer que la fibre de cette fibration est contractile pour obtenir le théorème 2. Cette fibre correspond à des en-

sembles de difféomorphismes qui coïncident sur S .

Pour cela, découpons V selon S pour créer une variété V_1 comme fait dans la proposition précédente. S éclate alors en S' et S'' et v en v' et v'' . V_1 est de plus une variété compacte à bord ayant au plus deux composantes connexes.

Si V_1 est connexe, alors en considérant la fibre au-dessus de l'identité de S , on voit que la fibre a le type d'homotopie de l'ensemble des difféomorphismes de V_1 valant l'identité sur $S' \cup S''$ et tangents à l'identité en v' , que l'on note $\mathcal{D}(V_1, S' \cup S'', v')$ selon la proposition 6.

Si V_1 a deux composantes V' et V'' , alors par le même raisonnement la fibre a le type d'homotopie de l'espace $\mathcal{D}(V', S', v') \times \mathcal{D}(V'', S'', v'')$.

Dans les deux cas, la fibre est équivalente homotopiquement à un espace qui est contractile par la proposition 4.0.3, donc est contractile. Le théorème 2 est démontré.

5 Démonstration du théorème 1

La dernière étape de notre preuve est de relier homotopiquement l'espace des difféomorphismes de V à l'espace des difféomorphismes de V tangents à l'identité en $v \in \text{int}(V)$.

Fixons $v \in \text{int}(V)$, notons \mathcal{D}' l'espace des difféomorphismes tangents à l'identité en v et \mathcal{D}'' l'espace des difféomorphismes fixant v .

5.1 Cas général

PROPOSITION 5.1.1 — [COMPARAISON DE \mathcal{D} ET \mathcal{D}'']

Supposons que V ne soit pas difféomorphe à \mathbf{S}_2 , \mathbf{P}_2 , \mathbf{T} , \mathbf{T}' , \mathbf{M} ou \mathbf{C} . Alors pour $i \geq 1$, l'injection canonique induit un isomorphisme $\pi_i(\mathcal{D}'') \xrightarrow{\sim} \pi_i(\mathcal{D})$. On a de plus une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \pi_1(V, v) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{D}'') \longrightarrow \pi_0(\mathcal{D}) \longrightarrow 1$$

DÉMONSTRATION 5.1.2

On considère la fibration $\mathcal{D} \longrightarrow V$ qui envoie $f \in \mathcal{D}$ sur $f(v)$, elle est localement triviale et de fibre \mathcal{D}'' . Nous utilisons alors plusieurs résultats préliminaires : tout d'abord nous pouvons déduire de la fibration une suite longue de groupes d'homotopie :

$$\dots \longrightarrow \pi_i(\mathcal{D}'') \longrightarrow \pi_i(\mathcal{D}) \longrightarrow \pi_i(V) \longrightarrow \pi_{i-1}(\mathcal{D}'') \longrightarrow \dots$$

Or, pour $i \geq 2$ le groupe $\pi_i(V)$ est nul (car V n'est pas difféomorphe à \mathbf{S}_2 ou \mathbf{P}_2). On en déduit les isomorphismes

$$\pi_i(\mathcal{D}'') \xrightarrow{\sim} \pi_i(\mathcal{D}) \text{ pour } i \geq 2$$

et la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{D}'') \longrightarrow \pi_1(\mathcal{D}) \longrightarrow \pi_1(V) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{D}'') \longrightarrow \pi_0(\mathcal{D}) \longrightarrow 1$$

LEMME 5.1.3

L'image de $\pi_1(\mathcal{D})$ dans cette suite exacte est contenue dans le centre de $\pi_1(V)$

Alors, puisqu'en dehors des surfaces particulières citées plus haut, le centre de $\pi_1(V)$ est nul, on en déduit la suite exacte.

Prouvons le lemme :

Puisque nous travaillons sur des groupes topologiques, la suite exacte donnée au-dessus est une suite exacte de groupes et $\pi_1(\mathcal{D})$ est commutatif. Son image dans la suite exacte est donc un

sous-groupe commutatif et distingué de $\pi_1(V, v)$. Montrons que les éléments de cette image fixent les automorphismes intérieurs de $\pi_1(V, v)$ (ce qui prouve qu'ils sont des éléments du centre).

Soit α élément de l'image, il correspond donc à un lacet $t \rightarrow f_t$ de \mathcal{D} en id et à un lacet $t \rightarrow f_t(v)$ de V en v . Soit β un élément de $\pi_1(V, v)$ correspondant à un lacet $b : [0, 1] \rightarrow V$. Alors l'application $(t, u) \rightarrow f_t(b(u))$ est continue, $[t \rightarrow f_t(b(0))] = [t \rightarrow f_t(v)] = \alpha$ et $[t \rightarrow f_t(b(1))] = \beta \cdot \alpha \cdot \beta^{-1}$. C'est donc une homotopie entre les lacets de classe α et $\beta \cdot \alpha \cdot \beta^{-1}$, d'où le lemme.

PROPOSITION 5.1.4 — [COMPARAISON DE \mathcal{D}' ET \mathcal{D}'']

Supposons ici que V n'est pas difféomorphe à $\mathbf{S}_2, \mathbf{P}_2$ ou \mathbf{D}_2 . Alors pour $i \geq 1$ l'injection canonique induit des isomorphismes :

$$\pi_i(\mathcal{D}') \xrightarrow{\sim} \pi_i(\mathcal{D}'')$$

On a de plus une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbf{O}(2)) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{D}') \longrightarrow \pi_0(\mathcal{D}'') \longrightarrow \pi_0(\mathbf{O}(2)) \longrightarrow 1$$

DÉMONSTRATION 5.1.5

Notons $J_v^1 \mathcal{D}''$ l'espace des 1-jets en v des éléments de \mathcal{D}'' . On a naturellement une fibration $\mathcal{D}'' \rightarrow J_v^1 \mathcal{D}''$ localement triviale dont la fibre (considérée au-dessus de l'identité) est \mathcal{D}' . Par les coordonnées locales en $T_v V$, on a une injection $\mathbf{O}(2) \hookrightarrow J_v^1 \mathcal{D}''$, c'est en fait une équivalence d'homotopie donc $\mathbf{O}(2)$ joue le rôle de base de la fibration. En utilisant de nouveau la suite longue de fibration, puisque $\pi_i(\mathbf{O}(2)) = 0$ pour $i \geq 2$, cela nous donne des isomorphismes $\pi_i(\mathcal{D}') \xrightarrow{\sim} \pi_i(\mathcal{D}'')$ pour $i \geq 2$ et une suite longue :

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{D}') \longrightarrow \pi_1(\mathcal{D}'') \longrightarrow \pi_1(\mathbf{O}(2)) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{D}') \longrightarrow \pi_0(\mathcal{D}'') \longrightarrow \pi_0(\mathbf{O}(2)) \longrightarrow 1$$

Il nous reste à prouver que la troisième flèche est triviale. Pour cela, considérons un lacet $f_t (t \in [0, 1])$ de \mathcal{D}'' en id . Soit U un petit disque plongé dans V de centre v . Si $x \in U - \{v\}$ est assez proche de v , l'application $t \rightarrow f_t(x)$ est un lacet en x dans $U - \{v\}$. On note α sa classe dans $\pi_1(U - \{v\})$ et α' celle dans $\pi_1(V - \{v\})$. De manière analogue au lemme de la proposition précédente, on montre que α' est dans le centre de $\pi_1(V - \{v\})$, qui est trivial d'après les résultats préliminaires. En outre, le morphisme canonique $\pi_1(U - \{v\}) \rightarrow \pi_1(V - \{v\})$ est injectif car V n'est pas difféomorphe à \mathbf{S}_2 . Donc α est nul.

Montrons alors que le morphisme $\pi_1(\mathcal{D}'') \rightarrow \pi_1(\mathbf{O}(2))$ est trivial :

Dans $U - \{v\}$, le lacet $t \rightarrow f_t(x)$ est voisin du lacet $t \rightarrow f'_t(x)(x - v)$ et homotope à un point. Donc l'image du lacet (f_t) par le morphisme de fibration est nulle, on en déduit que le morphisme est nul et on obtient la suite exacte souhaitée.

Conclusion : Pour $i \geq 1$, les deux propositions combinées nous donnent un isomorphisme $\pi_i(\mathcal{D}) \cong \pi_i(\mathcal{D}')$ lorsque V n'est pas une des surfaces particulières citées. On obtient donc une équivalence faible d'homotopie entre \mathcal{D}_0 et la composante neutre de \mathcal{D}' , qui est contractile d'après le théorème 2. C'est en fait une équivalence forte par le théorème de Whitehead, d'où le résultat.

5.2 Traitement des cas particuliers

Il nous reste maintenant à étudier les surfaces particulières, commençons par celles qui satisfont la proposition 2 :

- *Tore* \mathbf{T} possède une structure de groupe de Lie, pour $x \in \mathbf{T}$, la translation par x t_x est un difféomorphisme de \mathbf{T} et l'application $x \rightarrow t_x$ est une section de la fibration $\mathcal{D} \rightarrow \mathbf{T}$. Par la suite exacte de fibration, la proposition 2 et le théorème 2, la fibration entraîne une équivalence d'homotopie entre \mathcal{D}_0 (composante neutre de \mathcal{D}) et \mathbf{T} . On a de plus un isomorphisme $\pi_0(\mathcal{D}'') \cong \pi_0(\mathcal{D})$.
- *Bouteille de Klein* Comme dit en partie préliminaire, le groupe fondamental de \mathbf{T}' est libre à deux générateurs α et β quotientés par $\alpha\alpha = \beta\beta$. Son centre est engendré par α^2 et contient l'image de $\pi_1(\mathcal{D})$. Montrons qu'elle contient α^2 :
 Pour cela, considérons le revêtement à deux feuilletés $p : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ obtenu en identifiant \mathbf{T}' à $\mathbf{T} = \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$ quotienté par la relation $(x, y) = (x + \pi, -y)$, p est alors l'application canonique de quotient. On peut supposer $v = p(0, 0)$. Les éléments $p(\mathbf{S}_1 \times 0)$ et $p(0 \times \mathbf{S}_1)$ sont des lacets de \mathbf{T}' et on peut supposer que leurs classes respectives sont α^2 et β . Soit g_t la translation de \mathbf{T} associée au point $(2\pi t, 0)$, c'est un difféomorphisme comme vu précédemment qui passe au quotient dans \mathbf{T}' . On obtient ainsi un difféomorphisme f_t de \mathbf{T}' . Ceci nous donne donc un lacet f_t de \mathcal{D} en l'identité ayant pour image dans $\pi_1(\mathbf{T}')$ α^2 par construction (puisque $f_t(v) = f_t(p(0, 0)) = p(e^{2i\pi t}, 0)$ ce qui correspond bien à $p(\mathbf{S}_1 \times 0)$.
 L'image de $\pi_1(\mathcal{D})$ est donc exactement le centre de $\pi_1(\mathbf{T}')$. En utilisant la proposition 5.1.4 et le théorème 2, on en déduit que pour $i \geq 2$, $\pi_i(\mathcal{D}) = 0$ et $\pi_1(\mathcal{D})$ est cyclique d'ordre infini. On a donc une équivalence faible d'homotopie entre \mathcal{D}_0 et $\mathbf{SO}(2)$.
- *Cylindre* $\pi_1(\mathbf{C})$ est libre à un générateur et la rotation autour de l'axe de \mathbf{C} fournit un lacet dans \mathcal{D} dont l'image dans $\pi_1(\mathbf{C})$ est un générateur du groupe. Comme pour la bouteille de Klein, on en déduit que \mathcal{D}_0 a le type d'homotopie de $\mathbf{SO}(2)$.
- *Möebius* $\pi_1(\mathbf{M}) = \mathbf{Z}$ i.e c'est le groupe libre à un générateur α . En parcourant un lacet représentant α , on arrive en v avec une orientation opposée à celle de départ. α ne peut donc pas s'écrire comme la classe d'un lacet $t \rightarrow f_t(v)$ avec f_t un lacet de \mathcal{D} en l'identité, donc l'image de $\pi_1(\mathcal{D})$ ne contient pas α . En utilisant le revêtement de \mathbf{M} par \mathbf{C} , d'une manière similaire à la bouteille de Klein, on obtient qu' α^2 est dans l'image de $\pi_1(\mathcal{D})$. Donc \mathcal{D}_0 a le type d'homotopie de $\mathbf{SO}(2)$.

Il nous reste maintenant à traiter les trois autres surfaces particulières :

- *Sphère et plan projectif* Dans les deux cas, \mathcal{D} contient $\mathbf{SO}(3)$ comme sous-groupe. Pour \mathbf{P}_2 , on considère la fibration $\mathcal{D} \rightarrow J_v^1\mathcal{D}$ qui envoie un difféomorphisme sur sa différentielle en v , de fibre \mathcal{D}' . Sa restriction à $\mathbf{SO}(3)$ est une équivalence d'homotopie. On peut en dire pareil pour \mathbf{S}_2 à condition de remplacer l'espace d'arrivée par sa composante connexe constituée de repères orientés positivement et tangents à \mathbf{S}_2 . Ceci découle du fait qu'un élément de $\mathbf{SO}(3)$ correspond à un repère orthonormé direct et qu'on obtient \mathbf{P}_2 en quotientant \mathbf{S}_2 par l'antipodale. Comme \mathcal{D}' a ses composantes contractiles, on en déduit l'équivalence d'homotopie entre \mathcal{D}_0 et $\mathbf{SO}(3)$.
- *Disque* De même qu'au-dessus, $\mathcal{D}(\mathbf{D})$ contient $\mathbf{SO}(2)$ comme sous-groupe et on considère la fibration restreinte $\mathbf{SO}(2) \rightarrow J_v^1\mathcal{D}$ qui est une équivalence d'homotopie entre $\mathbf{SO}(2)$ et une des deux composantes de $J_v^1\mathcal{D}$. On en conclut que \mathcal{D}_0 a le type d'homotopie de $\mathbf{SO}(2)$.

Références

- [1] Gramain, André. *Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte*. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Série 4, Tome 6 (1973) no. 1*, pp. 53-66. doi : 10.24033/asens.1242. (lien)
- [2] Simeon, Romain. *Classification des surfaces compactes* (lien)
- [3] Horel, Geoffroy. *Cours de topologie algébrique*, École Normale Supérieure, 2020-2021
- [4] Oancea, Alexandru. *Notes de cours de Géométrie Différentielle*, École Normale Supérieure, 2020-2021
- [5] Itenberg, Ilia. *Topologie Algébrique*, École Normale Supérieure, 2017-2018