Introduction au Domaine de Recherche - Invariance conforme de modèles de physique statistique planaires

Paul Cahen

Septembre 2024

Résumé

Ce document constitue mon *introduction au domaine de recherche*, élaborée en vue de l'obtention du diplôme de l'ENS. Il présente certaines des directions de recherche qui guideront ma thèse ces (trois !) prochaines années, de manière accessible à des jeunes étudiants.

1 Introduction

Un certain nombre de questions provenant de la physique théorique ont conduit à la définition et l'étude de plusieurs modèles mathématiques ; une classe importante de ces modèles dont je parlerai sont les modèles de spins sur des réseaux (*lattice spin-models* en anglais). Ces modèles ont des intérêts pour les physiciens, intérêts dont je préfère ne pas parler car je ne suis pas (aspirant) physicien, et ils ont été largement étudiés par eux ; notamment de nombreuses *prédictions* leur sont dues. Mais ces modèles ont aussi un intérêt pour les mathématiciens : ils sont à la fois assez simples à définir, et à la fois regorgent de questions très riches mathématiquement ! J'aimerais convaincre mes lecteurs de la profondeur (pour nous, mathématiciens) des questions soulevées par ces modèles et les physiciens avec eux.

2 Quelques premières définitions - le modèle d'Ising et le Champs Libre Gaussien Discret

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini, muni d'un *bord* $\partial G \subset V$ (puisque nous nous intéressons à des modèles sur des réseaux, souvent G sera une partie de $\mathbb{Z}^d$ munie de toutes ses arêtes, et ∂G l'ensemble des sommets qui ont un voisin hors de G) ; nous allons définir des champs de spin aléatoires sur l'ensemble des sommets V de G, c'est-à-dire une variable aléatoire dans $\mathbb{R}^V$.

Pour cela, si $\sigma \in \mathbb{R}^V$, on définit l'*énergie* de la configuration σ comme

$$H(\sigma) = \sum_{x \sim y} (\sigma_x - \sigma_y)^2 \tag{1}$$

Remarque. Vu la forme de la définition de l'énergie ci-dessus, les modèles de spin que nous allons introduire seront *avec interaction au plus proche voisin* : les spins n'interagissent directement qu'avec les spins de sommets voisins.

Le premier modèle que nous allons définir est le *modèle d'Ising* :

Le modèle d'Ising Tous les résultats mentionnés sans citation sont démontrés rigoureusement dans les notes de cours [7] ; on pourra aussi consulter une approche plus calculatoire et inspirée des raisonnements des physiciens dans [14].

Définition (Modèle d'Ising)**.** Le modèle d'Ising à température inverse $\beta > 0$ est la mesure de probabilités $\mu_\beta^{\mathrm{Is}} = \mu_{\beta,G}^{\mathrm{Is}}$ sur l'ensemble $\{\pm 1\}^V$ dont la densité par rapport à la mesure uniforme est

$$\mu_\beta^{\mathrm{Is}}(\sigma) \propto e^{-\beta H(\sigma)} \tag{2}$$

Remarque. Le modèle d'Ising a été introduit (comme son nom ne l'indique pas) par Lenz en 1920 [9] pour modéliser un phénomène de transition de phase observé par Curie en 1895 [1] ; en 1924, son étudiant Ising montre que ce modèle n'admet pas de transition de phase en dimension 1 [8] (voir plus bas pour une définition de la *transition de phase*), ce qui a pour un temps désintéressé les physiciens du modèle. Ce n'est qu'en 1936 qu'un argument de Peierls démontre la présence d'une transition de phase en dimension $d \geq 2$ [10].

Remarque. Étant donné la dépendance en l'énergie (et le fait que $\beta > 0$), le système a tendance à favoriser les configurations de spins pour lesquelles l'énergie est faible, c'est-à-dire les configurations où il y a peu de voisins de signes opposés.

Remarque. Pour les physiciens, le paramètre β est censé être (proportionnel à) l'inverse de la température du système ; de plus, le hamiltonien H devrait représenter l'énergie physique d'une configuration. La nomenclature est bien choisie !

Remarque. Plus généralement, on peut définir le modèle d'Ising avec des *conditions au bord* : si ξ est une configuration de spin sur ∂G (pouvant ne pas être définie sur certains sommets, on parle alors de condition au bord *libre*), on dit que $\sigma \in \{\pm\}^V$ suit la loi du modèle d'Ising (à température inverse β) avec conditions au bord ξ si $\sigma \sim \mu_{\beta,G}^{\mathrm{Is}}$ *conditionnellement à* $\sigma_x = \xi_x$ pour $x \in \partial G$.

La transition de phase pour le modèle d'Ising

Une manière de mesurer si le système est ordonné (i.e. si les spins pointent dans une direction) est d'introduire la *magnétisation spontanée* du modèle :

Définition. La magnétisation spontanée du modèle d'Ising dans le graphe G à température inverse $\beta > 0$ est la quantité

$$m_{\beta,G} = \frac{1}{\#V}\mu^{\mathrm{Is}}_{\beta,G}\left(\Big|\sum_{x\in V}\sigma_x\Big|\right) \tag{3}$$

Remarque. Il est très important de mettre la valeur absolue car sinon, par symétrie $+/-$, cette quantité serait nécessairement nulle. Le fait que la magnétisation spontanée soit grande indique que le système "choisit" un signe et se met globalement de ce signe là. Au contraire, si le système est désordonné (et que, mettons, les corrélations entre sommets soient très faibles) une sorte de théorème central limite justifierait que $\mu^{\mathrm{Is}}_{\beta,G}\left(\Big|\sum_{x\in V}\sigma_x\Big|\right) = O(\sqrt{\#V})$

Une question primordiale est l'existence, ou non, d'une *transition de phase* ; c'est-à-dire d'un comportement différent du modèle à des valeurs de β différentes. Pour formaliser cela, on fixe une dimension $d \geq 1$ sur laquelle on travaille, et on se place sur des graphes-boîtes Λ_n de plus en plus grand dans $\mathbb{Z}^d$: Λ_n est le sous-graphe de $\mathbb{Z}^d$ dont les sommets ont toute leurs coordonnées plus petites que n en valeur absolue.

Définition. On dit que le système admet une magnétisation spontanée à $\beta > 0$ si la magnétisation moyenne m_{β,Λ_n} converge vers une limite $m_\beta > 0$.

Remarque. En fait, il est possible de prouver qu'en toute dimension, et pour tout $\beta > 0$, les magnétisations moyennes convergent vers une valeur m_β ; la magnétisation spontanée signifie essentiellement que cette limite est strictement positive.

On peut prouver que la magnétisation m_β est une fonction croissante de β ; c'est raisonnable compte-tenu du fait que, plus β est grand, plus les spins seront corrélés et qu'ils auront tendance à se mettre du même signe. On peut aussi montrer assez facilement par des calculs que, pour β suffisamment petit, la magnétisation spontanée est nulle ; la question est donc de savoir si, pour β suffisamment grand, le modèle "choisit un signe" :

Définition. On dit que le modèle d'Ising admet une transition de phase en dimension d si $\beta_c := \sup\{\beta, m_\beta = 0\} < +\infty$.

et les résultats d'Ising [8] et Peierls [10] se lisent

Théorème 1. *Le modèle d'Ising admet une transition de phase si et seulement si la dimension d est supérieure ou égale à 2.*

Remarque. Le nombre β_c est appelé *température inverse critique* ; l'étude du comportement du modèle au point critique, notamment la question de savoir s'il y a une magnétisation spontanée, est une source de problèmes intéressants, comme on le verra plus tard.

Remarque. Il existe plusieurs autres manières de définir qu'à une température inverse $\beta > 0$ le système admet un caractère ordonné (autre que la magnétisation spontanée) ; par exemple, on peut s'intéresser à la présence de corrélations à longue portée (i.e. la non décroissance vers 0 de $\mu_\beta^{\mathrm{Is}}(\sigma_x\sigma_y)$ quand $|x-y| \to +\infty$) ou alors étudier le modèle d'Ising avec conditions au bord $+$ et considérer la quantité $\mu_\beta^{\mathrm{Is}}(\sigma_0)$.

Ces diverses notions permettent de définir de manière analogue d'autres températures inverses critiques, et il est possible de montrer que ces nombres sont égaux.

Le Champs Libre Discret, ou DGFF Le Champs Libre (Gaussien) Discret, ou discrete gaussian free field en anglais (d'où l'appelation DGFF) admet une définition très analogue à celle du modèle d'Ising :

Définition (Définition (incomplète) du DGFF, voir la remarque qui suit)**.** Le DGFF est la mesure de probabilités μ^{DGFF} sur l'ensemble $\mathbb{R}^V$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^{\otimes V}$ est donnée par

$$\mathrm{d}\mu^{\mathrm{DGFF}}(\sigma) \propto e^{-H(\sigma)}(\mathrm{d}\lambda)^{\otimes V}(\sigma) \tag{4}$$

Remarque. Telle quelle, cette définition n'a pas de sens car la mesure ayant pour densité $e^{-H(\sigma)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^{\otimes V}$ *n'est pas finie* (penser aux translations $\sigma \mapsto \sigma + c$ qui laissent invariant l'hamiltonien) et on ne peut donc pas définir une telle mesure de probabilité.

En fait, pour remédier à ce souci, on est obligé de mettre une condition au bord $h : \partial G \to \mathbb{R}$ (et de demander à σ d'être égale à h sur ∂G) ; sous l'hypothèse que tout sommet $v \in V$ est connecté au bord, il peut facilement être montré que la formule (4) définit bien une loi sur $\mathbb{R}^V$. Lorsque l'on parlera du DGFF on sous-entendra que la condition au bord a été choisie nulle ; dans ce cas, le hamiltonien est une forme quadratique définie positive sur l'espace vectoriel des configurations $\sigma \in \mathbb{R}^V$ nulles sur le bord et la formule (4) définit alors un vecteur gaussien aléatoire centré σ.

Il est très facile de relier le DGFF avec condition au bord h avec le DGFF avec condition au bord nulle, comme le montre la proposition qui suit :

Proposition 1. *Soit σ un DGFF avec condition au bord nulle, et soit h définie sur ∂G ; soit H l'(unique) extension harmonique de h à G ; alors $\sigma + H$ a la loi d'un DGFF avec conditions au bord h.*

Remarque. L'une des difficultés d'étudier le champs de magnétisation d'Ising introduit en section 3 est qu'au contraire il n'est pas clair du tout de passer d'une condition au bord ξ à une condition au bord ξ' (sauf dans des cas triviaux).

Remarque. On aurait pu mettre un paramètre $\beta > 0$ dans la définition précédente mais cela n'aurait pas eu d'importance ; si $\sigma \sim \mu^{\mathrm{DGFF}}$, $\sqrt{\beta}\sigma$ a une loi dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est $e^{-\beta H(\sigma)}$. On peut donc se ramener au cas $\beta = 1$.

Remarque. Tout comme le modèle d'Ising, la forme du hamiltonien (1) et la formule (4) rend plus probable les configurations d'énergie basse, c'est-à-dire favorisent que des voisins aient des valeurs de spins proches.

3 Et leurs analogues champs dans le continu

Une des manières d'étudier ces modèles est de s'intéresser à leur *limite d'échelle* (un peu comme quand on souhaite étudier une marche aléatoire simple "de très loin" et que, pour cela, on s'intéresse au mouvement brownien).

Le concept de limite d'échelle Considérons un modèle $*$ défini sur chaque graphe fini (cela pourrait être un modèle de spin, c'est-à-dire un modèle de valeurs sur les sommets du graphe, comme les modèles définis ci-dessus, mais aussi un modèle sur les arêtes, comme la percolation) ; considérons ensuite $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et pour chaque $\delta > 0$, soit $D^\delta = \delta\mathbb{Z}^d \cap D$ une approximation de D par le réseau de taille de pas δ (qu'on assimilera au sous-graphe de $\delta\mathbb{Z}^d$ dont les sommets sont dans D^δ). On considère $\sigma^\delta \sim \mu^*_{D^\delta}$ une distribution de spins sur D^δ qui suit la loi du modèle $*$ auquel on s'intéresse.

Supposons qu'on aie, pour chaque $\delta > 0$, une fonction mesurable X^δ définie sur l'espace des valeurs de σ^δ ($\mathbb{R}^{D^\delta}$ pour des modèles de spin) et à valeur dans un espace polonais $\mathcal{X}_D$ ne dépendant pas de δ.

Définition. On dit que le modèle $*$ admet une *limite d'échelle pour la topologie de* $\mathcal{X}$ si pour tout D (dans une certaine classe de domaines de $\mathbb{R}^d$), la suite de variables aléatoires $X^\delta(\sigma^\delta)$ converge en loi, quand $\delta \to 0$, vers X_D une variable aléatoire non constante à valeurs dans $\mathcal{X}_D$.

Remarque. L'hypothèse de non-trivialité de la limite X_D, dans la définition de la limite d'échelle, prend son sens dans le cas où $\mathcal{X}$ est un espace vectoriel topologique : sinon, on peut prendre $\widetilde{X^\delta} = a_\delta X^\delta$ pour une suite $a_\delta \to 0$ et on a une convergence en loi vers 0, ce qui ne nous intéresse guère.

Remarque. Il est extrêmement important de comprendre que, dans cette définition, l'espace $\mathcal{X}$ des valeurs a une importance primordiale : un modèle $*$ peut tout à fait avoir deux limites d'échelle pour des topologies différentes, qui ne se parlent pas (cf les limites d'échelle de la percolation Bernoulli).

Restreignons nous désormais à la dimension $d = 2$ (non pas parce que les résultats sont faux pour d'autres dimensions, mais car nous sommes intéressés spécifiquement par des modèles planaires).

La limite d'échelle classique du DGFF Dans le cas du DGFF, il y a une limite d'échelle particulièrement intéressante : le champs libre gaussien (ou GFF pour les intimes).

Pour l'introduire, on peut prendre $\mathcal{X}_D$ l'espace des suites de nombres réels indexées par $\mathcal{D}_0(D)$ (l'espace des fonctions lisses à support compact dans D), et $X^\delta = X^\delta(\sigma^\delta)$ défini par $X^\delta(f) = \int_D f(x)\sigma^\delta(x)\mathrm{d}x$ où on pose $\sigma^\delta(x) = \sigma^\delta_v$ pour

x sur la face duale v^* de $v \in D^\delta$. On a alors le théorème suivant (théorème 1.64. de [3]) :

Théorème 2. *La suite* $(X^\delta)_{\delta>0}$ *définie ci-dessus converge en loi vers un processus gaussien* Γ *sur* $\mathcal{D}_0(D)$*, qu'on appelle le GFF, et qui est donc la limite d'échelle du DGFF.*

La remarque suivant la preuve de ce théorème (dans [3]) explique que, si on avait fait une approximation par un autre réseau planaire, on aurait eu de même une limite d'échelle identique (ouf !). De plus, on peut en fait considérer un sous-espace $\mathcal{X}'$ de $\mathcal{X}$, avec une topologie plus fine, telle que les variables aléatoires $X'^\delta = X^\delta$ *vues comme éléments de* $\mathcal{X}'$ convergent en loi pour la topologie de $\mathcal{X}'_D$.

On peut en fait prendre $\mathcal{X}'_D$ l'espace des distributions sur D, ou encore plus fin, $\mathcal{X}'_D$ l'espace de Sobolev $H^{-1-\varepsilon}(D)$ (pour tout $\varepsilon > 0$).

Remarque. Il est tout à fait possible de définir le GFF directement dans le continu, sans avoir à passer par une limite d'échelle de DGFF ; et c'est d'ailleurs très utile pour l'étudier.

Remarque. Je ne sais pas si les physiciens s'intéressent au champs libre discret, mais ils utilisent crucialement le champs libre gaussien continu comme pierre de base de leurs théories de champs de gravité quantiques ; en fait, comme le modèle d'Ising, ce sont eux qui en ont parlé en premier !

La limite d'échelle "champs de magnétisation" du modèle d'Ising De manière analogue au paragraphe précédent, on peut considérer, si $D \subset \mathbb{R}^2$, la suite de variables aléatoires, fonctions de $\sigma^\delta \sim \mu^{\mathrm{Is}}_{\beta,D^\delta}$, $\Phi^\delta_\beta = \sum_{x\in D^\delta} \sigma^\delta_x 1_{x^*}$ (où x^* est la face du réseau dual de D^δ correspondant au sommet x), vues comme distribution sur D.

Pour $\beta < \beta_c(\mathbb{Z}^2)$, on peut montrer que la corrélation de deux spins éloignés est si faible qu'il faut renormaliser les Φ^δ par δ^{-1} pour avoir une convergence et le résultat est le suivant :

Proposition 2. *La suite* $X^\delta = \delta^{-1}\Phi^\delta$ *converge en loi, quand* $\delta \to 0$*, vers un bruit blanc gaussien sur* D*.*

Remarque. C'est essentiellement un théorème central limite dans un cas où les variables aléatoires sommées ne sont pas indépendantes mais ont des covariances très faibles grâce au fait que la transition de phase du modèle d'Ising est abrupte (voir [7]).

Pour $\beta > \beta_c$, on peut montrer un résultat similaire grâce à des résultats sur la phase sur-critique : si $s(\sigma) \in \{\pm\}$ est le signe majoritaire choisi par la configuration σ,

Proposition 3. *La suite* Φ^δ*, sans renormalisation, converge en loi vers la distribution aléatoire constante égale à* $m_\beta s$ *où* s*, le "signe continu" de* σ*, est une variable aléatoire de Rademächer. De plus, si on pose* $X^\delta = \delta^{-1}(\Phi^\delta - m_\beta s(\sigma^\delta))$*,* X^δ *converge en loi vers un bruit blanc gaussien sur* D*.*

Le cas le plus intéressant est lorsque $\beta = \beta_c$ (et dans toute la suite on ne considérera plus que ce cas, i.e. le modèle d'Ising critique) ; on peut démontrer [5]

Théorème 3. *La suite* $X^\delta = \delta^{-1/8}\Phi^\delta$ *converge en loi vers une distribution aléatoire non triviale (dans un espace de Sobolev d'exposant suffisamment négatif).*

Dans ce cas, il est aussi démontré [4] que la limite n'est *pas* un champs gaussien.

Remarque. Le facteur de normalisation $\delta^{-1/8}$ qui apparaît vient de l'exposant critique $\mu_{\beta_c}^{\mathrm{Is}}(\sigma_x \sigma_y) \asymp |x-y|^{-1/4}$.

Remarque. Le résultat s'étend au cas où la condition au bord sur ∂D est composée d'une succession finie d'arcs sur lesquels elle est soit $-$, soit $+$, soit libre.

4 Interfaces géométriques pour le modèle d'Ising et le champs libre gaussien

Comme le fait deviner la définition d'une limite d'échelle, il est aussi possible d'analyser d'autres représentations, plus géométriques cette fois, de nos modèles discrets, et de considérer leurs limites d'échelles.

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine simplement connexe du plan, différent du plan tout entier, et soient deux points a, b sur son bord de Martin (i.e. son bord conforme). Mettons, pour le modèle d'Ising, des conditions au bord *Dobrushin*, i.e. des conditions + sur l'arc ab et - sur l'arc ba, et pour le DGFF, des conditions $+\lambda$ sur l'arc ab et $-\lambda$ sur l'arc ba (où $\lambda = \sqrt{\pi/8}$ est fixé). Considérons, si $\delta > 0$, l'interface aléatoire η^δ qui relie a^δ et b^δ dans D^δ, et qui, dans le cas du modèle d'Ising sépare le cluster de + de l'arc ab du cluster de - de l'arc ba, et dans le cas du DGFF sépare le cluster positif et le cluster négatif.

L'invariance conforme Il se trouve qu'entre autres choses, des propriétés d'*invariance (ou covariance) conforme* sont prédites pour nombre de modèles de physique statistique en dimension 2, et démontrées dans certains cas. C'est le cas des champs introduits en section précédente : il est facile de voir que le GFF est invariant conforme lorsqu'on le définit directement par la fonction de Green, et le champs de magnétisation d'Ising est lui convariant conforme (de covariance complètement explicitée dans [5]).

Ces considérations ont amené Schramm à définir [11] des courbes aléatoires, les SLE_κ, dans le continu qui seraient des candidats aux limites d'échelle des interfaces aléatoires de modèles discrets, comme celles introduites ci-dessus.

Remarque. On peut (et on doit !) munir l'espace des courbes d'une topologie (au moins d'une tribu) pour parler de courbe aléatoire. Il y a plusieurs manières de répondre à ce problème.

Depuis, de nombreux résultats ont été démontrés, notamment [12]

Théorème 4. *Le DGFF a bien une limite d'échelle pour la topologie des courbes, et cette limite d'échelle est un SLE_4.*

et [6]

Théorème 5. *Le modèle d'Ising a bien une limite d'échelle pour la topologie des courbes, et cette limite d'échelle est un SLE_3.*

En fait, pour le modèle d'Ising, on peut aussi, avec des conditions au bord $+$ sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$, considérer l'ensemble des boucles qui font l'interface entre les clusters de $+$ et les clusters de - ; et on peut faire cela pour toute une classe de modèles ce qui a amené Sheffield (voir par exemple [13]) à introduire (similairement aux SLE_κ) la famille des CLE_κ, qui sont des collections dénombrables aléatoires de boucles simples imbriquées dans D, comme candidats à des limites d'échelle de nombreuses familles de boucles provenant de modèle de physique statistique. Ces ensembles de boucle sont par définition invariants conformes.

Remarque. Évidemment, il faudrait définir une tribu sur l'espace des collections dénombrables de boucles simples imbriquées dans D pour parler d'une telle collection aléatoire.

Dans le cas du modèle d'Ising, la convergence de l'ensemble des interfaces a été démontrée (voir [2])

Théorème 6. *Si on considère l'ensemble aléatoire C^δ des boucles dans la réalisation d'une configuration du modèle d'Ising critique avec condition au bord $+$ dans le graphe D^δ, quand $\delta \to 0$, l'ensemble C^δ converge en loi vers le CLE_3.*

5 Et les liens entre champs et interfaces géométriques ?

Se pose alors la question de comment sont reliés ces limites d'échelle ; notamment est-ce que les lois jointes convergent, et si oui, quel est la loi du couplage obtenu.

Un couplage directement dans le cas continu pour le GFF

Théorème 7. *Il existe un couplage $(\Gamma, \mathfrak{C}, (\varepsilon_\ell)_{\ell\in\mathfrak{C}})$, où Γ est un GFF sur D, $\mathfrak{C}$ est un CLE_κ, et $(\varepsilon_\ell)_{\ell\in\mathfrak{C}}$ est, conditionnellement à $\mathfrak{C}$, une suite iid de variables aléatoires de loi $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$.*

Ce couplage est tel que $(\mathfrak{C}, (\varepsilon_\ell)_{\ell\in\mathfrak{C}})$ soit une fonction mesurable de Γ, et réciproquement que Γ soit une fonction déterministe de $(\mathfrak{C}, (\varepsilon_\ell)_{\ell\in\mathfrak{C}})$.

Remarque. Les CLE_κ, en général, sont des ensembles de boucles aléatoires invariants conformes ; une manière de les définir est de passer par des SLE généralisées et on peut montrer que la loi d'un bout d'une boucle d'un CLE_κ est absolument continue par rapport à un (bout d'un) SLE_κ.

Remarque. Il existe une construction explicite de Γ à partir de $(\mathfrak{C}, (\varepsilon_\ell)_{\ell\in\mathfrak{C}})$ que nous allons expliquer informellement ici : soit $\mathfrak{C}_1$ l'ensemble des boucles *extérieures* de $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire les boucles ℓ qui ne sont comprises dans aucune boucle. On peut définir

$$\Gamma_1 = 2\lambda \sum_{\ell\in\mathfrak{C}_1} \varepsilon_\ell 1_{\mathrm{int}(\ell)}$$

Plus généralement, si $\mathfrak{C}_k$ est l'ensemble des boucles de $\mathfrak{C}$ qui sont comprises dans exactement $k-1$ boucles, on peut définir

$$\Gamma_k = 2\lambda \sum_{\ell\in\mathfrak{C}_k} \sum_{\hat{\ell},\ell\subset\hat{\ell}} \varepsilon_{\hat{\ell}}$$

et il se trouve que, si $f \in \mathcal{D}_0(D)$, $\Gamma_k(f)$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire $\Gamma(f)$ qui est une variable aléatoire gaussienne centrée. Le processus gaussien Γ défini ainsi est de plus un GFF sur D.

Cette dernière remarque permet d'interpréter les boucles qui apparaissent comme étant des lignes de niveau du GFF ; ce qui correspond au théorème 4.

Et la question analogue pour le modèle d'Ising Nous avons donc vu que le DGFF admet une limite d'échelle, le GFF, qu'on peut étudier directement dans le cas continu, qu'on peut "décomposer" comme le montre le théorème 7, et dont les contours s'interprètent grâce à 4 comme des lignes de niveau.

Des questions similaires se posent pour le modèle d'Ising, pour lequel l'ensemble des interfaces entre + et - converge, et qui admet un champs limite, tous ces objets ayant une structure conforme. *La relation entre le champs Φ et le CLE$_3$ n'est pour l'instant pas connue.*

Conjecture. Avec des conditions au bord de Dobrushin, le couple (X^δ, η^δ) converge en loi vers une variable aléatoire (Φ, η), où η est $\Phi-$mesurable. Avec des conditions au bord $+$, le couple (X^δ, C^δ) converge en loi vers une variable aléatoire $(\Phi, \mathcal{C})$ et, pour ce couplage, Φ est $\mathfrak{C}-$mesurable et $\mathfrak{C}$ est $\Phi-$mesurable.

Remarque. Dans le cas de la percolation Bernoulli, il peut être démontré que les interfaces aléatoires convergent vers un CLE$_6$, et on peut très facilement définir un "champs de percolation" (qui a pour loi le bruit blanc gaussien, c'est l'analogue de la proposition 2 au cas $\beta = 0$) ; mais dans ce cas la limite d'échelle du couple est triviale : les deux côtés deviennent indépendants !

Références

[1] Point de curie. *Larousse.* `https://www.larousse.fr/encyclopedie/divers/Point%20de%20Curie/186058`.

[2] Stéphane Benoist et Clément Hongler : The scaling limit of critical ising interfaces is cle(3), 2018.

[3] Nathanaël BERESTYCKI et Ellen POWELL : Gaussian free field and liouville quantum gravity, 2024.

[4] Federico CAMIA, Christophe GARBAN et Charles M. NEWMAN : Planar ising magnetization field ii. properties of the critical and near-critical scaling limits, 2013.

[5] Federico CAMIA, Christophe GARBAN et Charles M. NEWMAN : Planar ising magnetization field i. uniqueness of the critical scaling limit. *The Annals of Probability*, 43(2), mars 2015.

[6] Dmitry CHELKAK, Hugo DUMINIL-COPIN, Clément HONGLER, Antti KEMPPAINEN et Stanislav SMIRNOV : Convergence of ising interfaces to schramm's sle curves, 2013.

[7] Hugo DUMINIL-COPIN : Lectures on the ising and potts models on the hypercubic lattice. 2017.

[8] Ernst ISING : Contribution to the theory of ferromagnetism. *Zeitschrift für Physik*, 1924.

[9] Wilhelm LENZ : Beiträge zum verständnis der magnetischen eigenschaften in festen körpern. *Physikalische Zeitschrift*, 1920.

[10] Rudolf PEIERLS : On ising's model of ferromagnetism. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 32(3):477–481, 1936.

[11] Oded SCHRAMM : Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, 1999.

[12] Oded SCHRAMM et Scott SHEFFIELD : Contour lines of the two-dimensional discrete gaussian free field, 2008.

[13] Scott SHEFFIELD : Exploration trees and conformal loop ensembles, 2006.

[14] Yvan VELENIK : *Statistical Mechanics of Lattice Systems*. Cambridge University Press, 2017.