

Limite de grande échelle du processus d'exclusion simple asymétrique et de l'équation de Burgers stochastique

27 mai 2024

Quentin Moulard, sous la direction de Fabio Toninelli et de Giuseppe Cannizzaro

Nous nous intéressons à deux modèles majeurs de la physique statistique et de la théorie des probabilités : le processus d'exclusion simple asymétrique (ASEP) et l'équation de Burgers stochastique. Le premier, le ASEP, est un système de particules en interaction sur un réseau, où les particules se diffusent avec un léger biais dans une direction donnée, tout en respectant la contrainte que deux particules ne peuvent pas occuper le même site. Le second correspond à l'équation de Burgers, une EDP introduite par Burgers pour modéliser la turbulence des fluides, que l'on enrichit d'une source aléatoire. Bien que ces deux modèles paraissent très différents à première vue, il s'avère que leurs fluctuations à l'équilibre à grande échelle appartiennent à la même classe d'universalité.

Ainsi, nous examinerons la limite de grande échelle de ces modèles, qui révèle des comportements très distincts selon la dimension spatiale : les dimensions $d = 1$, $d = 2$ et $d \geq 3$ correspondant respectivement aux régimes sous-critique, critique et sur-critique.

Table des matières

1	Définition des deux modèles	1
1.1	Le processus d'exclusion simple asymétrique (ASEP)	1
1.2	L'équation de Burgers stochastique	3
1.3	Dérivation heuristique de l'équation de Burgers stochastique à partir du ASEP	5
2	Limite de grande échelle	6
2.1	Ré-échelonnement des processus	6
2.2	La classification heuristique en fonction de la dimension	7
2.3	Le régime sur-critique $d \geq 3$	8
2.4	Le régime sous-critique $d = 1$	9
2.5	Le régime critique $d = 2$	10

Notation basique : Soit $d \geq 1$ correspondant à la dimension spatiale des processus que nous étudierons. Nous notons $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$ la base canonique de \mathbb{R}^d , ainsi que $\mathcal{E}_+ = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d\}$ et $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, -\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d, -\vec{e}_d\}$.

1 Définition des deux modèles

1.1 Le processus d'exclusion simple asymétrique (ASEP)

Les processus d'exclusion simples font sans aucun doute partis des modèles les plus classiques de la physique statistique. Il s'agit de systèmes de particules sur réseau, c'est-à-dire que chaque

particule occupe un site de \mathbb{Z}^d ; et respectant la contrainte d'*exclusion*, c'est-à-dire deux particules ne peuvent pas occuper le même site. Ainsi la configuration du système est donné par $\underline{\eta} = (\eta_x)_{x \in \mathbb{Z}^d} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, où η_x vaut 1 si une particule est présente sur le site x , et 0 si aucune particule n'y est présente. Le système évolue dans le temps (on note $\underline{\eta}^t$ la configuration au temps t), chaque particule du système pouvant sauter sur un site voisin (à condition que le site sur lequel la particule saute était libre). Nous étudierons le processus d'exclusion simple asymétrique (ASEP), introduit par Frank Spitzer en 1970 (voir [6]), dont la particularité est la présence d'un léger biais favorisant les sauts dans la direction $+\vec{e}_1$.

En ce qui concerne la condition initiale $\underline{\eta}^0$, nous la prendrons aléatoire, selon la mesure produit $\bigotimes_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{B}(1/2)$: autrement dit chaque site est occupé avec probabilité 1/2, indépendamment les uns des autres. En fait, il s'avère que ce choix fera du système un processus *stationnaire*: à tout instant $t \geq 0$, la configuration aléatoire $\underline{\eta}^t$ aura toujours pour loi $\bigotimes_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{B}(1/2)$.

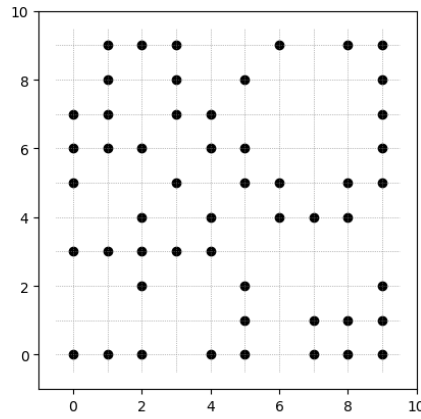


fig:asep

FIGURE 1 – Une réalisation de $\bigotimes_{x \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{B}(1/2)$

Maintenant, expliquons comment le système évolue dans le temps.

On équipe chaque particule d'une *horloge poissonnienne*, chacune indépendante les unes des autres (ainsi que de la condition initiale): ces horloges correspondent aux instants où la particule peut sauter. Plus précisément, une *horloge poissonnienne* sonne à intervalles de temps aléatoires, indépendants les uns des autres, chacun suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

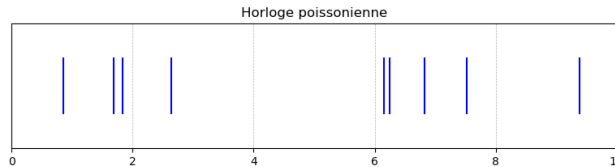


FIGURE 2 – Une réalisation d'une horloge poissonnienne

Les temps d'attente entre les sonneries (traits bleus) sont indépendants de loi exponentielle de paramètre 1.

fig:asep

La raison de ce choix, très classique en probabilités, repose sur la propriété de perte de mémoire des lois exponentielles, essentielle pour garantir que le processus final soit Markovien (ainsi, la loi du système après l’instant t ne dépend que de la configuration $\underline{\eta}^t$ à l’instant t , et non pas du temps que les horloges ont déjà attendu avant l’instant t).

Nous devons maintenant nous donner une loi de probabilité correspondant à la loi des sauts des particules. Nous la prendrons à support dans \mathcal{E} , afin que les particules ne sautent que de plus proches voisins en plus proches voisins (c’est de là que vient le terme "simple" dans "ASEP"). Si l’on choisit la loi uniforme sur \mathcal{E} , on obtiendrait ce qui s’appelle le processus d’exclusion simple symétrique (SSEP). Cependant, nous voulons introduire une asymétrie qui favorise les sauts dans la direction $+\vec{e}_1$: pour cela on se donne un paramètre $\lambda \in (0, 1/2d)$ et considère la mesure de probabilité p_λ sur \mathcal{E} donnée par :

$$p_\lambda(\vec{e}) = \begin{cases} 1/2d + \lambda & \text{si } \vec{e} = \vec{e}_1 \\ 1/2d - \lambda & \text{si } \vec{e} = -\vec{e}_1 \\ 1/2d & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1) \quad \boxed{\text{e:loisaut}}$$

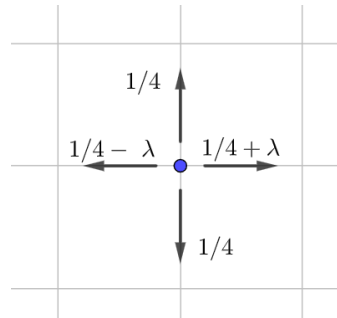


FIGURE 3 – Loi des sauts ($d = 2$)

fig:asep

Maintenant expliquons ce qui se passe lorsqu’une horloge sonne : disons qu’il s’agisse de l’horloge associée à la particule présente au site $x \in \mathbb{Z}^d$. On décide alors de tirer alors une variable aléatoire \vec{e} de loi p_λ (indépendante de tout le reste), puis :

- si le site $x + \vec{e}$ est libre, alors la particule saute du site x au site $x + \vec{e}$,
- si le site $x + \vec{e}$ est déjà occupé, alors rien ne se passe (le saut est annulé).

Ainsi, au fur et à mesure que les horloges sonnent, les particules correspondantes sautent et le système de particules évolue dans le temps.

1.2 L’équation de Burgers stochastique

Nous allons maintenant présenter l’équation de Burgers stochastique, introduite dans [1]. Mais d’abord, définissons le concept de bruit blanc, essentiel pour définir des équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS).

Donnons d’abord une définition heuristique de ce qu’est un bruit blanc ξ : il s’agirait d’un champ $(\xi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ de variables aléatoires gaussiennes centrées telles que :

$$\text{Cov}(\xi(x), \xi(y)) = \delta_0(y - x), \quad (1.2) \quad \boxed{\text{e:bruitblanccov}}$$

où δ_0 désigne le Dirac en 0. Cependant, cette définition est maladroite car δ_0 n'étant pas une fonction mais une distribution, il faut aussi définir ξ comme une distribution aléatoire. Voici donc la définition correcte d'un bruit blanc :

Définition : *Un bruit blanc sur \mathbb{R}^d est une distribution aléatoire ξ qui satisfait :*

(i) ξ est un processus gaussien centré : c'est-à-dire que pour toute fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, la variable aléatoire $\langle \xi, \varphi \rangle$ suit une loi normale centrée.

(ii) Pour toutes fonctions test φ, ψ dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\text{Cov}(\langle \xi, \varphi \rangle, \langle \xi, \psi \rangle) = \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (1.3) \quad \boxed{\text{e:bruitblancdef}}$$

En effet, la formule (1.3) est naturelle car elle peut se déduire formellement de la formule (1.2) par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \xi(x) dx, \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) \xi(y) dy\right) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \psi(y) \underbrace{\text{Cov}(\xi(x), \xi(y))}_{=\delta_0(y-x)} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Notons que si φ est une fonction test, alors $\langle \xi, \varphi \rangle$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2)$. Remarquons aussi que si φ, ψ sont deux fonctions tests dont les supports sont disjoints, alors les variables aléatoires $\langle \xi, \varphi \rangle$ et $\langle \xi, \psi \rangle$ sont indépendantes.

La définition précédente correspond à un bruit blanc *spatial* ; mais nous aurons aussi besoin de la définition d'un bruit blanc *spatio-temporel* : il s'agit simplement de la restriction à $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ d'un bruit blanc (spatial) sur \mathbb{R}^{d+1} . Enfin, un bruit blanc *vectoriel* $\vec{\xi}$ spatial (resp. spatio-temporel) correspond tout simplement à (ξ_1, \dots, ξ_d) où ξ_1, \dots, ξ_d sont des bruits blancs spatiaux (resp. spatio-temporels) mutuellement indépendants.

Maintenant définissons ce qu'est l'équation de Burgers stochastique sur \mathbb{R}^d . Il s'agit formellement de la solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique (EDPS) suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{1}{2} \Delta u + \lambda \partial_1(u^2) + \text{div } \vec{\xi} \\ u|_{t=0} = \chi \end{cases} \quad (1.4) \quad \boxed{\text{e:BurgersStoForm}}$$

où $\lambda > 0$ est appelée constante de couplage ; et où $\vec{\xi} = \xi(t, x)$ et $\chi = \chi(x)$ sont des bruits blanc respectivement vectoriel spatio-temporel et spatial, indépendants l'un de l'autre. L'intérêt de ce choix de condition initiale est que l'on peut vérifier (au moins formellement) que le processus u est *stationnaire* : c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$, $u(t, \cdot)$ suit aussi la loi d'un bruit blanc spatial.

Cependant, il est généralement très difficile de donner un sens rigoureux à l'EDPS tel qu'écrit ci-dessus ¹, car les bruits blanc étant des distributions aléatoires très peu régulières, le produit u^2 présent dans la non-linéarité $\partial_1(u^2)$ n'a pas de sens (car on ne peut pas multiplier deux distributions sans un minimum de régularité). Cependant, il existe un moyen facile contourner

1. En fait, on ne sait donner un sens satisfaisant à cette EDPS qu'en dimension $d = 1$, notamment grâce à la théorie des *structures de régularité* de Martin Hairer, qui lui a valu la médaille Fields en 2014.

ce problème : on choisit une fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ de masse 1 (ie $\int \varphi(x) dx = 1$), puis on régularise la non linéarité grâce à des convolutions avec φ . Ainsi, on préfère souvent considérer l'EDPS suivante plutôt que (1.4) :

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{1}{2} \Delta u + \lambda \varphi * \partial_1([\varphi * u]^2) + \operatorname{div} \xi \\ u|_{t=0} = \chi \end{cases} \quad (1.5) \quad \boxed{\text{e: BurgersSto}}$$

où $\vec{\xi} = \xi(t, x)$ et $\chi = \chi(x)$ sont de même des bruits blanc respectivement vectoriel spatio-temporel et spatial, indépendants l'un de l'autre. Le choix de φ n'a en réalité pas grande importance car heuristiquement celui-ci n'influence véritablement le comportement de u que sur des échelles d'espace et de temps d'ordre 1, alors que l'on s'intéresse au comportement à grande échelle de u .

1.3 Dérivation heuristique de l'équation de Burgers stochastique à partir du ASEP

Précisons dès maintenant que cette section est purement heuristique et absolument pas rigoureuse. Notre but est de dériver "à la physicienne" l'équation de Burgers stochastique à partir du ASEP.

Tout d'abord, remarquons qu'il y a conservation du nombre de particules dans le ASEP (aucune particule ne disparaît ou apparaît, elles peuvent seulement se déplacer entre sites voisins). Ainsi, si ϱ désigne la densité locale du ASEP, l'équation de conservation de la masse nous donne heuristiquement :

$$\partial_t \varrho = -\operatorname{div}(\vec{j}), \quad (1.6) \quad \boxed{\text{e: ConservationMa}}$$

où \vec{j} désigne le courant local de particules. Soit $x \in \mathbb{Z}^d$ et obtenons maintenant une formule heuristique pour $\vec{j}(x)$. Si $\vec{e} \in \mathcal{E}$, alors le courant de particules passant par l'arête $\{x, x + \vec{e}\}$ est donnée par :

$$\vec{j}(\{x, x + \vec{e}\}) = \underbrace{p_\lambda(\vec{e}) \eta_x (1 - \eta_{x+\vec{e}})}_{\text{taux de saut } x \rightarrow x+\vec{e}} \vec{e} + \underbrace{p_\lambda(-\vec{e}) \eta_{x+\vec{e}} (1 - \eta_x)}_{\text{taux de saut } x+\vec{e} \rightarrow x} (-\vec{e}), \quad (1.7) \quad \boxed{\text{e: Courant1}}$$

où pour rappel $p_\lambda(\vec{e})$ est la loi de saut (1.1). En sommant sur $\vec{e} \in \mathcal{E}$, un calcul élémentaire aboutit à :

$$\vec{j}(x) = -\frac{1}{2d} \sum_{\vec{e} \in \mathcal{E}_+} (\eta_{x+\vec{e}} - \eta_{x-\vec{e}}) \vec{e} + \lambda \left[2\eta_x \left(1 - \frac{\eta_{x-\vec{e}_1} + \eta_{x+\vec{e}_1}}{2} \right) + 2 \frac{\eta_{x-\vec{e}_1} + \eta_{x+\vec{e}_1}}{2} (1 - \eta_x) \right] \vec{e}_1. \quad (1.8) \quad \boxed{\text{e: Courant2}}$$

Maintenant, en considérant qu'en moyenne $\eta_y \approx \varrho(y)$, et en faisant les approximations :

$$\varrho(x + \vec{e}) - \varrho(x - \vec{e}) \approx 2 \partial_{\vec{e}} \varrho(x), \quad \frac{\varrho(x - \vec{e}_1) + \varrho(x + \vec{e}_1)}{2} \approx \varrho(x), \quad (1.9) \quad \boxed{\text{e: Courant3}}$$

on obtient l'heuristique suivante pour le courant "moyen" :

$$\vec{j}_{moy} \approx -\frac{1}{d} \vec{\nabla} \varrho + 4 \lambda \varrho (1 - \varrho) \vec{e}_1. \quad (1.10) \quad \boxed{\text{e: Courant4}}$$

Pour prendre en compte les fluctuations de \vec{j} autour de \vec{j}_{moy} , on ajoute un bruit blanc spatio-temporel vectoriel $\sigma^2 \vec{\xi}$, d'où on en déduit la formule heuristique du courant :

$$\vec{j} \approx -\frac{1}{d} \vec{\nabla} \varrho + 4 \lambda \varrho (1 - \varrho) \vec{e}_1 + \sigma^2 \vec{\xi}. \quad (1.11) \quad \boxed{\text{e:HeuristiqueCou}}$$

En injectant dans l'équation (1.6), on en déduit l'équation heuristique pour ϱ :

$$\partial_t \varrho \approx \frac{1}{d} \Delta \varrho - 4 \lambda \partial_1 [\varrho (1 - \varrho)] + \sigma^2 \operatorname{div} \vec{\xi}, \quad (1.12) \quad \boxed{\text{e:Heuristique1}}$$

ce qui en posant $v = \varrho - 1/2$ donne :

$$\partial_t v \approx \frac{1}{d} \Delta v + 4 \lambda \partial_1 (v^2) + \sigma^2 \operatorname{div} \vec{\xi}. \quad (1.13) \quad \boxed{\text{e:Heuristique2}}$$

On aboutit finalement bien à l'équation de Burgers stochastique !

Évidemment, il est irraisonnable d'espérer que cette approximation soit bonne sur des échelles de temps et d'espace d'ordre 1 (simplement parce que le ASEP est de nature discrète alors que l'équation de Burgers stochastique est de nature continue). Mais on peut raisonnablement conjecturer que sur des grandes échelles de temps et d'espace, cette approximation devienne bonne et que les deux processus se ressemblent. Dans le jargon des physiciens, on dit que ces deux processus sont dans la même *classe d'universalité*.

2 Limite de grande échelle

2.1 Ré-échelonnement des processus

Maintenant que nous avons défini le ASEP et l'équation de Burgers stochastique, notre objectif est d'étudier leur limite de grande échelle. Soit $L \geq 1$ notre paramètre d'échelle : nous nous intéressons au processus à échelle spatiale d'ordre L . Notre objectif est alors d'une part de trouver l'échelle de temps caractéristique $\tau_L > 0$ d'évolution du processus sur des échelles d'espace L , et d'autre part de trouver la limite d'échelle du processus ré-échelonné, c'est-à-dire la limite des processus suivants quand $L \rightarrow +\infty$:

$$u^L(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} L^{d/2} u(\tau_L t, Lx), \quad v^L(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{L^{d/2}} \sum_{y \in (\mathbb{Z}/L)^d} (\eta_{Ly}^{\tau_L t} - 1/2) \delta_y(x), \quad (2.1) \quad \boxed{\text{e:rescaling}}$$

où u et η correspondent respectivement à la solution de l'équation de Burgers stochastique et au ASEP.

Le $-1/2$ dans la définition de v^L , ainsi que les facteurs $L^{d/2}$ et $2/L^{d/2}$ dans la définition de u^L et v^L , servent respectivement à centrer et réduire les processus. Justifions-le.

En ce qui concerne v^L , on sait par stationnarité que pour tout $t \geq 0$, la famille $(\eta_{Ly}^{\tau_L t})_{y \in (\mathbb{Z}/L)^d}$ est iid de loi $\mathcal{B}(1/2)$. On peut alors facilement vérifier avec le théorème central limite que si φ est une fonction test alors :

$$\langle v^L(t), \varphi \rangle \xrightarrow[L \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2).$$

En ce qui concerne u^L , on sait par stationnarité que pour tout $t \geq 0$, $u(\tau_L t, \cdot)$ a la loi d'un bruit blanc. On peut alors en déduire que $u^L(t, \cdot)$ est aussi un bruit blanc du fait du petit lemme très utile suivant :

Lemme 2.1 : Soit ξ un bruit blanc spatial sur \mathbb{R}^d , et $A \in GL_d(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Alors $\xi^A : x \mapsto |\det(A)|^{1/2} \xi(Ax)$ a aussi la loi d'un bruit blanc spatial sur \mathbb{R}^d .

Démonstration : ξ^A est clairement un processus gaussien centré. Si φ est une fonction test, alors on remarque par changement de variables que :

$$\langle \xi^A, \varphi \rangle = \int |\det(A)|^{1/2} \xi(Ax) \varphi(x) dx = \int \xi(y) |\det(A)|^{-1/2} \varphi(A^{-1}y) dy.$$

Ainsi si φ et ψ sont deux fonctions tests, alors on en déduit par changement de variables que :

$$\text{Cov}(\langle \xi^A, \varphi \rangle, \langle \xi^A, \psi \rangle) = \int |\det(A)|^{-1/2} \varphi(A^{-1}y) |\det(A)|^{-1/2} \psi(A^{-1}y) dy = \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

ce qui conclut. □

Dans la suite, on se contrera plutôt sur l'équation de Burgers stochastique que le ASEP : en effet ce dernier est beaucoup plus adapté à des arguments de "scaling", ce qui rend son étude heuristique bien plus facile.

2.2 La classification heuristique en fonction de la dimension

Le but de cette section est de donner un argument heuristique suggérant le comportement de u^L (notamment quelle est l'échelle de temps τ_L à choisir ?) quand $L \rightarrow +\infty$, en fonction de la dimension d .

Tout d'abord, dérivons l'équation aux dérivées partielles stochastiques satisfaite par u^L . On remarque que :

$$\begin{aligned} \partial_t u^L(t, x) &= L^{d/2} \tau_L \partial_t u(\tau_L t, Lx), \\ \Delta u^L(t, x) &= L^{d/2+2} \Delta u(\tau_L t, Lx), \\ \partial_1 (u^L)^2(t, x) &= L^{d+1} \partial_1 (u^2)(\tau_L t, Lx), \end{aligned}$$

et enfin en posant $\vec{\xi}^L(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} L^{d/2} \tau_L^{1/2} \vec{\xi}(\tau_L t, Lx)$, on sait d'après le lemme 2.1 que ξ^L est un bruit blanc spatio-temporel. Ainsi, on a :

$$\text{div } \vec{\xi}^L(t, x) = L^{d/2+1} \tau_L^{1/2} \text{div } \vec{\xi}(\tau_L t, Lx).$$

Ainsi, on déduit de l'équation de Burgers stochastique (1.4) l'équation suivante pour u^L :

$$\partial_t u^L = \frac{\tau_L}{L^2} \frac{1}{2} \Delta u^L + \lambda \frac{\tau_L}{L^{d/2+1}} \partial_1 (u^L)^2 + \left(\frac{\tau_L}{L^2} \right)^{1/2} \text{div } \vec{\xi}^L. \quad (2.2) \quad \boxed{\text{e:RescaledBurger}}$$

En fait, précisons que si l'on utilise plutôt l'équation de Burgers stochastique rigoureuse (1.5), alors on obtient :

$$\partial_t u^L = \frac{\tau_L}{L^2} \frac{1}{2} \Delta u^L + \lambda \frac{\tau_L}{L^{d/2+1}} \varphi_L * \partial_1 (\varphi_L * u^L)^2 + \left(\frac{\tau_L}{L^2} \right)^{1/2} \text{div } \vec{\xi}^L, \quad (2.3) \quad \boxed{\text{e:RescaledBurger}}$$

où $\varphi_L(x) \stackrel{\text{def}}{=} L^d \varphi(Lx)$ (remarquez qu'il s'agit d'une suite régularisante quand $L \rightarrow +\infty$). Pour alléger cette section, nous nous contentons de (2.2) (bien qu'il faille en réalité considérer (2.3)).

Un choix naturel est alors de prendre $\tau_L^{\text{diff}} \stackrel{\text{def}}{=} L^2$: il s'agit du scaling *diffusif*. On l'appelle ainsi car il s'agit du même scaling qu'une marche aléatoire (ou diffusion) : par le théorème central limite, on sait qu'une marche aléatoire parcourt une distance d'ordre \sqrt{t} en un temps t . Notons alors u_{diff}^L le u^L obtenu avec le choix $\tau_L = \tau_L^{\text{diff}}$; on remarque que u_{diff}^L satisfait :

$$\partial_t u_{\text{diff}}^L = \frac{1}{2} \Delta u_{\text{diff}}^L + \lambda L^{\frac{2-d}{2}} \partial_1 (u_{\text{diff}}^L)^2 + \text{div } \vec{\xi}^L. \quad (2.4) \quad \boxed{\text{e:ScalingDiffusi}}$$

A partir de l'équation ci-dessus pour u_{diff}^L , on peut distinguer heuristiquement 3 régimes selon la dimension :

- $d \geq 3$ (Régime sur-critique) : dans ce cas, le coefficient devant la non-linéarité, i.e. $\lambda L^{\frac{2-d}{2}}$, tend vers 0 quand $L \rightarrow +\infty$. On peut alors s'attendre qu'à grandes échelles, la non-linéarité a peu d'importance : on dit que l'équation est *sur-critique*. Ainsi, on s'attend à ce que le processus soit bien *diffusif*, et à ce que u_{diff}^L converge vers la solution d'une EDPS linéaire (en particulier le processus limite devrait être *gaussien*).
- $d = 1$ (Régime sous-critique) : dans ce cas, le coefficient devant la non-linéarité, i.e. $\lambda L^{1/2}$, diverge quand $L \rightarrow +\infty$. On peut alors s'attendre à ce qu'à grandes échelles la non-linéarité domine le reste de l'équation : on dit que l'équation est *sous-critique*. Ainsi, le bon scaling n'est pas le scaling diffusif, mais plutôt le scaling *superdiffusif* suivant : $\tau_L = L^{3/2}$. Avec ce choix, on obtient en effet :

$$\partial_t u^L = L^{-1/2} \frac{1}{2} \Delta u + \lambda \partial_1 (u^L)^2 + L^{-1/4} \text{div } \vec{\xi}^L. \quad (2.5) \quad \boxed{\text{e:Scaling1D}}$$

Puisque la non-linéarité domine, on s'attend aussi à ce que le processus limite ne soit *pas gaussien*.

- $d = 2$ (Régime critique) : dans ce cas, le coefficient devant la non-linéarité est λ , donc constant. La non-linéarité semble donc être du même ordre de grandeur que le reste de l'équation : on dit que l'équation est *critique*. On observe que :

$$\partial_t u_{\text{diff}}^L = \frac{1}{2} \Delta u_{\text{diff}}^L + \lambda \partial_1 (u_{\text{diff}}^L)^2 + \text{div } \vec{\xi}^L, \quad (2.6) \quad \boxed{\text{e:Scaling2D}}$$

ce qui pourrait laisser croire que le scaling diffusif est le bon. Cependant, cette prédiction s'avère trop naïve : pour des raisons plus subtiles, on s'attend en réalité à ce que le bon scaling soit le scaling *log-superdiffusif* suivant : $\tau_L = L^2 \log(L)^{-2/3}$; mais que le processus limite soit tout de même *gaussien* !

Le but des sections suivantes est de présenter les théorèmes rigoureux correspondants aux régimes ci-dessus.

$s: d \geq 3$

2.3 Le régime sur-critique $d \geq 3$

Rappelons l'équation satisfait par u_{diff}^L :

$$\partial_t u_{\text{diff}}^L = \frac{1}{2} \Delta u_{\text{diff}}^L + \lambda L^{\frac{2-d}{2}} \varphi_L * \partial_1 (\varphi_L * u_{\text{diff}}^L)^2 + \text{div } \vec{\xi}^L,$$

et que puisque $d \geq 3$, $L^{\frac{2-d}{2}} \rightarrow 0$ quand $L \rightarrow +\infty$. On pourrait alors s'attendre à ce que la non-linéarité ait un effet négligeable à la limite, et ainsi que la loi de u_{diff}^L converge vers celle de la solution de l'équation de la chaleur stochastique :

$$\partial_t w = \frac{1}{2} \Delta w + \text{div } \vec{\xi}.$$

En réalité, c'est une prévision un peu trop naïve (bien que pas très loin de la vérité). Il s'avère que la non-linéarité a tout de même un effet à la limite, en augmentant légèrement la diffusion dans la direction \vec{e}_1 .

Théorème 1 (G. Cannizzaro, M. Gubinelli, F. Toninelli, 2023 - [2])

Il existe une constante $D_\lambda > 0$ telle que, lorsque $L \rightarrow +\infty$, le processus u_{diff}^L converge en loi² vers le processus w , solution de l'équation de la chaleur stochastique suivante :

$$\begin{cases} \partial_t w = \frac{1}{2} \Delta_\lambda w + \text{div}_\lambda \vec{\xi}, \\ w|_{t=0} = \chi \end{cases}$$

où $\vec{\xi}$ est un bruit blanc spatio-temporel vectoriel et χ un bruit blanc spatial, indépendants entre eux; et où l'on a défini les opérateurs $\Delta_\lambda f \stackrel{\text{def}}{=} \Delta f + D_\lambda \partial_1^2 f$ et $\text{div}_\lambda \vec{f} \stackrel{\text{def}}{=} \text{div } \vec{f} + D_\lambda^{1/2} \partial_1 f_1$.

Mentionnons qu'un résultat analogue est aussi connu pour le ASEP (voir [4]).

s: d=1

2.4 Le régime sous-critique $d = 1$

La dimension 1 est de très loin le cas le plus étudié dans la littérature. Une des raisons est que l'équation de Burgers stochastique en dimension 1 est étroitement liée à l'équation KPZ, qui est conjecturée être dans la même classe d'universalité que de très nombreux modèles discrets de surfaces et interfaces aléatoires (ASEP, modèle SOS, polymères dirigés, bord du spectre de matrices aléatoires, percolation de dernier passage, modèle d'Eden, dépôt balistique, etc...). L'équation KPZ est donnée formellement par :

$$\partial_t h = \frac{1}{2} h'' + (h')^2 + \xi, \tag{2.7} \quad \text{e:KPZeq}$$

où ξ est un bruit blanc spatio-temporel. On peut remarquer que h' satisfait (au moins formellement) l'équation de Burgers stochastique.

En réalité, la raison principale de cette littérature très riche en dimension 1 est que : d'une part, comme très souvent en probabilités, beaucoup de modèles discrets unidimensionnels s'avèrent être *intégrables* (ce qui signifie grossièrement qu'il sont exactement solubles, notamment via des formules combinatoires et déterminantales); et d'autre part il est possible de définir rigoureusement l'équation KPZ (2.7) (sans ajouter de convolution sur la non-linéarité) en la linéarisant via ce qui s'appelle la transformée de Cole-Hopf.

2. Plus précisément, la convergence en loi est relative à la topologie des $C([0, T], \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$ pour $T > 0$, où $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des distributions.

Retournons à la question de la limite de grande échelle. Rappelons que l'on choisit le scaling superdiffusif $\tau_L = L^{3/2}$, et qu'alors u_L satisfait l'équation :

$$\partial_t u^L = L^{-1/2} \Delta u + \lambda \partial_1 (u^L)^2 + L^{-1/4} \operatorname{div} \xi^L.$$

On pourrait alors penser naïvement que la loi de u^L convergerait quand $L \rightarrow +\infty$ vers celle de la solution de l'EDP :

$$\partial_t w = \lambda \partial_1 w^2,$$

mais il s'avère que c'est complètement faux, la limite de u^L étant bien plus subtile !

Théorème 2 (*J. Quastel, S. Sarkar, 2021 - [5]*)

Lorsque $L \rightarrow +\infty$, le processus u^L converge en loi vers le processus \mathfrak{h}' , où \mathfrak{h} est un processus non gaussien appelé **point fixe de KPZ**.

Le point fixe de KPZ est le processus correspondant à la limite de grande échelle de l'équation KPZ (2.7), et a la propriété d'être invariant selon le scaling "1 : 2 : 3", c'est-à-dire que pour tout $L > 0$:

$$(L^{-1/2} \mathfrak{h}(L^{3/2}t, Lx))_{t>0, x \in \mathbb{R}} \stackrel{\text{loi}}{\sim} (\mathfrak{h}(t, x))_{t>0, x \in \mathbb{R}}.$$

Sa loi peut être caractérisée par des formules déterminantales, étroitement liées à celles associées à certains modèles intégrables de la classe d'universalité KPZ.

Mentionnons enfin que des résultats analogues de convergence vers le point fixe de KPZ ont été obtenues pour le ASEP (aussi dans l'article [5]).

s: d=2

2.5 Le régime critique $d = 2$

On choisit le scaling log-superdiffusif $\tau_L = L^2 / \log(L)^{2/3}$. Ainsi, u^L satisfait l'équation :

$$\partial_t u^L = \log(L)^{-2/3} \frac{1}{2} \Delta u + \lambda \log(L)^{-2/3} \partial_1 (u^L)^2 + \log(L)^{-1/3} \operatorname{div} \xi^L.$$

La conjecture concernant le comportement de u^L quand $L \rightarrow +\infty$ est alors la suivante :

Conjecture *Il existe une constante $D_\lambda > 0$ telle que, lorsque $L \rightarrow +\infty$, le processus u^L converge en loi vers le processus w solution de l'équation de la chaleur stochastique suivante :*

$$\begin{cases} \partial_t w = D_\lambda \frac{1}{2} \partial_1^2 w + D_\lambda^{1/2} \partial_1 \xi, \\ w|_{t=0} = \chi \end{cases}$$

où ξ est un bruit blanc spatio-temporel et χ un bruit blanc spatial, indépendants entre eux. En particulier, le processus limite w est gaussien.

Bien qu'il s'agisse toujours d'un problème ouvert, des résultats partiels sont connus.

Tout d'abord, pour déterminer la bonne échelle τ_L , on peut introduire la diffusivité, définie heuristiquement pour tout $t > 0$ par :

$$D(t) = \frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \operatorname{Cov}(u(0, 0), u(t, x)) \, dx.$$

L'idée est alors qu'à l'échelle temporelle t , l'échelle spatiale caractéristique de l'évolution du processus u est donnée par $\sqrt{t} D(t)^{1/2}$. Ainsi, pour justifier que le scaling log-superdiffusif $\tau_L = L^2 / \log(L)^{2/3}$ est bien le bon, il s'agirait de montrer que : $D(t) \sim \log(t)^{2/3}$ quand $t \rightarrow +\infty$. Cependant, il s'avère plus facile de travailler en pratique avec la transformée de Laplace de D , donnée par :

$$\mathcal{D}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} D(t) \mu e^{-\mu t} dt .$$

Ainsi, l'asymptotique recherchée devient $\mathcal{D}(\mu) \sim \log(1/\mu)^{2/3}$ quand $\mu \rightarrow 0$ (l'idée étant que la mesure de probabilité $\mu e^{-\mu t} dt$ charge des "t d'ordre $1/\mu$ "). Dans ce sens, il a alors été montré :

Théorème 3 (*D. Gasapari, L. Haunschmid-Sibitz, 2024 - [3]*)

Il existe $\alpha > 0$ tel que lorsque $\mu \rightarrow 0$ l'on ait :

$$\log(1/\mu)^{2/3} \log \log \log(1/\mu)^{-\alpha} \lesssim \mathcal{D}(\mu) \lesssim \log(1/\mu)^{2/3} \log \log \log(1/\mu)^\alpha . \quad (2.8) \quad \boxed{\text{e:log2/3diff}}$$

Mentionnons qu'un résultat analogue a été obtenue pour le ASEP (voir [7]).

Mentionnons aussi que dans un article en travail conjoint avec Giuseppe Cannizzaro et Fabio Toninelli qui devrait bientôt paraître, nous montrons l'estimée (2.8) sans les facteurs $\log \log \log(1/\mu)^{\pm\alpha}$.

Enfin, une autre direction possible pour aborder la conjecture est d'autoriser la constante de couplage à dépendre de L (notons-la alors λ_L); et typiquement de prendre $\lambda_L \rightarrow 0$ quand $L \rightarrow +\infty$. En diminuant ainsi l'intensité de la non-linéarité, l'étude devient plus facile. Il s'avère alors que l'on peut démontrer :

Théorème 4 : (*G. Cannizzaro, F. Toninelli, Q. Moulard, 2024+*)

Supposons que lorsque $L \rightarrow +\infty$, l'on ait :

$$\frac{1}{\sqrt{\log L}} \ll \lambda_L \ll 0 .$$

Alors en prenant $\tau_L = \frac{L^2}{\lambda_L^{4/3} \log(L)^{2/3}}$, les lois fini-dimensionnelles du processus u^L converge vers celle du processus w solution de l'équation de la chaleur stochastique suivante :

$$\begin{cases} \partial_t w = D \frac{1}{2} \partial_1^2 w + D^{1/2} \partial_1 \xi , \\ w|_{t=0} = \chi \end{cases}$$

où ξ est un bruit blanc spatio-temporel et χ un bruit blanc spatial, indépendants entre eux ; et $D > 0$ est une constante explicite.

Références

- van1985excess [1] Henk van BEIJEREN, Ryszard KUTNER et Herbert SPOHN. "Excess noise for driven diffusive systems". In : *Physical review letters* 54.18 (1985), p. 2026.
- aro2024gaussian [2] Giuseppe CANNIZZARO, Massimiliano GUBINELLI et Fabio TONINELLI. "Gaussian fluctuations for the stochastic Burgers equation in dimension $d \geq 2$ ". In : *Communications in Mathematical Physics* 405.4 (2024), p. 1-60.

- de2024log [3] Damiano DE GASPARI et Levi HAUNSCHMID-SIBITZ. “ $(\log t)^{2/3}$ -superdiffusivity for the 2d stochastic Burgers equation”. In : *arXiv preprint arXiv :2404.07728* (2024).
- im2004diffusive [4] Claudio LANDIM, Stefano OLLA et Srinivasa RS VARADHAN. “Diffusive behaviour of the equilibrium fluctuations in the asymmetric exclusion processes”. In : *Stochastic analysis on large scale interacting systems*. T. 39. Mathematical Society of Japan, 2004, p. 307-325.
- 2023convergence [5] Jeremy QUASTEL et Sourav SARKAR. “Convergence of exclusion processes and the KPZ equation to the KPZ fixed point”. In : *Journal of the American Mathematical Society* 36.1 (2023), p. 251-289.
- 1991interaction [6] Frank SPITZER. “Interaction of Markov processes”. In : *Random Walks, Brownian Motion, and Interacting Particle Systems : A Festschrift in Honor of Frank Spitzer*. Springer, 1991, p. 66-110.
- yau2004law [7] Horng-Tzer YAU. “ $\log(t)^{2/3}$ law of the Two Dimensional Asymmetric Simple Exclusion Process”. In : *Annals of mathematics* (2004), p. 377-405.