

Introduction au domaine de recherche  
**Limites d'échelle de graphes aléatoires sous  
contrainte**

Arthur Rousseau  
Sous la direction de Nicolas Broutin

## 1 Introduction et notations

L'introduction des graphes aléatoires remonte à Erdős et Rényi en 1960 et au modèle éponyme qu'ils ont imaginé. Les graphes aléatoires ont ensuite été largement étudiés, notamment parce qu'ils permettent de modéliser une grande variété de situations en physique (physique des particules et physique statistique notamment) ainsi qu'en informatique (théorie des réseaux, structure de données, informatique quantique...). En particulier, l'étude de graphes aléatoires de grande taille est devenue un sujet à part entière dans la modélisation et l'analyse de données informatiques. Cependant, les algorithmes existant aujourd'hui pour analyser ces grands graphes sont coûteux en terme de temps de calcul.

En 1991, David Aldous publie un article qui étudie la limite d'échelle d'un graphe d'Erdős-Rényi : l'objectif était, à partir d'une suite de graphes d'Erdős-Rényi de taille croissante, de déterminer si un objet limite pouvait être construit, et comment. Aldous a ainsi introduit des outils topologiques pour définir les convergences, puis il a introduit l'objet qui devait servir de limite et a prouvé une convergence. L'objet en question, l'arbre continu brownien, est un espace topologique aléatoire construit à partir d'un mouvement brownien drifté. De nombreux articles ont ensuite détaillé les travaux d'Aldous et abordé des modèles différents des graphes d'Erdős-Rényi.

Les sections 2, 3 et 4 retracent la construction d'Aldous, en ajoutant des éléments de détail. Ces trois sections sont notamment inspiré d'un cours donné par Nicolas Broutin à Sorbonne Université. La section 5 développe une seconde construction introduite en 2023. Enfin, la section 6 propose un autre modèle que les graphes d'Erdős-Rényi, et évoque les résultats obtenus dans ce cadre.

Soient  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels et  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . On note  $\llbracket 1, n \rrbracket = \{1, \dots, n\}$ . Soit  $l_{\downarrow}^2$  l'ensemble des suites décroissantes  $(x_j)_{j \geq 1}$  telles que  $\sum_{j \geq 1} x_j^2 < +\infty$  muni de la distance euclidienne associée.

Un graphe est défini comme un ensemble de sommets et un ensemble d'arêtes entre ces sommets. On dit qu'il est simple s'il y a au plus une arête entre deux sommets et qu'il n'y a pas d'arête entre un sommet et lui-même (pas de boucles). On travaille avec des graphes aléatoires, et on s'intéresse particulièrement à leurs composantes connexes. On note respectivement  $\xrightarrow{\text{p.s.}}$ ,  $\xrightarrow{\mathbb{P}}$  et  $\xrightarrow{(d)}$  les convergences presque sûre, en probabilité et en loi.

## 2 Pont brownien et excursion brownienne

On aborde dans cette partie la construction d'un objet qui nous servira dans toute la suite, l'excursion brownienne. Le mouvement brownien ne sera pas réintroduit ici. Pour une construction complète et détaillée, voir [1] ou [2], ou n'importe quel cours traitant du sujet. On rappellera seulement que le mouvement brownien standard  $(B_t)_{t \geq 0}$  est l'unique processus presque sûrement continu avec  $B_0 = 0$  dont les incréments  $B_t - B_s$  sont des variables aléatoires gaussiennes centrées de variance  $|t - s|$ . Par la suite, le terme standard signifie qu'on travaille avec un mouvement brownien standard. Pour le pont brownien et l'excursion brownienne, on pourra aussi se référer à Bertoin et Pitman [3] ou à Vervaat [4] pour la construction éponyme explicite de l'excursion

brownienne.

**Définition 1** (Convergence faible de mesures). Soit  $E$  un espace mesurable et  $(\nu_n)$  une famille de mesure de probabilités sur  $E$ . On dit que la famille  $(\nu_n)$  *converge faiblement* vers une mesure de probabilité  $\nu$  si pour toute fonction mesurable bornée  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\int_E \phi(\omega) \nu_n(d\omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_E \phi(\omega) \nu(d\omega).$$

**Lemme 1.** Pour  $\varepsilon > 0$ , on définit la mesure de probabilité  $\nu_\varepsilon$  sur  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  par

$$\int \phi(\omega) \nu_\varepsilon(d\omega) = \mathbb{E}[\phi(B) | -\varepsilon < B_1 < \varepsilon],$$

où  $\phi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue bornée arbitraire. Alors il existe une mesure de probabilité  $\nu_0$  sur  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  telle que

$$\nu_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_0.$$

**Définition 2** (Pont brownien). Le *pont brownien* est défini comme un processus de loi  $\nu_0$ . Informellement, cela revient à considérer un mouvement brownien conditionné à prendre la valeur 0 au temps 1, mais cet événement est de probabilité nulle, d'où la construction ci-dessus.

**Lemme 2.** Pour  $\varepsilon > 0$ , on définit la mesure de probabilité  $\nu'_\varepsilon$  sur  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  par

$$\int \phi(\omega) \nu'_\varepsilon(d\omega) = \mathbb{E}[\phi(B^0) | B^0 \geq -\varepsilon],$$

où  $\phi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue bornée arbitraire. Alors il existe une mesure de probabilité  $\nu'_0$  sur  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  telle que

$$\nu'_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \nu'_0.$$

**Définition 3** (Excursion brownienne). L'*excursion brownienne* est définie comme un processus de loi  $\nu'_0$ . On la note  $(e_t)_{t \in [0, 1]}$ . Informellement, cela revient à considérer un pont brownien conditionné à rester strictement positif, mais cet événement est de probabilité nulle, d'où la construction ci-dessus.

*Remarque.* Cette excursion peut être définie sur tout segment  $[0, T]$ ,  $T > 0$ .

### 3 Limite d'échelle d'arbres comme espaces métriques mesurés

#### 3.1 La distance de Gromov-Hausdorff-Prokhorov et la topologie GHP

On définit ici une distance et sa topologie induite qui nous permettra de définir les objets limites sur lesquels on travaille. Pour plus de détails sur cette topologie, on se référera à l'article originel de Gromov [5] ou à [6] pour une définition plus complète de la topologie GHP.

**Définition 4** (Distance de Gromov-Hausdorff). Soient  $X_1 = (X_1, d_1)$ ,  $X_2 = (X_2, d_2)$  deux espaces métriques. Pour un sous-ensemble  $C \subset X_1 \times X_2$ , la *distorsion* de  $C$  est définie par

$$\text{dis}(C) = \sup\{|d_1(x_1, y_1) - d_2(x_2, y_2)| : (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in C\}.$$

Une *correspondance*  $\mathcal{R}$  entre  $X_1$  et  $X_2$  est un sous-ensemble mesurable de  $X_1 \times X_2$  tel que pour tout  $x_1 \in X_1$ , il existe au moins un  $x_2 \in X_2$  tel que  $(x_1, x_2) \in \mathcal{R}$  et réciproquement. La *distance de Gromov-Hausdorff* entre  $X_1$  et  $X_2$  est définie par

$$d_{\text{GH}}(X_1, X_2) = \frac{1}{2} \inf\{\text{dis}(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \text{ is a correspondence between } X_1 \text{ and } X_2\}.$$

**Définition 5** (Distance de Gromov-Hausdorff-Prokhorov). Un *espace métrique mesuré*  $X = (X, d, \mu)$  est un espace métrique avec une mesure finie associée  $\mu$  sur la sigma-algèbre borélienne sur  $X$ . Étant donnés deux espaces métriques mesurés  $X_1 = (X_1, d_1, \mu_1)$ ,  $X_2 = (X_2, d_2, \mu_2)$  et une mesure  $\pi$  sur l'espace produit  $X_1 \times X_2$ , la *divergence* de  $\pi$  par rapport à  $\mu_1, \mu_2$  est définie par

$$D(\pi; \mu_1, \mu_2) = \|\mu_1 - \pi_1\| + \|\mu_2 - \pi_2\|$$

où  $\pi_1, \pi_2$  sont les marginales de  $\pi$  et  $\|\cdot\|$  est la distance en variation totale de mesures signées.

On définit la fonction  $d_{\text{GHP}}$  par

$$d_{\text{GHP}}(X_1, X_2) = \inf \left\{ \max \left( \frac{1}{2} \text{dis}(\mathcal{R}), D(\pi; \mu_1, \mu_2), \pi(\mathcal{R}^c) \right) \right\},$$

où l'infimum est pris sur toutes les correspondances  $\mathcal{R}$  et mesures  $\pi$  sur  $X_1 \times X_2$ .

$d_{\text{GHP}}$  est une pseudo-distance qui définit une relation d'équivalence  $\sim$  sur l'ensemble des espaces métriques mesurés : pour deux espaces métriques mesurés  $X$  et  $Y$ ,  $X \sim Y \Leftrightarrow d_{\text{GHP}}(X, Y) = 0$ . L'ensemble  $\mathfrak{S}$  des classes d'équivalences équipé de la distance induite est un espace métrique séparable complet. Dans ce qui suit, pour alléger les notations, on notera aussi  $X = (X, d, \mu)$  pour une classe d'équivalence et  $d_{\text{GHP}}$  pour la distance induite. On appelle GHP la topologie associée.

### 3.2 L'arbre continu brownien

Cette section définit l'objet central de ce mémoire, à savoir les arbres réels, et en particulier l'arbre continu brownien d'Aldous. On pourra se référer aux articles d'Aldous sur le sujet [7], [8] et [9]. On pourra aussi se référer à l'étude de Le Gall [10].

**Définition 6** (Arbres réels et excursions). Un espace métrique compact  $(X, d)$  est appelé *arbre réel* si pour chaque paire de points il existe une unique géodésique entre ces deux points qui soit aussi le seul chemin auto-évitant entre ces deux points.

Pour  $0 < a < b < +\infty$ , une *excursion* sur  $[a, b]$  est une fonction continue  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  avec :

$$h(a) = 0 = h(b) \text{ and } \forall t \in ]a, b[, h(t) > 0.$$

La *longueur* d'une telle excursion est  $b - a$ .

**Proposition 1** ([10], Fig. 1). Pour  $l > 0$ , étant donnée une excursion  $h$  sur  $[0, l]$ , on peut construire un arbre réel comme suit. On définit pseudo-distance  $d_h$  sur  $[0, l]$  :

$$d_h(s, t) = h(s) + h(t) - 2 \inf_{u \in [s, t]} h(u), \quad s, t \in [0, l].$$

On définit la relation d'équivalence  $s \sim t \Leftrightarrow d_h(s, t) = 0$ , on considère  $[0, l]/\sim$  l'espace quotient associé et l'espace métrique

$$\mathcal{T}_h = ([0, l]/\sim, d_h)$$

(on utilise toujours  $d_h$  pour la projection de la distance sur  $[0, l]/\sim$ ). Alors  $\mathcal{T}_h$  est un arbre réel.

On considère maintenant  $\pi_h : [0, l] \rightarrow \mathcal{T}_h$  la projection canonique et  $\mu_h$  le poussé en avant de la mesure de Lebesgue de  $[0, l]$  sur  $\mathcal{T}_h$  via  $\pi_h$ . On enracine  $\mathcal{T}_h$  en  $\rho = \pi_h(0)$ . Alors  $(\mathcal{T}_h, d_h, \mu_h)$  est un espace métrique mesuré compact enraciné. Pour chaque  $x \in [0, l]$ , on définit la hauteur du sommet  $\pi_h(x)$  comme  $\text{ht}(\pi_h(x)) = h(x)$  (qui est bien défini car  $h$  est constante sur  $\pi_h^{-1}(x)$ ).

**Définition 7** (L'arbre continu brownien d'Aldous). Soit  $\mathbf{e}$  une excursion brownienne standard sur  $[0, 1]$  définie à la définition 3. On construit l'arbre réel compact aléatoire  $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$  comme ci-dessus avec  $h = \mathbf{e}$ .

*Remarque.* La mesure associée  $\mu_{\mathbf{e}}$  est presque sûrement supportée par les feuilles de  $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$ .

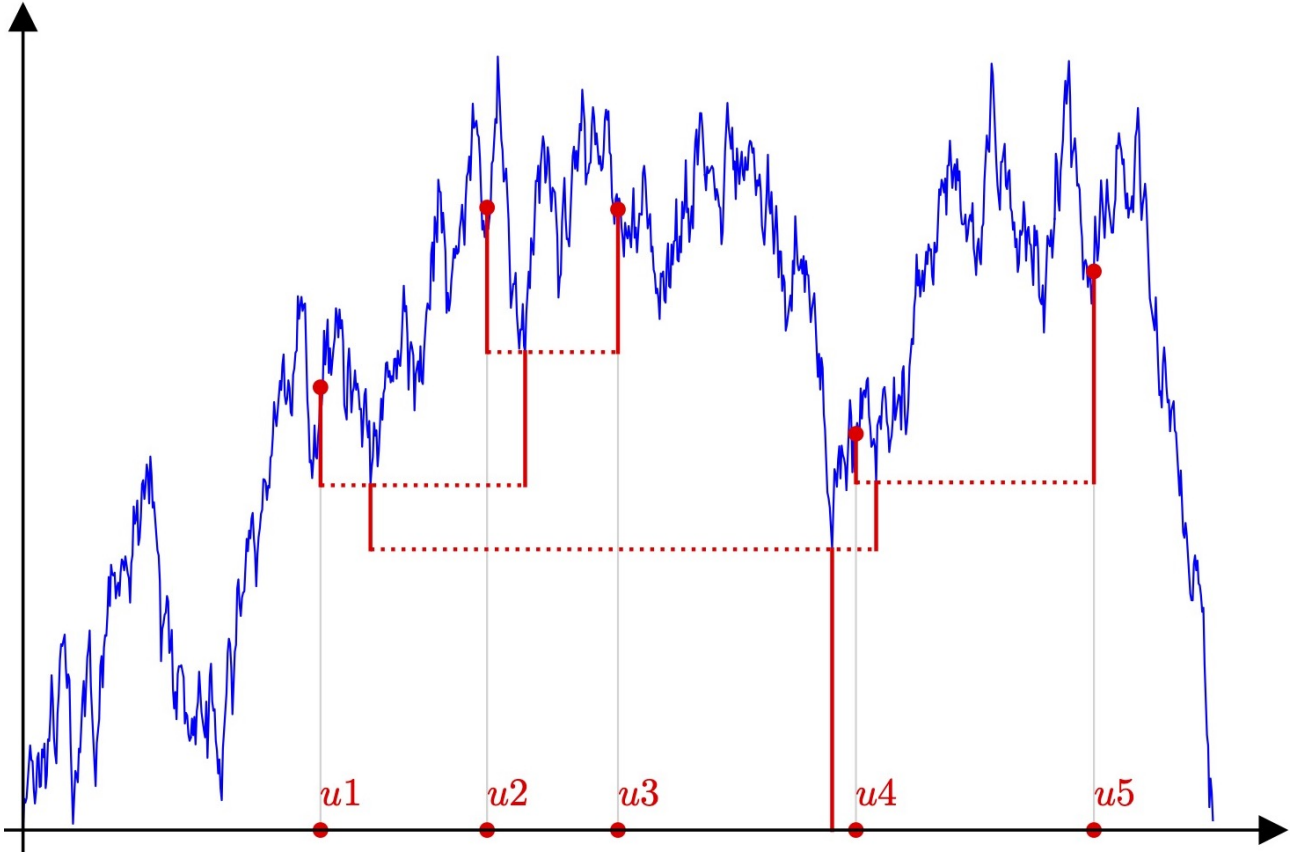


Figure 1: Une excursion réelle et la projection de 5 points sur l'arbre réel qu'elle induit

### 3.3 Arbres plans

Dans cette section, on définit un modèle pour des arbres enracinés non-étiquetés dont les enfants de chaque noeud sont ordonnés. On énonce aussi un premier théorème de convergence d'un modèle de graphe (ici les arbres plans uniformes) vers sa limite d'échelle.

**Définition 8** (Ordre généalogique). On travaille sur l'ensemble  $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$  des mots sur l'alphabet  $\mathbb{N}$ . L'ordre généalogique sur  $\mathcal{U}$  est l'ordre partiel  $\leq$  tel que  $u \leq v$  si et seulement si  $u$  est un préfixe de  $v$ , c'est-à-dire s'il existe  $w \in \mathcal{U}$  tel que  $uw = v$ .  $v$  est un descendant de  $u$  et  $u$  est un ancêtre de  $v$ . Les enfants de  $u \in \mathcal{U}$  sont les  $ui$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

**Définition 9** (Arbre plan). Un sous-ensemble  $t$  de  $\mathcal{U}$  est appelé un arbre plan si

- il contient la racine :  $\emptyset \in t$
- pour tout  $v \in t$ , pour tout  $u \leq v$ , on a  $u \in t$
- pour tout  $u \in t$ , il existe un entier  $k_u(t)$  tel que  $ui \in t$  si et seulement si  $0 \leq i < k_u(t)$ .  $k_u(t)$  est le nombre d'enfants de  $u$  dans  $t$ .

Les éléments de  $t$  sont appelés les noeuds de  $t$ . On note  $\mathbb{T}$  l'ensemble des arbres plans, et  $\mathbb{T}_n$  l'ensemble des arbres plans ayant exactement  $n$  noeuds ( $|t| = n$ ),  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Proposition 2.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{T}_n$  est fini et son cardinal est exactement le  $(n-1)$ -ième nombre de Catalan  $\text{Cat}(n-1) = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ .

Le théorème suivant a été démontré par Aldous [7] et par Marckert et Mokkadem [11].

**Théorème 1** (Convergence d'un arbre plan uniforme vers l'arbre brownien). *Soit  $\mathbf{e}$  une excursion brownienne standard. On considère  $T_n$  un arbre plan aléatoire uniforme dans  $\mathbb{T}_n$ , muni de la distance de graphes  $d_n$  et de la mesure uniforme  $\mu_n$  sur les noeuds. Alors*

$$(T_n, n^{-1/2}d_n, \mu_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(d), \text{GHP}} (\mathcal{T}_{\mathbf{e}}, \sqrt{2}d_{\mathbf{e}}, \mu_{\mathbf{e}}).$$

## 4 Graphes d'Erdős-Rényi

Le modèle d'Erdős-Rényi pour les graphes est l'un des plus étudiés, de par sa simplicité et sa généralité. La plupart des arguments ci-dessous ont été introduits par Aldous, notamment dans [12].

Dans cette section,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Définition 10** (Graphes d'Erdős-Rényi, [13]). Soit  $p \in [0, 1]$ . Le *graphe d'Erdős-Rényi* de taille  $n$  avec probabilité d'arête  $p$ , noté  $ER(n, p)$ , est un graphe aléatoire simple non-orienté d'ensemble déterministe de sommets  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et d'ensemble aléatoire d'arêtes  $E_n$  défini comme suit : pour chaque  $i < j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'arête  $\{i, j\}$  appartient à  $E_n$  avec probabilité  $p$ , et toutes les arêtes sont choisies uniformément les unes des autres.

### 4.1 Convergences des tailles des composantes connexes

Le théorème suivant est dû à Janson, Łuczak and Ruciński [14].

**Théorème 2** (Point critique pour la taille des composantes connexes d'un graphe d'Erdős-Rényi). *Soient  $c > 0$  et  $p = \frac{c}{n}$ . Soit  $C_1^n, C_2^n$  les deux plus grandes composantes connexes de  $ER(n, p)$ , dans cet ordre.*

1. *Si  $c < 1$ , alors avec probabilité tendant vers 1 quand  $n \rightarrow +\infty$ , on a  $|C_1^n| \leq \frac{3}{(1-c)^2} \log n$ .*
2. *Si  $c > 1$ , soit  $\beta \in ]0, 1[$  l'unique solution de  $\beta + e^{-c\beta} = 1$ . Alors presque sûrement,  $|C_1^n| \sim \beta n$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et avec probabilité tendant vers 1 quand  $n \rightarrow +\infty$ , on a  $|C_2^n| \leq \frac{16c}{(c-1)^2} \log n$ .*

**Définition 11.** Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard. Soient  $B_t^\lambda = \lambda t - \frac{t^2}{2} + B_t$  et  $\underline{B}_t^\lambda = \inf\{B_s^\lambda : 0 \leq s \leq t\}$ . On définit le *processus réfléchi* et son ensemble de zéros par  $W_t^\lambda = B_t^\lambda - \underline{B}_t^\lambda$  et  $Z_\lambda = \{t \geq 0 : W_t^\lambda = 0\}$ .

**Proposition 3** (Aldous, [12]). Avec probabilité 1, il existe  $(l_i), (r_i) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^*}$  tels que pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $W_{r_i}^\lambda = W_{l_i}^\lambda = 0$ ,  $W_t^\lambda > 0$  pour  $t \in ]l_i, r_i[$  et  $r_i - l_i > r_{i+1} - l_{i+1}$ . Autrement dit,  $\mathbb{R}_+ \setminus Z_\lambda$  est une collection d'intervalles ouverts, correspondants aux excursions de  $W^\lambda$ , qui peuvent être ordonnés par longueur décroissante.

On ne redéfinira pas les nuages de Poisson ponctuel, mais on rappellera seulement qu'un nuage de Poisson  $\Pi$  ponctuel d'intensité 1 sur un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble aléatoire discret vérifiant

$$\forall A \subset \mathbb{R}^n \text{ borélien, } \mathbb{E}[\Pi \cap A] = \text{Leb}(A).$$

Pour  $i \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\gamma_i^\lambda = ]l_i, r_i[$ . On considère un nuage de Poisson ponctuel d'intensité 1 sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ , qu'on note  $\Pi$ . On note  $s_i^\lambda$  le nombre de points de  $\Pi$  en-dessous de la courbe de  $\gamma_i$ .

**Théorème 3** (Convergence des tailles et surplus d'un graphe d'Erdős-Rényi, [12]). *On considère le graphe aléatoire  $ER(n, 1/n + \lambda n^{-4/3})$ . Soient  $(C_i^{n,\lambda})_{i \geq 1}$  les composantes connexes du graphe ordonnées par taille décroissante et par label croissant à taille constante. On note  $s_i^{n,\lambda}$  le nombre d'arêtes en surplus de  $C_i^{n,\lambda}$ , c'est-à-dire le nombre d'arêtes à enlever pour en faire un arbre. Alors*

$$\left( \frac{|C_i^{n,\lambda}|}{n^{2/3}}, s_i^{n,\lambda} \right)_{i \geq 1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(d), l_v^2 \times l^2} (|\gamma_i^\lambda|, s_i^\lambda)_{i \geq 1}.$$

À partir de ce théorème de convergence des tailles des composantes connexes et de leur surplus, il nous reste, pour obtenir une limite d'échelle d'un graphe d'Erdős-Rényi  $ER(n, 1/n + \lambda n^{-4/3})$ , à déterminer la limite d'échelle d'un graphe connexe dont le surplus est fixé.

## 4.2 Limite d'échelle d'un graphe connexe à surplus fixé

Dans toute cette section, on fixe  $s \in \mathbb{N}$  et on considère, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , un graphe  $C_n^s$  choisi uniformément au hasard parmi l'ensemble des graphes connexes à  $n$  sommets avec surplus  $s$ . Pour déterminer la limite d'échelle du graphe  $C_n^s$ , on va s'intéresser à son arbre couvrant. On note donc  $T[C_n^s]$  l'arbre couvrant obtenu en faisant le parcours en profondeur de  $C_n^s$ . Cet arbre n'est pas distribué uniformément parmi les arbres à  $n$  sommets, donc on ne peut pas appliquer directement le théorème 1. Cependant, en tiltant la distribution de l'excursion brownienne on retrouve un théorème similaire.

**Théorème 4** (Convergence de l'arbre couvrant de  $C_n^s$ ). *Soit  $\mathbf{e}$  une excursions brownienne standard. On considère la distribution  $\tilde{\mathbf{e}}^s$  obtenue en tiltant la distribution  $\mathbf{e}$  comme suit :*

$$\mathbb{P}(\tilde{\mathbf{e}}^s \in \mathcal{B}) = \frac{\mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{\mathbf{e} \in \mathcal{B}\}} \left( \int_0^1 \mathbf{e}(x) dx \right)^s \right]}{\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^1 \mathbf{e}(x) dx \right)^s \right]}.$$

Alors, si on note  $\tilde{d}_n^s$  la distance de graphe sur  $T[C_n^s]$ , on a

$$(T[C_n^s], n^{-1/2} \tilde{d}_n^s, \mu_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(d), \text{GHP}} (\mathcal{T}_{2\tilde{\mathbf{e}}^s}, d_{2\tilde{\mathbf{e}}^s}, \mu_{2\tilde{\mathbf{e}}^s}).$$

A partir de là, trouver la limite d'échelle du graphe  $C_n^s$  revient à maîtriser le placement des arêtes en surplus.

**Définition 12** (Fig. 2). On considère une excursion  $h$  sur  $[0, 1]$  et un ensemble  $P$  de  $s$  points sous le graphe de  $h$ , c'est-à-dire de points de  $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq h(x)\}$ . On note  $\mathcal{T}_h$  l'arbre réel associé à  $h$  et  $\pi$  la projection associée de  $[0, 1]$  vers  $\mathcal{T}_h$ . Pour  $(x, y) \in P$ , on note  $l(x, y) = \sup\{t \in [0, 1] : h(t) = y, \inf\{h(u) : u \in [x, t]\}\}$ , c'est-à-dire l'abscisse du premier point de croisement après  $x$  entre la courbe de  $h$  et la droite horizontale d'ordonnée  $y$ . On définit alors une relation d'équivalence  $\sim$  comme suit : pour toute paire  $(x, y) \in P$ , on pose  $\pi(x) \sim \pi(l(x, y))$ . On définit alors  $g(h, P) = \mathcal{T}_h \setminus \sim$ , c'est-à-dire qu'on identifie les points  $\pi(x)$  et  $\pi(l(x, y))$  dans  $\mathcal{T}_h$  pour toute paire  $(x, y) \in P$ . On note toujours  $d_h$  et  $\mu_h$  la distance associée et le poussé en avant de la mesure uniforme après identification.

**Théorème 5** (Limite d'échelle de  $C_n^s$ ). *On note  $d_n^s$  la distance de graphe sur  $C_n^s$ . On a la convergence suivante :*

$$(C_n^s, n^{-1/2} d_n^s, \mu_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(d), \text{GHP}} (g(2\tilde{\mathbf{e}}^s, \mathcal{P}^s), d_{2\tilde{\mathbf{e}}^s}, \mu_{2\tilde{\mathbf{e}}^s})$$

où la loi de  $\tilde{\mathbf{e}}^s$  est définie dans le théorème 4 et où, étant donnée  $\tilde{\mathbf{e}}^s$ ,  $\mathcal{P}^s$  est un ensemble de  $s$  points aléatoires indépendants choisis uniformément dans  $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \tilde{\mathbf{e}}^s(x)\}$ .

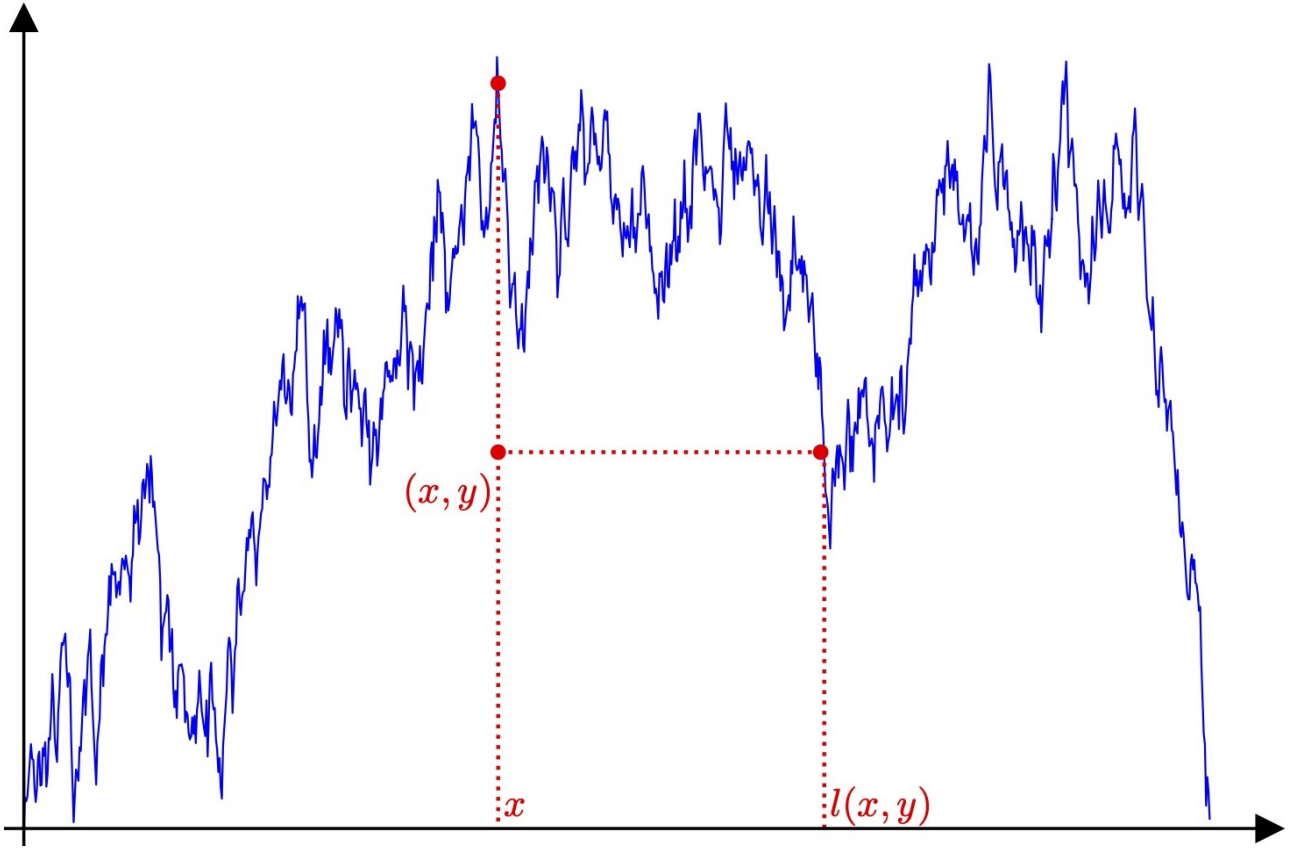


Figure 2: Les projetés des points  $x$  et  $l(x, y)$  sont identifiés par la fonction  $g$

### 4.3 Couplage de graphes d'Erdős-Rényi

En probabilités, le couplage est une méthode qui, étant donnés plusieurs modèles aléatoires, consiste à interpréter ces derniers comme des instances paramétrées d'un seul grand modèle aléatoire, pour ainsi pouvoir comparer leurs propriétés en loi de manière simple et déterministe.

On fixe un entier  $n \geq 1$  et on propose le couplage suivant entre tous les graphes d'Erdős-Rényi de taille  $n$  : soit  $(U_{\{i,j\}})_{1 \leq i < j \leq n}$  une famille de lois uniformes sur  $[0,1]$  indépendantes. On considère un graphe pondéré complet à  $n$  sommets  $1, \dots, n$  pour lequel l'arête entre les sommets  $i$  et  $j$  a un poids  $U_{\{i,j\}}$ . Pour  $p \in [0, 1]$  note alors  $G_{n,p}$  le graphe simple non-orienté d'ensemble de sommets  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et d'ensemble d'arêtes  $\{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n, p \geq U_{\{i,j\}}\}$ .

**Proposition 4.** Le graphe  $G_{n,p}$  ainsi défini a la même loi que  $ER(n, p)$ .

Grâce à ce couplage, on a maintenant une famille croissante pour les arêtes de graphes d'Erdős-Rényi. Cela permet d'étudier l'influence du paramètre  $p$  sur les graphes d'Erdős-Rényi beaucoup plus simplement.

Se pose alors la question du couplage des limites d'échelles. Par le théorème 3, pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixé, on peut trouver un mouvement brownien  $B$  tel que

$$\left( \frac{|C_i^{n,\lambda}|}{n^{2/3}} \right)_{i \geq 1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s., } l^2} \Gamma_\lambda(B),$$

où  $C_i^{n,\lambda}$  est la  $i$ -ème plus grande composante connexe de  $G_{n, 1/n + \lambda n^{-4/3}}$  et avec  $\Gamma_\lambda(B) = (|\gamma_i^\lambda|)_{i \geq 1}$  définis précédemment.  $\Gamma_\lambda$  est une fonction déterministe indexée par  $\lambda$ . Pour obtenir un couplage, on aimerait pouvoir choisir  $B$  de telle sorte que cette convergence ait lieu pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . C'est cependant impossible. Informellement, cela s'explique par le fait que lorsqu'on fixe un mouvement brownien  $B$  et qu'on augmente le paramètre

$\lambda$ , les excursions qui fusionnent sont adjacentes. Or, dans notre couplage des graphes d'Erdős-Rényi, une composante peut fusionner avec n'importe quelle autre. On ne peut donc pas construire un couplage des limites d'échelle de cette manière.

## 5 L'arbre minorant convexe

Pour résoudre ce problème de couplage des limites d'échelles, Nicolas Broutin et Jean-François Marckert ont proposé en 2023 ([15]) une autre construction de la limite d'échelle d'un arbre plan uniforme, de laquelle découle une autre construction de la limite d'échelle des graphes d'Erdős-Rényi. On va donner ici un aperçu de cette construction.

### 5.1 Minorant convexe d'une fonction continue

Dans cette section,  $T > 0$ .

**Définition 13** (Minorant convexe d'une fonction continue). On considère une fonction continue  $\omega : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $\omega(0) = 0$  et un point  $x \in [0, T]$ . Le (*plus grand*) *minorant convexe* de  $\omega$  sur  $[0, x]$  est défini comme la plus grande fonction convexe  $c_x(\cdot, \omega)$  définie sur  $[0, x]$  telle que pour tout  $t \in [0, x]$ ,  $c_x(t, \omega) \leq \omega(t)$ . On note  $\mathcal{V}_x(\omega) = \{t \in [0, x] : c_x(t, \omega) = \omega(t)\}$  et on appelle les éléments de  $\mathcal{V}_x(\omega) \setminus \{x\}$  les *sommets du minorant convexe* de  $\omega$  sur  $[0, x]$ .

La construction repose en grande partie sur ce petit lemme géométrique :

**Lemme 3.** On considère une fonction continue  $\omega : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $\omega(0) = 0$  et deux points  $x, y \in [0, T]$  avec  $x < y$ . Pour tout  $t \in \mathcal{V}_x(\omega) \cap [0, y]$ , on a  $\mathcal{V}_y(\omega) \cap [0, t] = \mathcal{V}_x(\omega) \cap [0, t]$ . Autrement dit, de gauche à droite, les minorants convexes  $c_x(\cdot, \omega)$  et  $c_y(\cdot, \omega)$  coïncident sur un intervalle fermé non-vide, puis se séparent définitivement. Cela induit une structure de branchement pour  $\{\mathcal{V}_x(\omega) : x \in [0, T]\}$ .

Pour  $t \in \mathcal{V}_x(\omega)$ , ce lemme nous permet de définir (sans dépendance en  $x$ ) la pente du minorant convexe  $c_x(\cdot, \omega)$  à gauche de  $t$  par

$$\mathbf{p}(t, \omega) = \sup \left\{ \frac{c_x(t) - c_x(t-s)}{s} : t-s \in \mathcal{V}_x(\omega) \right\}.$$

Si on note  $\mathcal{L}(\omega)$  l'ensemble des minimas locaux de  $\omega$ ,  $\mathbf{p}(t, \omega)$  est bien définie pour tout  $t \in \mathcal{L}(\omega) \setminus \{0\}$ .

Dans le lemme suivant, on élimine des points exceptionnels avant de commencer la construction.

**Lemme 4** (Pas de points exceptionnels). On note  $\nu'_0$  la mesure de masse de l'excursion brownienne  $\mathbf{e}$  définie sur  $[0, T]$  à la définition 3. Il existe un sous-ensemble borélien  $\Omega^*$  des excursions continues de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}_+$  avec  $\nu'_0(\Omega^*) = 1$  vérifiant que pour tout  $\omega \in \Omega^*$  et pour tout  $x \in [0, T]$ , on a :

- $\mathcal{V}_x(\omega)$  est au plus dénombrable;
- $\mathcal{V}_x(\omega)$  n'a pas de points d'accumulation dans  $[0, x]$ ;
- les éléments de  $\mathcal{V}_x(\omega) \setminus \{x\}$  sont des minimas locaux de  $\omega$ ;
- les pentes  $\mathbf{p}(t, \omega)$  aux points  $t \in \mathcal{V}_x(\omega) \setminus \{x\}$  sont distinctes.

On va maintenant construire l'arbre minorant convexe  $CMT(\mathbf{e}, \mathbf{U})$  à partir d'une excursion brownienne standard  $\mathbf{e}$  sur  $[0, 1]$  et d'une famille dénombrable  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots)$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$  indépendantes entre elles et indépendantes de  $\mathbf{e}$ . Cette construction sera valable pour  $\nu'_0$ -presque toute les fonctions  $\omega$  et presque toutes les familles  $\mathbf{U}$ . L'arbre sera un arbre réel muni d'une projection  $\pi_{\mathbf{e}, \mathbf{U}} : [0, 1] \rightarrow CMT(\mathbf{e}, \mathbf{U})$ . Pour construire un tel arbre, il suffit de construire pour tous  $x, y \in [0, 1]$  l'unique chemin  $\llbracket x, y \rrbracket$  et la distance  $d(x, y)$  entre ces deux points. On va d'abord construire  $\llbracket 0, x \rrbracket$  et  $d(0, x)$  pour tout  $x \in \mathcal{L}(\mathbf{e})$ , puis on étendra cette définition pour tout  $x \in [0, 1]$  avant de conclure pour  $x, y \in [0, 1]$ .

## 5.2 Construction de $\llbracket 0, x \rrbracket$ pour $x \in \mathcal{L}(\mathbf{e})$

Tout d'abord, on associe de manière canonique les éléments de  $\mathbf{U}$  aux minimaux locaux de  $\mathbf{e}$ . Pour cela, on énumère les intervalles ouverts  $I = (I_j)_{j \geq 0}$  à extrémités rationnelles dans  $[0, 1]$ . Presque sûrement, chaque minimum local de  $\mathbf{e}$  est un minimum global de  $\mathbf{e}$  sur au moins un intervalle de  $I$ , on peut donc associer à chaque élément  $t \in \mathcal{L}(\mathbf{e})$  l'indice  $j(t)$  du premier intervalle de  $I$  sur lequel  $t$  est un minimum global. On associe alors à  $t$  la variable  $U_{j(t)}$ . On notera  $U_t$  la variable associée à  $t \in \mathcal{L}(\mathbf{e})$  pour plus de simplicité.

Soit maintenant  $\mathcal{U}$  l'ensemble des mots finis sur  $\mathbb{N}$  donné à la définition 8. Pour tout  $x \in \mathcal{L}(\mathbf{e})$ , on va construire récursivement une famille  $(t_u, \xi_u, \gamma_u, \mathbf{e}_u)$ ,  $u \in \mathcal{U}$ , qui dépend de  $x$ . Le lemme 4 assure qu'avec probabilité 1, cette définition fait sens pour tout  $x \in \mathcal{L}(\mathbf{e})$ .

Initialement, on fixe  $t_\emptyset = 0$ ,  $\xi_\emptyset = x$ ,  $\gamma_\emptyset = 0$  et  $\mathbf{e}_\emptyset = \mathbf{e}$ . On suppose maintenant qu'on a construit  $(t_u, \xi_u, \gamma_u, \mathbf{e}_u)$  pour un certain  $u \in \mathcal{U}$ . Soient  $\theta_0^u = 0 < \theta_1^u < \theta_2^u < \dots$  les sommets du minorant convexe de  $\mathbf{e}_u$  sur  $[0, \xi_u - t_u]$  et on pose  $t_{ui} = t_u + \theta_i^u$  pour tout  $i \geq 0$ . Pour  $i \in \mathbb{N}$ , soient

$$\begin{aligned} \varphi_i^u &= \frac{\mathbf{e}_u(\theta_{i+1}^u) - \mathbf{e}_u(\theta_i^u)}{|\theta_{i+1}^u - \theta_i^u|} \text{ la pente du minorant convexe de } \mathbf{e}_u \text{ sur } [\theta_i^u, \theta_{i+1}^u] \\ m_{ui} &= |\theta_{i+1}^u - \theta_i^u| = |t_{u(i+1)} - t_{ui}| \\ \xi_{ui} &= t_{ui} + U_{t_{u(i+1)}} m_{ui} \\ \gamma_{ui} &= \frac{1}{m_{ui}} (\mathbf{e}(t_{u(i+1)}) - \mathbf{e}(t_{ui})) = \gamma_u + \varphi_i^u \\ \mathbf{e}_{ui} : [0, m_{ui}] &\rightarrow \mathbb{R}_+, s \mapsto (\mathbf{e}(t_{ui} + s) - \mathbf{e}(t_{ui}) - s \cdot \gamma_{ui}) \end{aligned}$$

À partir de cette famille, on définit

$$\llbracket 0, x \rrbracket = \{x\} \cup \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{|u|=n} [t_u, \xi_u]}$$

qui est un sous-ensemble fermé non-vide de  $[0, x]$ . Pour  $n \geq 1$ , on pose de plus

$$d_n(0, x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{|u|=n} m_u^{1/2} \text{ et } d(0, x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} d_n(0, x).$$

## 5.3 Extension à $\llbracket x, y \rrbracket$ pour $x, y \in [0, 1]$

On étend tout d'abord la fonction  $d(0, \cdot)$  à  $[0, 1]$ . Pour cela, on pose  $\llbracket 0, 0 \rrbracket = \{0\}$  et  $d(0, 0) = 0$ . Puis, pour tout  $x \in ]0, 1]$ , tout point  $t \in \mathcal{V}_x(\mathbf{e}) \setminus \{0, x\}$  est un minimum local de  $\mathbf{e}$ , et ainsi  $\llbracket 0, t \rrbracket$  et  $d(0, t)$  sont déjà définis. On pose alors

$$\llbracket 0, x \rrbracket = \{x\} \cup \overline{\bigcup_{t \in \mathcal{V}_x(\mathbf{e}) \cap \mathcal{L}(\mathbf{e})} \llbracket 0, t \rrbracket} \text{ et } d(0, x) = \sup_{t \in \mathcal{V}_x(\mathbf{e}) \cap \mathcal{L}(\mathbf{e})} d(0, t) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

On peut maintenant définir, pour  $x, y \in [0, 1]$ , l'ancêtre commun à  $x$  et à  $y$  par

$$x \wedge y = \sup(\llbracket 0, x \rrbracket \cap \llbracket 0, y \rrbracket).$$

Finalement, on définit la fonction  $d$  sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  par

$$d(x, y) = d(0, x) + d(0, y) - 2d(0, x \wedge y).$$

**Proposition 5.** La fonction  $d$  est symétrique et satisfait l'inégalité triangulaire sur  $[0, 1]$ . Elle induit donc une distance sur l'espace quotient.

**Définition 14** (L'arbre minorant convexe, [15]). On définit la relation d'équivalence  $\sim$  sur  $[0, 1]$  par  $x \sim y$  si  $d(x, y) = 0$ . On note  $\mathcal{T}^\circ = \{x \in [0, 1] : d(0, x) < +\infty\}$  et  $\mathcal{T}$  le complété métrique de  $\mathcal{T}^\circ / \sim$ . On note toujours  $d$  la distance induite sur  $\mathcal{T}$ . On note  $\pi$  la projection canonique,  $\rho = \pi(0)$  la racine de  $\mathcal{T}$  et  $\mu$  le poussé en avant de la mesure de Lebesgue sur  $[0, 1]$  par  $\pi$ . On définit alors l'arbre minorant convexe par  $CMT(\mathbf{e}, \mathbf{U}) = (\mathcal{T}, d, \mu)$ .

**Théorème 6** (L'arbre minorant convexe est un arbre). Avec probabilité 1, l'espace métrique  $CMT(\mathbf{e}, \mathbf{U}) = ([0, 1], d)$  est un arbre réel.

## 5.4 Convergences et couplage des limites d'échelle

**Théorème 7** (Convergence d'un arbre plan uniforme vers l'arbre minorant convexe). Soient  $\mathbf{e}$  une excursion brownienne standard sur  $[0, 1]$  et  $\mathbf{U}$  un famille dénombrable de variables aléatoires uniformes sur  $[0, 1]$  indépendantes entre elles et indépendantes de  $\mathbf{e}$ . On considère  $T_n$  un arbre plan aléatoire uniforme dans  $\mathbb{T}_n$ , muni de la distance de graphes  $d_n$  et de la mesure uniforme  $\mu_n$  sur les noeuds. Alors

$$(T_n, n^{-1/2}d_n, \mu_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(d), \text{GHP}} CMT(\mathbf{e}, \mathbf{U}).$$

*Remarque.* En particulier, pour la topologie GHP, la loi de  $CMT(\mathbf{e}, \mathbf{U})$  est celle d'un arbre continu brownien. Le théorème 4 est toujours valable en construisant la limite comme l'arbre minorant convexe de l'excursion tiltée  $\tilde{\mathbf{e}}^s$ .

En se basant sur la construction de l'arbre minorant convexe, on peut obtenir la limite d'échelle d'un graphe d'Erdős-Rényi critique, les arêtes en surplus pouvant être rajoutées à la limite. On ne décrira pas ici cette construction. Celle-ci, comme la précédente, part d'un mouvement brownien, puis lui ajoute un drift quadratique de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On notera  $CMG_\lambda(B, \mathbf{U})$  la transformation qui, à partir d'un mouvement brownien  $B$  et d'une famille de loi uniformes sur  $[0, 1]$  indépendantes entre elles et indépendantes de  $B$ , renvoie un tel graphe satisfaisant

$$ER \left( n, \frac{1}{n} + \lambda n^{-4/3} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(d), \text{GHP}} CMG_\lambda(B, \mathbf{U}).$$

Le théorème suivant, démontré par Broutin et Marckert dans [15], montre que les limites d'échelles des graphes d'Erdős-Rényi couplés peuvent elles-mêmes être couplées avec le même paramètre.

**Théorème 8** (Couplage des limites d'échelles de graphes d'Erdős-Rényi critiques). On considère le processus  $(G_{n, 1/n + \lambda n^{-4/3}})_{\lambda \in \mathbb{R}}$  à valeur dans les graphes à  $n$  sommets défini à la section 4.3. Alors il existe  $B$  mouvement brownien et  $\mathbf{U}$  famille de loi uniformes sur  $[0, 1]$  indépendantes entre elles et indépendantes de  $B$  tels que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, G_{n, 1/n + \lambda n^{-4/3}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s., \text{GHP}} CMG_\lambda(B, \mathbf{U}).$$

## 6 Graphes d'Erdős-Rényi sous contrainte

On propose maintenant un nouveau modèle, inspiré des graphes d'Erdős-Rényi auxquels on ajoute une contrainte. Ce modèle a été introduit par Logan, Molloy et Pralat en 2018. Dans le couplage sur les graphes

d'Erdős-Rényi, on peut s'intéresser à l'évolution du graphe en fonction du paramètre  $p$  : chacune des arêtes  $\{i, j\}$  est ajoutée pour  $p = U_{ij}$ .  $G_{n,p}$  est ainsi un processus croissant en  $p \in [0, 1]$  à valeur dans les graphes à  $n$  sommets.

Soit une fonction  $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . On considère un sous-ensemble  $S_n$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On va définir un processus  $GC_{n,p}$  croissant en  $p \in [0, 1]$  à valeurs dans les graphes à  $n$  sommets, et satisfaisant la propriété suivante :

*Pour tout  $p \in [0, 1]$ , pour tous sommets  $u \neq v \in S_n$ ,  $u$  et  $v$  ne sont pas dans la même composante connexe de  $GC_{n,p}$ .*

Pour ce faire, on ordonne l'ensemble des arêtes  $\{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n\} = \{e_1, \dots, e_m\}$  de telle sorte que pour tous  $t \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , on ait  $U_{e_t} < U_{e_{t+1}}$  (presque sûrement les  $U_e$  sont toutes distinctes). Pour un sous-ensemble  $E$  des arêtes, on définit la relation d'équivalence  $\sim_E$  sur l'ensemble des sommets par  $u \sim_E v$  si et seulement si il existe un chemin entre  $u$  et  $v$  composé uniquement d'arêtes de  $E$ . Récursivement, on définit un ensemble d'arêtes  $E_{n,l}$  pour  $l \in \llbracket 0, m \rrbracket$  comme suit :

$$E_{n,0} = \emptyset \text{ et pour tout } l \in \llbracket 1, m \rrbracket, E_{n,l} = \begin{cases} E_{n,l-1} & \text{si il existe } u, v \in S_n \text{ tels que } u \sim_{E_{n,l-1} \cup \{e_l\}} v \\ E_{n,l-1} \cup \{e_l\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, on ajoute une arête si et seulement si elle ne crée pas un chemin entre deux sommets de  $S_n$ . Pour  $p \in [0, 1]$ , on note  $l_p$  le plus grand indice tel que  $U_{e_{l_p}} \leq p$ .

On définit le *processus d'Erdős-Rényi sous contrainte* d'ensemble de sommets  $S_n$  de cardinal  $k(n)$  par

$$GC_{n,p} = (\llbracket 1, n \rrbracket, E_{n,l_p}).$$

On note que  $GC_{n,p}$  est un sous-graphe de  $G_{n,p}$  et qu'il satisfait la propriété annoncée.

Notre objet d'étude est  $GC_{n,1}$ , et plus particulièrement la taille de ses composantes et leur limite quand  $n \rightarrow +\infty$ .  $GC_{n,1}$  possède exactement  $k(n)$  composantes par construction. Les deux théorèmes suivants, énoncés en 2018 par Logan, Molloy et Pralat et en 2023 par Addario-Berry et Barrett, démontrent pour la taille de la plus grande composante de  $GC_{n,1}$  l'existence d'une fenêtre critique pour  $k(n)$  d'ordre exactement  $n^{1/3}$ .

**Theorème 9** (Taille de la composante principale de  $GC_{n,1}$ , cas sur-critique, [16]). *On note  $M_n$  la taille de la plus grande composante de  $GC_{n,1}$ .*

$$\text{Si } \frac{k(n)}{n^{1/3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ alors } \frac{M_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 1.$$

**Theorème 10** (Taille de la composante principale de  $GC_{n,1}$ , cas sous-critique, [17]). *On note  $M_n$  la taille de la plus grande composante de  $GC_{n,1}$ .*

$$\text{Si } \frac{k(n)}{n^{1/3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \text{ alors } \frac{M_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

L'existence d'un phénomène critique étant prouvée, il n'y a à ce jour pas de résultats concernant le comportement critique de ce modèle. Une conjecture largement admise par la communauté est que toutes les composantes connexes de  $GC_{n,1}$  devraient contenir de l'ordre de  $n^{2/3}$  sommets pour  $k(n) \sim cn^{1/3}$ ,  $c > 0$ . On conjecture aussi que le modèle admet une limite d'échelle, mais la définir requiert plus d'outils que nous n'avons pas ici développés.

## Remerciements

Je tiens à remercier Nicolas Broutin pour son encadrement et ses explications.

## Références

- [1] Peter Mörters and Yuval Peres. *Brownian motion*, volume 30. Cambridge University Press, 2010.
- [2] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] Jean Bertoin and Jim Pitman. Path transformations connecting brownian bridge, excursion and meander. *Bulletin des sciences mathématiques*, 118(2):147–166, 1994.
- [4] Wim Vervaat. A relation between brownian bridge and brownian excursion. *The Annals of Probability*, pages 143–149, 1979.
- [5] Mikhael Gromov, Misha Katz, Pierre Pansu, and Stephen Semmes. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, volume 152. Springer, 1999.
- [6] Andreas Greven, Peter Pfaffelhuber, and Anita Winter. Convergence in distribution of random metric measure spaces ( $\lambda$ -coalescent measure trees). *Probability Theory and Related Fields*, 145(1):285–322, 2009.
- [7] David Aldous. Asymptotic fringe distributions for general families of random trees. *The Annals of Applied Probability*, pages 228–266, 1991.
- [8] David Aldous. The continuum random tree. ii. an overview. *Stochastic analysis (Durham, 1990)*, 167:23–70, 1991.
- [9] David Aldous. The continuum random tree iii. *The annals of probability*, pages 248–289, 1993.
- [10] ENS Jean-François Le Gall. Random trees and applications. *Probability Surveys*, 2, 2005.
- [11] Jean-François Marckert and Abdelkader Mokraddem. The depth first processes of galton–watson trees converge to the same brownian excursion. *The Annals of Probability*, 31(3):1655–1678, 2003.
- [12] David Aldous. Brownian excursions, critical random graphs and the multiplicative coalescent. *The Annals of Probability*, pages 812–854, 1997.
- [13] Paul Erdős, Alfréd Rényi, et al. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci*, 5(1):17–60, 1960.
- [14] Svante Janson, Andrzej Ruciński, and Tomasz Łuczak. *Random graphs*. John Wiley & Sons, 2011.
- [15] Nicolas Broutin and Jean-François Marckert. Convex minorant trees associated with brownian paths and the continuum limit of the minimum spanning tree. *arXiv preprint arXiv:2307.12260*, 2023.
- [16] Adam Logan, Mike Molloy, and Pawel Pralat. A variant of the erdos-renyi random graph process. *arXiv preprint arXiv:1806.10975*, 2018.
- [17] Louigi Addario-Berry and Jordan Barrett. Multisource invasion percolation on the complete graph. *The Annals of Probability*, 51(6):2131–2157, 2023.