

INTRODUCTION AU DOMAINE DES MATRICES ALÉATOIRES

BOUSSEYROUX PIERRE

1. INTRODUCTION

La première matrice aléatoire étudiée remonte aux années 1920, lorsque le statisticien John Wishart examine les matrices de covariance empirique de vecteurs aléatoires indépendants. Les matrices aléatoires ont ensuite été introduites en physique nucléaire par Wigner dans les années 1950 pour mieux comprendre la spectroscopie des atomes lourds. En effet, les raies spectrales des atomes lourds correspondent à des valeurs propres d'opérateurs auto-adjoints complexes. La complexité de la dynamique du système quantique nécessite de remplacer une description déterministe par une description probabiliste. Wigner a eu l'idée d'examiner les propriétés statistiques des opérateurs plutôt que leurs spécificités individuelles. Il a alors proposé que l'hamiltonien d'un noyau soit considéré comme un échantillon aléatoire parmi une distribution d'hamiltoniens à définir. Grâce à cette approche, on peut expliquer le phénomène de répulsion locale des niveaux d'énergie.

Depuis lors, la théorie des matrices aléatoires n'a cessé de progresser, tant en physique qu'en mathématiques, menant à des applications diverses : en physique, en biologie, en sciences sociales, en écologie théorique et dans l'optimisation des transports.

Fait surprenant et notable, les matrices aléatoires ont aussi trouvé des applications en théorie des nombres. En 1972, Dyson et Montgomery découvrent que les zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann présentent les mêmes propriétés statistiques que les valeurs propres d'une matrice unitaire aléatoire.

Comme il s'agit d'une introduction à ce domaine relativement courte, nous éviterons les écueils techniques. Nous privilégierons une approche plus souple, permettant ainsi de développer des intuitions concrètes grâce à de nombreuses figures illustrant plusieurs concepts des matrices aléatoires tout en présentant des résultats élégants.

2. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DES MATRICES ALÉATOIRES

La matrice aléatoire la plus simple à laquelle nous pouvons penser est la matrice carrée \mathbf{A} de taille N , dont toutes les entrées sont des variables gaussiennes indépendantes, d'espérance nulle et de variance 1. Ici, nous commencerons par nous intéresser aux matrices symétriques afin d'avoir des valeurs propres réelles. Nous aborderons en fin de texte le cas des matrices non hermitiennes.

Donc, symétrisons \mathbf{A} et considérons $\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{\sqrt{2}}$ qui est appelée une matrice GOE dont la définition est alors la suivante.

Définition 1. On appelle matrice GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble) une matrice \mathbf{X} de la forme

$$(1) \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1N} \\ X_{12} & X_{22} & \dots & X_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1N} & X_{2N} & \dots & X_{NN} \end{pmatrix}$$

où X_{ij} sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyenne de 0 et de variance 1 pour $i < j$, et une moyenne de 0 et une variance de 2 pour $i = j$.

En considérant le produit des densités des coefficients diagonaux et hors diagonaux supérieurs, il est facile de voir que la fonction de densité d'une telle matrice \mathbf{X} est proportionnelle à

$$(2) \quad \exp\left(\frac{-1}{4} \text{Tr}(\mathbf{X}^2)\right).$$

Cette expression est particulièrement simple et a une conséquence très importante : l'invariance par rotation. Si \mathbf{X} est une matrice GOE et \mathbf{O} une matrice orthogonale, alors \mathbf{OXO}^T est toujours une matrice GOE. Cette remarque rend l'étude des vecteurs propres de \mathbf{X} peu intéressante ; en revanche, les valeurs propres attirent notre attention. Nous noterons $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$ les valeurs propres de la matrice \mathbf{X} .

La figure 2 est issue du fameux livre de Mehta [5]. Elle montre plusieurs répartitions de points ; par exemple, la première illustre une distribution uniforme de points sur un segment donné, la troisième représente les niveaux d'énergie d'un atome lourd, et la cinquième montre la répartition des parties imaginaires des zéros non triviaux de la fonction ζ . La question qui se pose alors est de savoir quelle répartition ressemble le plus à celle des $\lambda_1, \dots, \lambda_N$? La répartition présente-t-elle de gros trous comme la première, ou est-elle plus proche d'un spectre périodique, comme dans la figure f ?

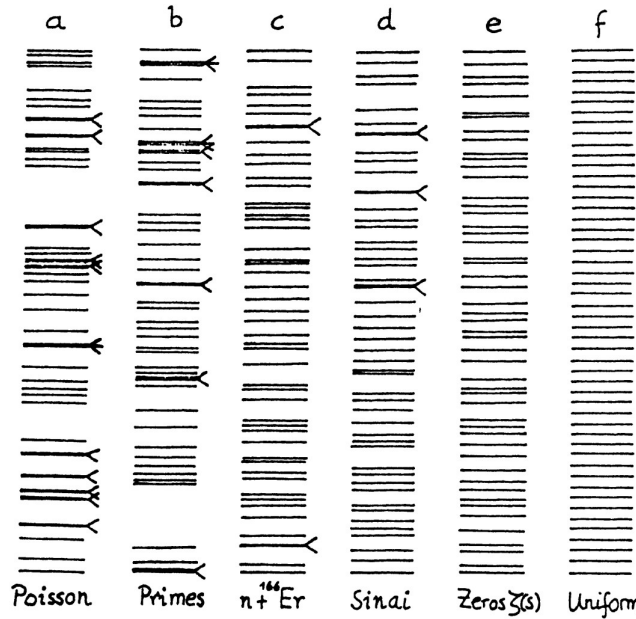


Figure 1.2. Some typical level sequences. From Bohigas and Giannoni (1984). (a) Random levels with no correlations, Poisson series. (b) Sequence of prime numbers. (c) Slow neutron resonance levels of the erbium 166 nucleus. (d) Possible energy levels of a particle free to move inside the area bounded by $1/8$ of a square and a circular arc whose center is the mid point of the square; i.e. the area specified by the inequalities, $y \geq 0$, $x \geq y$, $x \leq 1$, and $x^2 + y^2 \geq r$. (Sinai's billiard table.) (e) The zeros of the Riemann zeta function on the line $\text{Re } z = 1/2$. (f) A sequence of equally spaced levels (Bohigas and Giannoni, 1984).

FIGURE 1. Figure issue de [5].

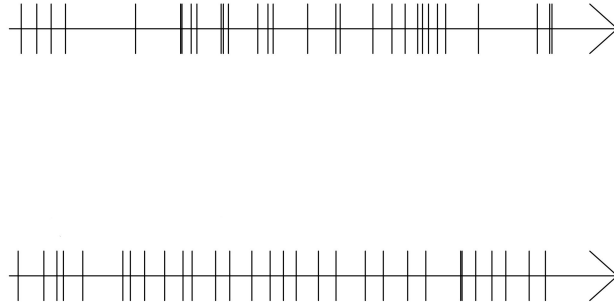


FIGURE 2. Comparaison d'un spectre "Poisson" et celui d'une matrice aléatoire.

Tournons-nous vers les mathématiques pour mieux appréhender les choses. Dit vulgairement, choisir une matrice GOE revient à choisir $\frac{N(N-1)}{2}$ paramètres afin de considérer une matrice orthogonale de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (qui est un groupe de dimension $\frac{N(n-1)}{2}$) mais également N valeurs propres. En calculant le jacobien de ce changement de variable, on peut démontrer que la fonction de densité de la loi jointe des valeurs propres vérifie

$$(3) \quad P(\{\lambda_i\}) \propto \prod_{k < l} |\lambda_k - \lambda_l| \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \lambda_k^2\right)$$

Autrement dit, la fonction de densité de la loi-jointe des λ_k est proportionnelle à

$$(4) \quad \exp\left(-\frac{\beta}{2} \left(\sum_{k=1}^N V(\lambda_k) - \sum_{k \neq l} \log(|\lambda_k - \lambda_l|)\right)\right)$$

avec $\beta = 1$ et $V(x) = \frac{x^2}{2}$.

Cette écriture donne une interprétation physicienne du comportement des valeurs propres, que l'on appelle *Gaz de Coulomb*. Les valeurs propres évoluent dans un potentiel quadratique et sont soumises à une force de répulsion locale.

On comprend alors que cette répulsion locale rend le spectre plus proche d'un spectre périodique que d'un spectre de type *Poisson*, comme le montre la figure 2.

On retrouve ce comportement — répulsion locale mais attraction globale — dans les spectres de nombreuses matrices aléatoires. Lorsqu'on observe une telle distribution "rigide", on dit souvent qu'elle est de nature spectrale. Ces distributions se retrouvent également dans la répartition des rames de métro. En effet, pour transporter le maximum de passagers, il est nécessaire d'avoir beaucoup de rames réparties sur la ligne, mais en même temps, elles ne doivent pas être trop proches pour éviter qu'une rame soit pleine tandis que l'autre est vide. Les matrices aléatoires interviennent alors dans la modélisation des systèmes de transport.

Faisons une petite parenthèse qui en vaut la peine. Une des fonctions les plus importantes de toutes les mathématiques est probablement la fonction ζ de Riemann. On sait que cette fonction regorge d'informations sur les nombres premiers. La connaissance de cette fonction et en particulier les zéros de son prolongement analytique, est cruciale pour comprendre la distribution des nombres premiers. Par exemple, l'absence de zéros non triviaux de la fonction zéta sur la droite $\text{Re}(z) = 1$ est équivalente au théorème des nombres premiers qui affirme que $p_n \sim n \ln(n)$. Mais où sont ces zéros? On sait qu'elle ne s'annule pas sur

$\operatorname{Re}(z) \geq 1$ et les zéros vérifiant $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ sont connus. Il s'agit des entiers pairs négatifs. Il ne reste plus qu'à comprendre les zéros sur $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$, qu'on appelle les zéros non triviaux. Un des problèmes mathématiques les plus importants est l'hypothèse de Riemann, qui consiste à montrer que les zéros non triviaux de la fonction ζ ont une partie réelle de $\frac{1}{2}$. Numériquement, cela est très bien vérifié, on peut alors examiner les statistiques des parties imaginaires de ces zéros non triviaux. La grande surprise est de découvrir que ce sont exactement les mêmes que $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ où $(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ sont les valeurs propres d'une matrice unitaire aléatoire. Cette connexion est très surprenante et une extraordinaire usine à production de conjectures. Un problème concernant la fonction ζ est alors converti en un problème sur le polynôme caractéristique d'une matrice unitaire aléatoire. On résout le problème dans le monde des matrices aléatoires, puis on reconvertit le résultat dans le monde de la théorie des nombres, donnant ainsi naissance à une conjecture souvent extrêmement difficile à résoudre. L'exemple typique de ce processus très célèbre concerne les moments de la fonction ζ ([4]).

3. LOI DU DEMI-CERCLE

Restons dans le cas du GOE. Maintenant que nous avons compris quelques aspects du comportement local, essayons de comprendre le comportement global de ces valeurs propres. Comme tout bon physicien, nous devons trouver la bonne normalisation. Nous remarquons que, pour équilibrer les deux forces dans (3), nous devons considérer plutôt les $\frac{\lambda_k}{\sqrt{N}}$. On obtient alors le théorème de Wigner, le plus célèbre de cette théorie.

Théorème 1. Pour toute fonction f continue bornée, on a presque sûrement :

$$(5) \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{\lambda_k}{\sqrt{N}}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{-2}^2 f(x) \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi} dx.$$

Cette limite peut sembler un peu étrange puisque les λ_k dépendent de N . Implicitement, dès qu'on écrit des limites en N , on imagine que pour chaque N , on considère une nouvelle matrice aléatoire d'une structure donnée (ici GOE) qui donne alors de nouvelles valeurs propres λ_k qui sont donc des variables aléatoires. Le physicien pense les choses de manière beaucoup plus concrète : il imagine davantage une unique réalisation d'un très grand GOE, et la distribution des valeurs propres sera alors proche d'un demi-cercle. Il voit ainsi N comme quelque chose de très grand plutôt que comme quelque chose qui tend vers l'infini.

Ce théorème est en accord avec l'expérience, comme le montre la figure 3, où l'on voit émerger le demi-cercle. En réalité, le résultat est universel : les éléments $X_{i,j}$ n'ont pas besoin d'être gaussiens ; il suffit qu'ils suivent une loi d'espérance nulle et partagent les mêmes variances que celles d'une matrice GOE.

On se propose ici de donner les grandes lignes d'une démonstration. Ce sera l'occasion d'introduire la transformée de Stieltjes, qui sera utile par la suite, et d'introduire un concept très important : l'auto-moyennation pour les physiciens ou concentration de la mesure pour les mathématiciens. Il y aurait beaucoup de choses à justifier dans les arguments qui vont suivre.

Définition 2. Soit \mathbf{M} une matrice symétrique aléatoire de taille N et s_1, \dots, s_N ses valeurs propres. Sa transformée de Stieltjes est définie comme

$$(6) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \mathbf{g}^N(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{z - s_k}$$

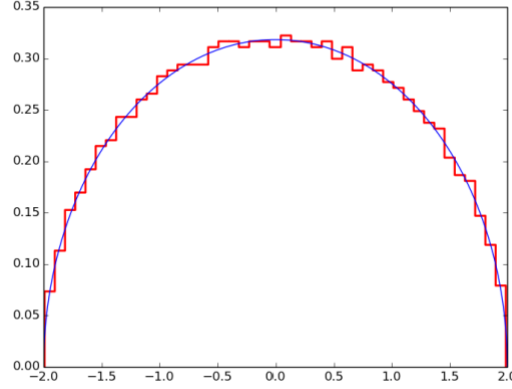


FIGURE 3. Histogramme d'un spectre d'une matrice GOE de taille 1000.

qu'on peut également écrire comme

$$(7) \quad \frac{1}{N} \operatorname{tr}(\mathbf{G}_{\mathbf{M}}(z))$$

où $\mathbf{G}_{\mathbf{M}}$ est la résolvante de \mathbf{M} définie comme $(z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}$.

Essayons de comprendre pourquoi cet outil peut s'avérer puissant pour retrouver la distribution limite des valeurs propres ρ . On peut s'attendre à ce que, lorsque la taille de la matrice tend vers l'infini, on ait :

$$(8) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \mathbf{g}^N(z) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbf{g}(z) := \int_{\lambda} \frac{\rho(\lambda)}{z - \lambda}$$

avec ρ la distribution spectrale limite. Notons que le terme de gauche est aléatoire et converge vers une fonction déterministe. Evidemment, on a été assez vite ici en affirmant que ρ existait sans plus d'explications. On fera cette hypothèse à plusieurs reprises dans ce document.

Un petit exercice montre la formule de Sokhotski-Plemelj :

$$(9) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \operatorname{Im}(\mathbf{g}(\lambda - i\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \pi \rho(\lambda).$$

Prenons maintenant \mathbf{M} une matrice définie comme $\frac{\mathbf{X}}{\sqrt{N}}$ avec \mathbf{X} une matrice GOE. Une telle matrice \mathbf{M} est appelée matrice de Wigner. L'objectif est alors clair : si nous arrivons à calculer $\mathbf{g} = \lim_N \mathbf{g}^N$, on pourra retrouver la distribution limite des valeurs propres notée ρ .

L'idée est d'utiliser de manière intelligente le fait suivant : le sous-bloc inférieur droit de taille $N - 1$ de \mathbf{M} , que nous noterons $\tilde{\mathbf{M}}$, possède la même structure aléatoire que \mathbf{M} . Les calculs par blocs classiques conduisent à la formule :

$$(10) \quad \frac{1}{[\mathbf{G}_{\mathbf{M}}]_{11}} = [zI_N - \mathbf{M}]_{11} - \sum_{k,l \geq 2} [zI_N - \mathbf{M}]_{1k} [\mathbf{G}_{\tilde{\mathbf{M}}}]_{kl} [zI_N - \mathbf{M}]_{l1}.$$

qui s'écrit plus facilement comme

$$(11) \quad \frac{1}{[\mathbf{G}_{\mathbf{M}}]_{11}} = z - [\mathbf{M}]_{11} - \sum_{k,l \geq 2} [\mathbf{M}]_{1k} [\mathbf{M}]_{l1} [\mathbf{G}_{\tilde{\mathbf{M}}}]_{kl}.$$

Nous allons maintenant utiliser un concept très important en matrices aléatoires : l'auto-moyennation. L'idée est la suivante : lorsque vous avez une quantité qui dépend de toutes les entrées d'une matrice aléatoire, elle aura tendance à s'auto-moyenner lorsque $N \rightarrow \infty$ (c'est-à-dire que, lorsque la taille de la matrice est très grande, l'aléatoire disparaît). On imagine qu'il y a en fait des lois des grands nombres sous-jacentes. Par exemple, lorsque $N \rightarrow \infty$, $[\mathbf{G}_M]_{11}$ sera très proche de son espérance. Or, tous les coefficients diagonaux de \mathbf{G}_M admettent la même espérance en raison de l'invariance par rotation. On conclut alors que l'espérance recherchée vaut également la trace normalisée de \mathbf{G}_M et donc $\mathbf{g}(z)$ lorsque $N \rightarrow \infty$. Ensuite, le terme $[\mathbf{M}]_{11}$ est de variance $\frac{1}{N}$ et d'espérance nulle. Il est donc négligeable lorsque $N \rightarrow \infty$. Enfin, les sommes du terme de droite vont s'auto-moyenner grâce à des lois des grands nombres, ce terme sera alors très proche de son espérance. Or,

$$(12) \quad \mathbb{E} \left(\sum_{k,l \geq 2} [\mathbf{M}]_{1k} [\mathbf{G}_{\tilde{M}}]_{kl} [\mathbf{M}]_{l1} | [\mathbf{M}]_{1k}, [\mathbf{M}]_{l1} \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\mathbf{G}_{\tilde{M}}]_{kl}$$

dont on espère que cette quantité sera proche de $\mathbf{g}(z)$ puisque les deux matrices $\tilde{\mathbf{M}}$ et \mathbf{M} dispose de la même structure aléatoire et ont quasiment la même taille. Finalement, nous aboutissons à la relation suivante :

$$(13) \quad \frac{1}{\mathbf{g}(z)} = z - \mathbf{g}(z)$$

qu'on peut résoudre en

$$(14) \quad \mathbf{g}(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{2}.$$

En matrices aléatoires, il y a réellement des subtilités sur les racines complexes. Nous ne rentrerons pas dans ces considérations.

La formule (9) permet alors de montrer que

$$(15) \quad \rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2\pi} & \text{si } \lambda \in [-2, 2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. VARIABLES NON COMMUTATIVES

L'intérêt de la fonction caractéristique n'est plus à démontrer. Elle se comporte remarquablement bien avec les sommes de variables aléatoires indépendantes. On rappelle que si X est une variable aléatoire, on définit :

$$(16) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

Si on définit $H_X(t) = \ln(\varphi_X(t))$, on a alors

$$(17) \quad H_{X+Y} = H_X + H_Y$$

si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.

Développons $H_X(t)$ en série entière autour de 0 :

$$(18) \quad H_X(t) = \log(\mathbb{E}(e^{itX})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n(X)}{n!} (it)^n.$$

où les $k_n(X)$ sont appelés les cumulants de X (dont on suppose qu'ils existent tous). Par exemple, $k_1(X) = \mathbb{E}(X)$ et $k_2(X) = \text{Var}(X)$. Il est facile de vérifier les deux propriétés suivantes importantes des cumulants :

$$(19) \quad k_n(\alpha X) = \alpha^n k_n(X) \text{ et } k_n(X + Y) = k_n(X) + k_n(Y)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et X et Y deux variables aléatoires tels qu'il n'y ait pas de problèmes.

Peut-on faire la même chose dans le monde des matrices aléatoires ?

La fonction caractéristique n'est rien d'autre qu'une transformée de Fourier. $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension N^2 . On pourrait alors définir, pour toute matrice \mathbf{A} aléatoire,

$$(20) \quad \forall \mathbf{B} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \varphi_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) = \mathbb{E}_{\mathbf{A}}(\exp\{\text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)\}).$$

On préférerait une fonction de la variable réelle. L'idée est alors de prendre $\mathbf{B} = t\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ avec \mathbf{u} un vecteur unitaire et $t \in \mathbb{R}$:

$$(21) \quad \varphi_{\mathbf{A}}(t, \mathbf{u}) = \mathbb{E}_{\mathbf{A}}(\exp\{t \langle \mathbf{u} | \mathbf{A} | \mathbf{u} \rangle\}).$$

En fait, si \mathbf{A} est une matrice invariante par rotation, $\varphi_{\mathbf{A}}$ ne dépend plus du \mathbf{u} , et on alors définit une fonction $\varphi_{\mathbf{A}}(t)$. On peut alors écrire dans la même état d'esprit précédent pour des petits t :

$$(22) \quad H_{\mathbf{A}}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \log(\mathbb{E}_{\mathbf{A}}(\exp\{it \langle \mathbf{u} | \mathbf{A} | \mathbf{u} \rangle\})) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k_n(\mathbf{A})}{n!} (it)^n$$

où les $k_n(\mathbf{A})$ sont cette fois-ci appelées les free cumulants de \mathbf{A} .

On peut vérifier que

$$(23) \quad k_1(\mathbf{A}) = \tau(\mathbf{A}) \text{ et } k_2(\mathbf{A}) = \tau(\mathbf{A}^2) - \tau(\mathbf{A})^2$$

où

$$(24) \quad \tau(\mathbf{A}) = \lim_N \mathbb{E} \left(\frac{\text{Tr}(\mathbf{A})}{N} \right).$$

On retrouve ici encore une fois plusieurs subtilités de la limite $N \rightarrow \infty$ où deux visions subsistent. Celle du physicien où il pense la matrice \mathbf{A} comme une seule grande matrice et $\tau(\mathbf{A})$ est simplement pour lui $\frac{\text{Tr}(\mathbf{A})}{N}$ puisque cette quantité est auto-moyennante. Le mathématicien devrait plutôt considérer une suite $(\mathbf{A}^N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ de matrices aléatoires suivant un même "modèle" \mathbf{A} comme GOE par exemple. On écrit alors plutôt $\tau(\mathbf{A}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{\text{Tr}(\mathbf{A}^N)}{N} \right)$.

Les free cumulants vérifient alors les mêmes propriétés (19). Considérons un modèle de matrices aléatoires \mathbf{A} telles que $\tau(\mathbf{A}) = 0$, on a alors le tableau comparatif suivant :

Free cumulants	Cumulants
$k_2(\mathbf{A}) = \tau(\mathbf{A}^2)$	$k_2(X) = \mathbb{E}(X^2)$
$k_3(\mathbf{A}) = \tau(\mathbf{A}^3)$	$k_3(X) = \mathbb{E}(X^3)$
$k_4(\mathbf{A}) = \tau(\mathbf{A}^4) - 2\tau(\mathbf{A}^2)^2$	$k_4(X) = \mathbb{E}(X^4) - 3\mathbb{E}(X^2)^2$

Nous savons que les cumulants classiques possèdent déjà une combinatoire intéressante. Nous aurions pu penser que le monde "free" était en fait le classique en remplaçant \mathbb{E} par τ au regard de κ_2 et κ_3 . Mais ce n'est pas le cas, nous explorons en réalité une nouvelle théorie appelée la théorie des variables aléatoires non commutatives. La combinatoire derrière les free-cumulants est très riche et peut également fournir une preuve du théorème de Wigner.

De la même façon que les moments dans le monde commutatif définissent, sous certaines conditions, la distribution de la variable aléatoire, on peut retrouver la distribution spectrale limite ρ à partir des moments dans le monde des matrices aléatoires, définis comme $\tau(\mathbf{A}^n)$. En effet, un développement montre très facilement que

$$(25) \quad \mathfrak{g}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tau(\mathbf{A}^k)}{z^{k+1}}$$

et on sait que la connaissance de \mathfrak{g} permet de retrouver ρ .

La combinatoire reliant les moments et les free cumulants peut être résumée en quelque sorte en la relation algébrique suivante.

Théorème 2.

$$(26) \quad \forall z \text{ grand, } \mathfrak{g}(z)[z - R(\mathfrak{g}(z))] = 1$$

où R est appelé la R -transformée de \mathbf{A} définie comme la dérivée de $H_{\mathbf{A}}$.

Nous ne donnerons pas de preuve de ce théorème. Grâce à cette relation, on pourrait définir la R -transformée de \mathbf{A} comme

$$(27) \quad \forall g \text{ petit, } R(g) = z(g) - \frac{1}{g}$$

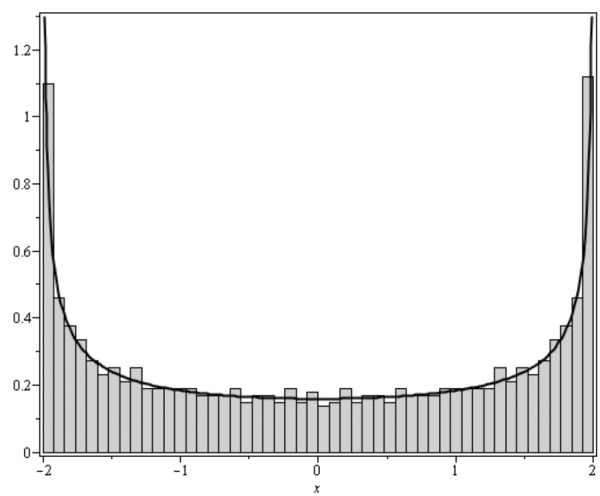
où la fonction $g \mapsto z(g)$ est la fonction réciproque (si tant est qu'elle existe...) de $z \mapsto g(z)$.

5. SOMME DE DEUX MATRICES SYMÉTRIQUES ALÉATOIRES

Notre fonction H a été construite pour bien se comporter vis à vis d'une somme de matrices aléatoires. Comme la dérivée est linéaire, R jouit de la même propriété d'additivité. La section précédente fournit alors une procédure algébrique particulièrement rigolote pour trouver la distribution spectrale limite d'une somme de deux matrices invariantes par rotation \mathbf{A} et \mathbf{B} qu'on notera \mathbf{C} .

- (1) Calculer $\mathfrak{g}_A(z) := \lim_N \frac{1}{N} \text{Tr}((zI_N - \mathbf{A})^{-1})$ et $\mathfrak{g}_B(z)$.
- (2) Inverser $\mathfrak{g}_A(z)$ et $\mathfrak{g}_B(z)$ pour obtenir $z_{\mathbf{A}}$ et $z_{\mathbf{B}}$.
- (3) Calculer $R_{\mathbf{A}}(g) := z_{(\mathbf{A})}(g) - \frac{1}{g}$ et $R_{\mathbf{B}}(g)$.
- (4) Utiliser la relation $R_{\mathbf{C}}(g) = R_{\mathbf{A}}(g) + R_{\mathbf{B}}(g)$ qui donne alors $z_{\mathbf{C}}(g) = R_{\mathbf{C}}(g) + \frac{1}{g}$.
- (5) Résoudre l'équation $z_{\mathbf{C}}(g) = z$ pour $z = \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(z)$.
- (6) Conclure avec

$$(28) \quad \rho_C(\lambda) = \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Im } \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(\lambda - i\varepsilon)}{\pi}.$$

FIGURE 4. Spectre de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ pour $N = 1000$.

Le premier exercice qu'on donne académiquement est le suivant. On prend deux matrices orthogonales aléatoires \mathbf{O}_1 et \mathbf{O}_2 choisies uniformément dans $\mathcal{O}_N(\mathbb{R})$ (comme ce groupe est compact, il est bien possible de faire cela) et on note \mathbf{D} la matrice diagonale dont la moitié des coefficients diagonaux vaut 1 et l'autre -1 . On considère alors $\mathbf{A} := \mathbf{O}_1^T \mathbf{D} \mathbf{O}_1$ et $\mathbf{B} := \mathbf{O}_2^T \mathbf{D} \mathbf{O}_2$. Concrètement, on considère deux symétries orthogonales par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension $\frac{N}{2}$ choisi aléatoirement. La question est alors la suivante : quelle est la distribution spectrale limite de $\mathbf{C} := \mathbf{A} + \mathbf{B}$ lorsque $N \rightarrow \infty$? En suivant la procédure précédente qui consiste essentiellement à résoudre des équations polynomiales de degré 2, vous pouvez montrer que les valeurs propres de \mathbf{C} convergent vers la loi arcsin définie comme

$$(29) \quad \rho(\lambda) = \frac{1}{\pi \sqrt{4 - \lambda^2}}$$

pour $\lambda \in]-2, 2[$ et 0 ailleurs. Ce résultat est en accord avec les simulations (Figure 5). Lorsque N est fini, il est impossible de calculer les valeurs propres de la somme de deux matrices. Un miracle se produit dans la limite "haute-dimension" où les choses deviennent calculables et les formules relativement simples.

Cette théorie des \mathfrak{g} et des R -transformée permet également de répondre à la thématique de la matrice Wigner perturbée par une matrice de rang symétrique de rang 1. Le cadre est le suivant. On considère une matrice de Wigner \mathbf{M} et un vecteur aléatoire u choisi uniformément sur la sphère \mathbb{S}^{N-1} . D'après le théorème de Wigner, on sait que la plus grande valeur propre de \mathbf{M} sera proche de 2 lorsque $N \rightarrow \infty$. Quand est-il de la plus grande valeur propre λ_1 de la matrice

$$(30) \quad \mathbf{M}_a = \mathbf{M} + a u u^T$$

avec a un paramètre réel positif ?

On peut lire dans [2] le résultat suivant vérifiée numériquement sur la figure 5.

Théorème 3.

$$(31) \quad \lambda_1 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} \begin{cases} 2 & \text{si } a < 1 \\ a + \frac{1}{a} & \text{si } a \geq 1 \end{cases}$$

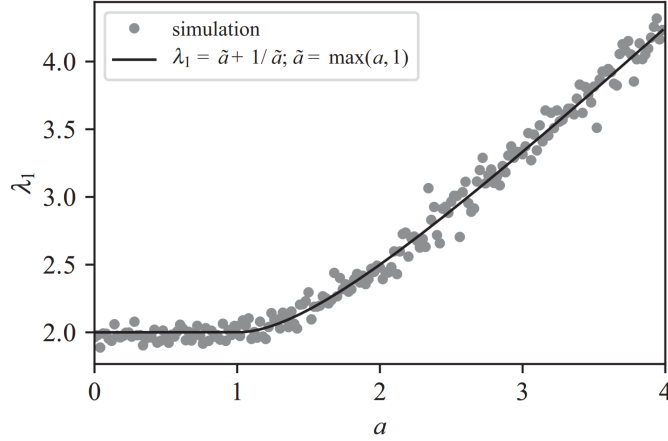


FIGURE 5. Chaque point correspond à la plus grande valeur propre d'une seule réalisation de \mathbf{M}_a pour $N = 200$.

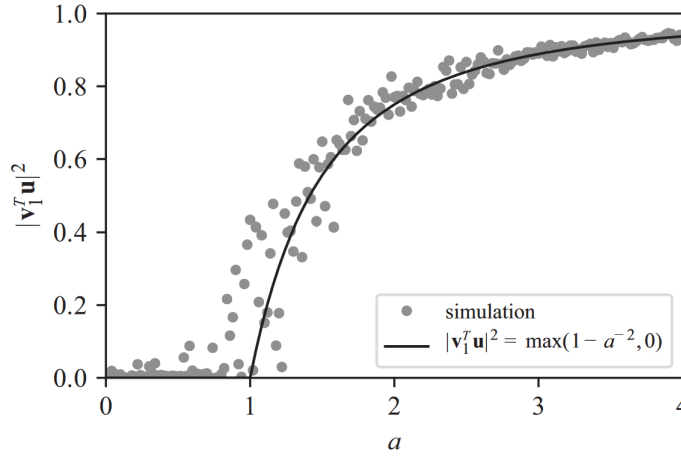


FIGURE 6. Chaque point correspond à l'overlap d'une seule réalisation de \mathbf{M}_a pour $N = 200$.

Ainsi, lorsque $a < 1$, l'ajout de ce projecteur auu^T ne perturbe pas la plus grande valeur propre de \mathbf{M} . Lorsque $a \rightarrow \infty$, on s'attend à ce que auu^T domine et donc que λ_1 vaille approximativement a de vecteur propre u . C'est bien ce que la formule donne.

Une autre question intéressante est : à quel point le vecteur propre associé à λ_1 qu'on notera φ est proche de u ? Les techniques de R -transformée donnent une formule de ce qu'on appelle l'overlap (confirmée sur la figure 5) dans la limite $N \rightarrow \infty$.

Théorème 4.

$$(32) \quad \frac{\langle \varphi | u \rangle}{\|\varphi\| \|u\|} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} 1 - \frac{1}{a^2}.$$

On retrouve bien que lorsque $a \rightarrow \infty$, φ et u sont très "proches". Il est encore une fois tout à fait remarquable que, dans la limite "haute-dimension", les formules soient aussi belles et simples.

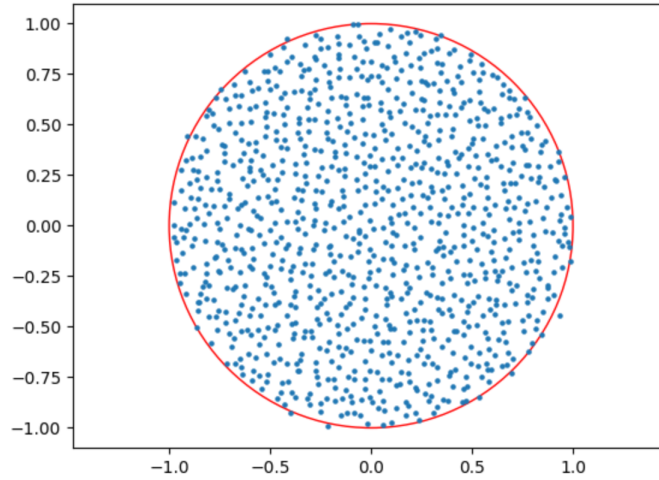


FIGURE 7. Spectre complexe d'un Ginibre complexe de taille 1000 accompagné du cercle unité.

6. MATRICES NON HERMITIENNES

Faisons maintenant un petit voyage au pays des matrices non-hermitiennes. Les valeurs propres peuvent maintenant être complexes. Le modèle jouet des matrices non-hermitiennes est la matrice Ginibre complexe définie de la manière suivante.

Définition 3. On appelle un Ginibre complexe une matrice \mathbf{M} de la forme

$$(33) \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1N} \\ M_{12} & M_{22} & \dots & M_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1N} & M_{2N} & \dots & M_{NN} \end{pmatrix}$$

où M_{ij} sont des variables aléatoires gaussiennes complexes indépendantes de moyenne de 0 et de variance $\frac{1}{N}$.

Il est connu que la distribution des valeurs propres d'un Ginibre tend vers la distribution uniforme du disque unité complexe lorsque la taille de la matrice tend vers l'infini. La figure 6 confirme ce résultat théorique.

Le théorème le plus connu concernant les matrices non-hermitiennes est le single ring theorem ([3]), qui traite des matrices bi-invariantes, c'est-à-dire les matrices \mathbf{M} telles que \mathbf{UMV} et \mathbf{M} suivent la même loi pour toutes matrices unitaires \mathbf{U} et \mathbf{V} .

Théorème 5. Sous certaines conditions techniques, la distribution empirique des valeurs propres d'une matrice bi-invariante converge en probabilité vers une mesure de support un unique anneau lorsque la taille de la matrice tend vers l'infini.

Il est facile de voir que le spectre d'une matrice bi-invariante est invariant par rotation. Il est donc évident que la distribution limite devrait être une union disjointe d'anneaux. Ce théorème affirme quelque chose de spectaculaire : il n'y a en réalité qu'un seul anneau. Nous ne l'avons pas précisé, mais des formules relativement simples des rayons de l'anneau existent bien. Le problème des matrices bi-invariantes est donc bien compris. Qu'en est-il de la théorie d'une somme de deux matrices non-hermitiennes? Cela devient rapidement compliqué de déterminer la véritable distribution des valeurs propres. Cependant, on peut

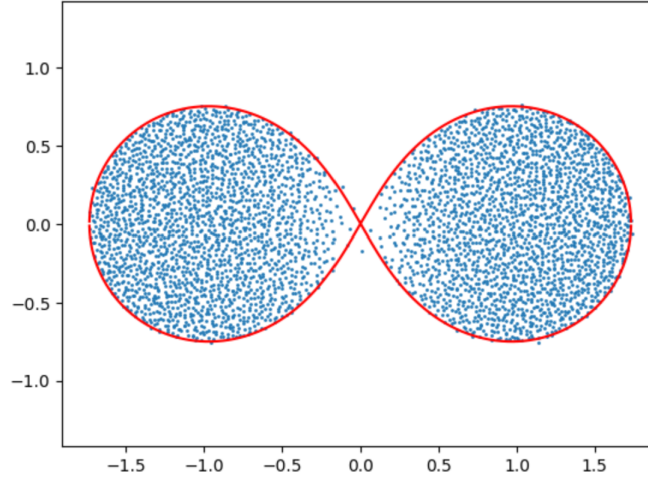


FIGURE 8. Valeurs propres de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ pour $N = 3000$ accompagnées d'un lemniscate.

espérer pouvoir calculer les bords des spectres complexes. Le théorème suivant, présenté dans l'article de physique [1], en donne un exemple.

Théorème 6. Soit \mathbf{A} une matrice déterministe et \mathbf{B} un Ginibre complexe. Alors, le bord du spectre complexe de $\mathbf{A} + \sigma\mathbf{B}$ converge lorsque la taille des matrices tend vers l'infini vers la courbe définie par les $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$(34) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \operatorname{tr} [(z - \mathbf{A})(z - \mathbf{A})^*]^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}.$$

B Prenons \mathbf{A} , la matrice diagonale dont la moitié des coefficients diagonaux valent 1 et l'autre moitié valent -1 . En prenant $\sigma = 1$, le théorème précédent prédit alors que la bordure du spectre complexe de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, avec \mathbf{B} Ginibre complexe, sera un lemniscate, c'est-à-dire les z tels que

$$(35) \quad |z|^2 + 1 = |z^2 - 1|^2.$$

Un des miracles de la théorie des matrices aléatoires est que l'algèbre fait son apparition très naturellement. La procédure que nous avons décrite pour la somme de deux matrices symétriques est très algébrique. On retrouve ce phénomène ici pour le bord du spectre des matrices aléatoires non hermitiennes.

7. CONCLUSION

Un des buts de ce document était de montrer qu'en plus de son champ d'applications dans de multiples disciplines, la théorie des matrices aléatoires crée des liens entre différents domaines des mathématiques. Elle commence par les probabilités, s'étend à la théorie des nombres avec la fonction ζ , rencontre l'analyse complexe avec des subtilités de prolongement analytique, explore la combinatoire avec les cumulants, et touche également à l'algèbre. Elle a l'avantage indéniable d'avoir un côté très visuel grâce aux simulations informatiques, permettant ainsi de vérifier des conjectures ou de se poser de nouvelles questions.

RÉFÉRENCES

- [1] Yashar Ahmadian, Francesco Fumarola, and Kenneth D Miller. Properties of networks with partially structured and partially random connectivity. *Physical Review E*, 91(1) :012820, 2015.
- [2] Florent Benaych-Georges and Raj Rao Nadakuditi. The eigenvalues and eigenvectors of finite, low rank perturbations of large random matrices. *Advances in Mathematics*, 227(1) :494–521, 2011.
- [3] Alice Guionnet, Manjunath Krishnapur, and Ofer Zeitouni. The single ring theorem. *Annals of mathematics*, pages 1189–1217, 2011.
- [4] Jon P Keating and Nina C Snaith. Random matrix theory and $\zeta(1/2 + it)$. *Communications in Mathematical Physics*, 214 :57–89, 2000.
- [5] Madan Lal Mehta. *Random Matrices*. Elsevier, 2004.