Rigidité différentiable des difféomorphismes d'Anosov sur $\mathbb{T}^n$

Introduction au domaine de recherhce

Paul Boureau
AGM, CY Cergy Paris Université
DMA, ENS PSL

Table des matières

Introduction

Ce document est consacré à l'étude de la rigidité différentiable pour une classe importante de systèmes dynamiques : les difféomorphismes d'Anosov sur le tore $\mathbb{T}^n$.

Précisons le problème. Il est bien connu, via une application du théorème du point fixe de Lefschetz, que tout difféomorphisme d'Anosov sur le tore est topologiquement conjugué à un automorphisme linéaire :

Théorème 0.1 (Rigidité topologique)**.** *Tout difféomorphisme d'Anosov de $\mathbb{T}^n$ est topologiquement conjugué à un automorphisme linéaire de $\mathbb{T}^n$.*

Nous nous intéressons ici aux conditions sous lesquelles cette conjugaison peut être améliorée en une conjugaison différentiable, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^r$, en particulier $\mathcal{C}^1$.

En 1993, E. Ghys a motivé cette question dans [Ghys1], où il classe les difféomorphismes d'Anosov de $\mathbb{T}^2$ dont les distributions stable et instable sont de classe $\mathcal{C}^2$.

Nous ne supposerons pas ici que notre difféomorphisme d'Anosov préserve une forme quelconque. Notons néanmoins qu'il existe de nombreux résultats dans ce cadre particulier, notamment sur $\mathbb{T}^2$ dès 1968 dans [Avez], et sur $\mathbb{T}^4$ en 1991 dans [FlaKat].

Une obstruction naturelle à la différentiabilité de la conjugaison est donnée par les points périodiques. Soit x un point périodique de f, c'est-à-dire $f^p(x) = x$. Alors $g^p(h(x)) = h(x)$, et si h était différentiable, on aurait :

$$Df^p(x) = (Dh(x))^{-1} Dg^p(h(x)) Dh(x),$$

autrement dit $Df^p(x)$ et $Dg^p(h(x))$ sont conjugués. On en déduit que chaque point périodique porte une obstruction au lissage de la conjugaison : il définit un module de conjugaison $\mathcal{C}^1$-différentiable.

Supposons maintenant que pour tout point périodique x, $f^p(x) = x$, les différentiels des applications de retour $Df^p(x)$ et $Dg^p(h(x))$ soient conjugués. Autrement dit, les données périodiques de f et g coïncident.

La question se pose alors : si les données périodiques coïncident, la conjugaison h est-elle nécessairement différentiable ?

Une réponse positive pour les difféomorphismes d'Anosov du tore $\mathbb{T}^2$ a été apportée dans [LMM, L]. De la Llave [L] a en revanche montré que la réponse est négative pour les difféomorphismes d'Anosov de $\mathbb{T}^d$, lorsque $d \geq 4$. Dans le cas de $\mathbb{T}^3$, une réponse positive a été obtenue par Andrey Gogolev et Misha Guysinsky dans [GoGu].

Dans ce document, nous présenterons le résultat initial de E. Ghys, puis proposerons un cadre géométrique motivé pour tenter de généraliser son approche au cas du tore $\mathbb{T}^n$, pour $n \geq 3$ où la question est largement ouverte.

En première section, nous présentons les rudiments de Dynamique hyperbolique.

En deuxième section nous présentons les idées de la preuve de [Ghys1]. Nous constatons alors qu'il est naturel de se concentrer sur les propriétés géométriques des feuilletages stable et instable associés à un difféomorphisme d'Anosov.

En troisième section nous présentons [BRU] qui introduit le groupe des polynômes sous-résonnants qui sera le bon modèle pour les structures géométriques sur les variétés stables et instables des difféomorphismes d'Anosov. On y construit des (G, X)- structures explicites sur les variétés de Hopf. Notre raisonement amène à une nouvelle preuve du classique théorème de Poincaré Dulac en analyse complexe.

En quatrième section, nous présetons une généralisation de Gromov des (G, X)-structures. Nous évoquons [KaGU], [Fe] and [BEFH] où sont construites des structures géométriques dépendant continument du point sur les variétés stables sous certaines conditions topologiques.

1. Dynamique hyperbolique

Dans cette section, nous présentons les bases de la dynamique des difféomorphismes d'Anosov et certains développements plus récents. Les détails des résultats évoqués ici sont largement contenus dans [StBr]

1.1. **Hyperbolicité.**

Définition 1.1. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, où $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients réels. On dit que A est une *matrice hyperbolique* si toutes ses valeurs propres $\lambda_i \in \mathbb{C}$ satisfont $|\lambda_i| \neq 1$. Une valeur propre λ_i est dite *contractante* si $|\lambda_i| < 1$, ou *expansive* si $|\lambda_i| > 1$. De même, une matrice A est dite contractante (resp. expansive) si toutes ses valeurs propres sont contractantes (resp. expansives).

Remarque 1.2.
(1) Toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ définit un difféomorphisme lisse de $\mathbb{R}^n$.
(2) L'ensemble des matrices hyperboliques est un ouvert dense de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
(3) Deux matrices hyperboliques conjuguées ont les mêmes valeurs propres.

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice hyperbolique. On peut écrire $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, où E^s et E^u sont les sous-espaces invariants de A associés respectivement aux valeurs propres contractantes et expansives. Ainsi, A est contractante sur E^s et expansive sur E^u.

Considérons maintenant $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire une matrice à coefficients entiers et de déterminant ± 1. Alors A est encore un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$, et $A(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. En passant au quotient, A induit une application

$$\widetilde{A} : x + \mathbb{Z}^n \mapsto A(x) + \mathbb{Z}^n$$

sur le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

On généralise ensuite la notion d'hyperbolicité à des difféomorphismes sur des variétés compactes.

Définition 1.3. Soit M une variété compacte. On dit qu'un sous-ensemble fermé invariant $\Lambda \subset M$ est *hyperbolique* si, pour tout $x \in \Lambda$, il existe une décomposition $T_x M = E^s_x \oplus E^u_x$ telle que

$$df_x(E^s_x) = E^s_{f(x)} \quad \text{et} \quad df_x(E^u_x) = E^u_{f(x)},$$

et il existe des constantes $c > 0$ et $\lambda \in (0,1)$ telles que pour tout $n \geq 0$:

$$\|df^n_x(v)\| \leq c\lambda^n \|v\| \quad \text{si } v \in E^s_x,$$

$$\|df^{-n}_x(v)\| \leq c\lambda^n \|v\| \quad \text{si } v \in E^u_x.$$

Cette définition peut aussi s'énoncer comme une décomposition du fibré tangent $TM = E^s \oplus E^u$ en sous-fibrés invariants.

Théorème 1.4. *Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est une matrice hyperbolique, alors $\mathbb{T}^n$ est hyperbolique relativement à $\widetilde{A} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ au sens de la définition 1.3*

Démonstration. L'espace $\mathbb{R}^n$ est hyperbolique pour A au sens de la définition 1.3. On peut donc considérer une décomposition $\mathbb{R}^n = E^s_x \oplus E^u_x$. Comme l'espace tangent de $\mathbb{R}^n$ s'identifie naturellement à $\mathbb{R}^n$ en tout point, cette décomposition passe au quotient pour donner une décomposition du fibré tangent du tore $\mathbb{T}^n$, ce qui établit l'hyperbolicité de $\widetilde{A}$. $\square$

Les difféomorphismes induits par de telles matrices sont appelés *automorphismes hyperboliques du tore*. Ils possèdent les propriétés dynamiques suivantes :

Proposition 1.5. *Si $\widetilde{A}$ est un automorphisme hyperbolique du tore $\mathbb{T}^n$, $n \geq 2$, alors :*

(1) L'ensemble des points périodiques $\mathrm{Per}(\widetilde{A})$ est dense dans $\mathbb{T}^n$.

(2) Le nombre de points fixes de $\widetilde{A}$ est donné par $|\det(A - I)|$.

(3) Le nombre de points de période n est donné par $|\det(A^n - I)|$.

Démonstration. (1) Soit $p \in \mathbb{T}^n$ un point rationnel, de la forme $\left(\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q}\right)$. Comme $\widetilde{A}$ envoie un point rationnel sur un point rationnel, et qu'il y a un nombre fini de tels points modulo $\mathbb{Z}^n$, l'orbite de p est finie. Donc tous les points rationnels sont périodiques, et comme ils sont denses, $\mathrm{Per}(\widetilde{A})$ est dense.

(2) Un point x est fixe si $(A - I)x \in \mathbb{Z}^n$. Le nombre de tels points est donné par $|\det(A - I)|$.

(3) De même, les points de période n sont les points fixes de $\widetilde{A}^n$, et sont comptés par $|\det(A^n - I)|$.

$\square$

1.2. **Difféomorphismes d'Anosov.**

Définition 1.6. Un difféomorphisme f d'une variété riemannienne lisse et compacte est dit *d'Anosov* si M est hyperbolique.

Lemme 1.7. *Tout difféomorphisme d'Anosov admet une métrique adaptée* $\|\cdot\|$ *telle que* $c = 1$ *dans la Définition 1.3*

Pour simplifier, nous utiliserons désormais une métrique adaptée. Étant donné que les systèmes d'Anosov impliquent des contractions et des dilatations, il est naturel de tenter de classifier le comportement des orbites de f. Nous commençons par décrire les ensembles de points dont les orbites restent proches de l'orbite d'un point donné x.

Définition 1.8. Étant donné $x \in M$ et $\epsilon > 0$ et un difféomorphisme d'Anosov f, on définit :

$$W^s_\varepsilon(x) = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon,\ \forall n \geq 0\} \tag{1.1}$$

$$W^u_\varepsilon(x) = \{y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon,\ \forall n \geq 0\} \tag{1.2}$$

$$W^s(x) = \{y \in M \mid \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\} \tag{1.3}$$

$$W^u(x) = \{y \in M \mid \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\} \tag{1.4}$$

On appelle $W^s_\varepsilon(x)$ et $W^u_\varepsilon(x)$ les *variétés stable et instable* ε*-locales* de x respectivement. De même, $W^s(x)$ et $W^u(x)$ sont appelées les *variétés stable et instable* de x.

Afin de comprendre le comportement d'un difféomorphisme d'Anosov f sur ces ensembles et de justifier leur appellation de variétés, le théorème suivant est central.

Théorème 1.9 (de la variété stable)**.** *Soit f un difféomorphisme C^r et Λ un ensemble hyperbolique pour f. Pour $x \in \Lambda$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit :*

— *$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y)$ lorsque $y \in W^s_\varepsilon(x)$, et $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \lambda^n d(x, y)$ lorsque $y \in W^u_\varepsilon(x)$, pour tout $n \geq 0$;*

— *$W^\sigma_\varepsilon(x)$ est une sous-variété C^r immergée pour $x \in \Lambda$ telle que $T_x W^\sigma_\varepsilon(x) = E^\sigma_x$ où $\sigma = s, u$;*

— *$W^\sigma_\varepsilon(x)$ varie continûment avec x, où $\sigma = s, u$.*

Le corollaire suivant établit le lien entre les variétés ε-(in)stables et les variétés (in)stables globales.

Corollaire 1.10. *Pour un difféomorphisme f, un ensemble hyperbolique Λ, et $x \in \Lambda$ comme dans le Théorème 1.9 :*

$$W^s(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_\varepsilon(f^n(x))) \tag{1.5}$$

$$W^u(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(W^u_\varepsilon(f^{-n}(x))) \tag{1.6}$$

Démonstration. On a $W^s_\varepsilon(x) \subset W^s(x)$ par le Théorème 1.9. Ensuite, si $y \in W^s(x)$, il existe N tel que :

$$y \in \{z \mid d(f^n(x), f^n(z)) < \varepsilon,\ \forall n \geq N\} = \{z \mid f^N(z) \in W^s_\varepsilon(f^N(x))\}.$$

Donc $y \in f^{-N}(W^s_\varepsilon(f^N(x)))$. Le cas instable est similaire. $\square$

Les variétés stable et instable sont des outils remarquables, indispensables dans la démonstration de nombreuses propriétés des difféomorphismes d'Anosov. Au-delà de leur rôle fondamental dans les preuves, elles permettent également de mettre en évidence une structure locale en produit pour un difféomorphisme agissant sur notre variété M.

Lemme 1.11. *Supposons que f est un difféomorphisme d'Anosov. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in M$ vérifiant $d(x, y) < \delta$, l'intersection $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ contient un unique point $[x, y] \in M$. De plus, l'application*

$$[\cdot, \cdot] : \Omega(f) \times \Omega(f) \to M$$

est continue.

Démonstration. Puisque les sous-variétés $W^s_\varepsilon(x)$ et $W^u_\varepsilon(y)$ sont transverses, leur intersection est un unique point qui varie continûment avec x et y. □

Théorème 1.12 (décomposition spectrale)**.** *Soit f un difféomorphisme d'Anosov. On peut écrire l'ensemble non errant de f comme une réunion finie :*

$$\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \cdots \cup \Lambda_s,$$

où chaque Λ_i est un ensemble fermé et f-invariant tel que :
- *la restriction $f|_{\Lambda_i}$ est topologiquement transitive ;*
- *$\Lambda_i = X_{i,1} \cup \cdots \cup X_{i,n_i}$ où les $X_{i,j}$ sont deux à deux disjoints, $f(X_{i,j}) = X_{i,j+1}$ (les indices sont pris modulo n_i), et $f|_{X_{i,j}}$ est topologiquement mélangeant.*

Le théorème de décomposition spectrale affirme que si f est un difféomorphisme d'Anosov d'une variété M, alors M est, d'une certaine manière, décomposée par la dynamique de f. Cette observation soulève naturellement deux questions fondamentales : quels types de décompositions peuvent émerger selon le théorème 1.12, et surtout, quelles sont les variétés qui admettent de telles décompositions, c'est-à-dire, quelles variétés peuvent admettre un difféomorphisme d'Anosov ? Cette dernière question est particulièrement subtile et toujours largement ouverte. Certains exemples permettent déjà d'identifier des variétés qui ne peuvent en aucun cas admettre de tels difféomorphismes.

Proposition 2.19. Il n'existe pas de difféomorphismes d'Anosov sur la sphère de dimension n.

En plus de la question des variétés qui admettent des difféomorphismes d'Anosov, on peut aussi s'interroger sur les propriétés de stabilité de ces difféomorphismes. Autrement dit, est-ce que les difféomorphismes d'Anosov sont topologiquement conjugués à leurs perturbations ? Il existe plusieurs théorèmes utiles pour répondre à ces questions. En particulier, nous avons le lemme de poursuite d'Anosov (Anosov Shadowing Lemma), qui décrit les orbites des difféomorphismes d'Anosov.

Définition 1.13. Étant donnée une suite finie $\bar{x} = \{x_i\}_{i=a}^b$ où a, b sont des entiers, on dit que $\bar{x}$ est une δ-pseudo-orbite de f si

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta, \quad \text{pour tout } i \in [a, b-1]. \tag{1.7}$$

Un point $x \in M$ est dit ε-suiveur (ou ε-shadowing) de $\bar{x}$ si

$$d(f^i(x), x_i) \leq \varepsilon, \quad \text{pour tout } i \in [a, b]. \tag{1.8}$$

Théorème 1.14. *Lemme de poursuite d'Anosov Supposons que f est un difféomorphisme d'Anosov. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que toute δ-pseudo-orbite de f dans Ω est ε-suivie par un certain point $x \in \Omega$, c'est-à-dire que toute pseudo-orbite suffisamment proche de f dans Ω peut être approximée arbitrairement bien par une orbite réelle de f.*

Ce théorème reste valable dans le cas de pseudo-orbites infinies ($a = -\infty$, $b = \infty$). Un corollaire immédiat de ce résultat concerne les points périodiques dans Ω.

Corollaire 1.15. *Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $x \in \Omega$ et $d(f^n(x), x) < \delta$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors il existe un point $x^* \in \Omega$ de période n tel que :*

$$d(f^k(x), f^k(x^*)) \leq \varepsilon, \quad \text{pour tout } k \in \{0, 1, \dots, n\}. \tag{1.9}$$

Cela signifie que toute orbite presque périodique de f peut être approchée par une orbite périodique réelle, située à proximité. Ce résultat impose une contrainte particulièrement forte sur la dynamique des difféomorphismes d'Anosov, ce qui renforce encore l'intérêt de la question de leur classification.

Énonçons enfin un théorème fondamental sur les difféomorphismes d'Anosov.

Théorème 1.16. *(les Anosov sont structurellement stable).*

Soit f un difféomorphisme d'Anosov d'une variété compacte M. Pour tout g suffisamment proche de f dans $\mathrm{Diff}(M)$, on peut trouver une conjugaison topologique entre f et g.

Terminons par voir le point de vue feuilletage des difféomorphismes d'Anosov.

Définition 1.17. Soit M une variété lisse. Un *feuilletage* $\mathcal{F}$ de M est donné par un recouvrement ouvert $\{\mathcal{F}(x)\}_{x\in M}$ tel que chaque $\mathcal{F}(x)$ soit une sous-variété immergée lisse de M de dimension fixe. On appelle *feuilles* de $\mathcal{F}$ les éléments du feuilletage.

Dans le cas d'un difféomorphisme d'Anosov, on peut définir les ensembles suivants :

$$\mathcal{F}^s = \{W^s(x) \mid x \in M\}, \quad \mathcal{F}^u = \{W^u(x) \mid x \in M\}. \tag{3.37}$$

D'après le théorème 1.9, le fibré tangent se décompose de manière continue. Par ailleurs, chaque variété stable (resp. instable) $W^s(x)$ (resp. $W^u(x)$) est une sous-variété immergée de M, ce qui implique que $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont des feuilletages, appelés respectivement *feuilletage stable* et *feuilletage instable.* On appelle les éléments de $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ les *feuilles stables* et *feuilles instables.*

2. Rigidité différentiable sur $\mathbb{T}^2$

Dans cette section, nous présentons le travail fondateur de ce texte. Ghys démontre la rigidité différentiable des difféomorphismes d'Anosov du tore $\mathbb{T}^2$ dans [Ghys1]. Nous présentons les arguments principaux de sa preuve.

2.1. Dérivée logarithmique.

Soit I une variété de dimension 1 (éventuellement à bord) munie d'une structure affine (cf section $(G, X)-$ structures). Cela signifie que I est recouverte par des ouverts U_i et que l'on dispose de difféomorphismes f_i de U_i sur un intervalle de $\mathbb{R}$, de telle sorte que les changements de cartes $f_i \circ f_j^{-1}$ soient des restrictions de difféomorphismes affines de $\mathbb{R}$ à leurs domaines de définition.

Soit maintenant J une autre variété affine de dimension 1 et $f : I \to J$ un difféomorphisme non nécessairement affine, de classe C^r ($r \geq 2$). Si x_0 est un point de I et si l'on choisit des cartes affines aux voisinages de x_0 et $f(x_0)$, le difféomorphisme f peut être considéré comme un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}$. On peut alors construire la forme différentielle sur I définie dans ces coordonnées par :

$$n(f) = \frac{f''}{f'} dx.$$

Il est immédiat que $n(f)$ ne dépend que de f et pas des choix des cartes affines utilisées pour la définir.

Nous résumons quelques propriétés de cette forme dans la

Proposition 2.1. — *$n(f)$ est identiquement nulle si et seulement si f est un difféomorphisme affine.*

— *Si $f : I \to J$ et $g : J \to K$ sont deux difféomorphismes entre variétés affines, on a*

$$n(g \circ f) = f^* n(g) + n(f).$$

— *En particulier, si $h_1 : I \to I'$ et $h_2 : J \to J'$ sont des difféomorphismes affines entre variétés affines, on a*

$$n(h_2 \circ f \circ h_1^{-1}) = h_1^* n(f).$$

Démonstration. — Pour le deuxième point, considérons la composition $g \circ f$. On utilise la règle de dérivation des fonctions composées pour calculer $(g \circ f)'$ et $(g \circ f)''$ en x :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

et

$$(g \circ f)''(x) = g''(f(x))(f'(x))^2 + g'(f(x))f''(x).$$

Nous avons donc $n(g \circ f)$:

$$n(g \circ f) = \frac{(g \circ f)''(x)}{(g \circ f)'(x)} dx.$$

En remplaçant les expressions de $(g \circ f)'$ et $(g \circ f)''$, on obtient :

$$n(g \circ f) = \frac{g''(f(x))(f'(x))^2 + g'(f(x))f''(x)}{g'(f(x))f'(x)} dx.$$

Cette expression se simplifie en :

$$n(g \circ f) = \frac{g''(f(x))}{g'(f(x))} f'(x)dx + \frac{f''(x)}{f'(x)} dx.$$

Donc :

$$n(g \circ f) = f^* n(g) + n(f).$$

— Pour le troisième point, comme h_1 et h_2 sont affines, on a $n(h_1) = 0$ et $n(h_2) = 0$. En appliquant le deuxième point pour la composition $h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$, on a :

$$n(h_2 \circ f \circ h_1^{-1}) = (h_1^{-1})^* n(f) = h_1^* n(f)$$

□

Si I est une variété affine et si α est une 1-forme différentielle de classe C^r ($0 \leq r \leq \infty$), l'équation $n(f) = \alpha$ a des solutions locales $f : I' \to \mathbb{R}$ affines sur des intervalles $I' \subset I$ et deux solutions diffèrent d'une application affine. Ainsi :

Proposition 2.2. *Si I est affine, il y a bijection naturelle entre les (autres) structures affines sur I de classe $C^{r+2}(r > 0)$ sur I et les 1-formes différentielles sur I de classe C^r.*

Nous n'avons défini $n(f)$ que lorsque f est de classe C^2. Il est cependant facile d'affaiblir légèrement cette condition. Nous conviendrons de dire qu'un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}$ est de classe $C^{1,1}$ si sa différentielle est localement lipschitzienne. Si $f : I \to J$ est de classe $C^{1,1}$, on peut encore définir $n(f)$ qui est alors une 1-forme mesurable, définie presque partout, localement bornée. Les propriétés de la proposition 2.1 restent valides.

2.2. **Structures géométriques.** Nous présentons ici la notion de (G, X)-structure. Plus de détails sont disponibles dans [Bergeron].

2.2.1. *Géométries.* Nous introduisons la notion de géométrie. Nous utiliserons la

Définition 2.3. Soit X une variété connexe. On dit d'un groupe d'homéomorphismes G de X qu'il opère *analytiquement* si

$$\forall g_1, g_2 \in G,\ g_1 = g_2 \text{ sur un ouvert non vide } U \subset X \implies g_1 = g_2.$$

Il est important de remarquer que ce n'est pas la définition classique d'action analytique où nous demandons l'analycité des homéomorphismes. Nous adoptons néanmoins le point de vue historique d'Ehresmann.

Définition 2.4. Une géométrie est la donnée d'un couple (G, X) où X est une variété lisse et G un groupe de Lie qui agit sur X par difféomorphismes de manière fidèle, transitive et analytique.

Nous développons un exemple très classique, celui de la géoémtrie euclidienne. Soit $n \geq 1$, nous noterons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Nous noterons d la distance euclidienne associée :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\xrightarrow{d} \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

Définition 2.5. Nous appelons isométrie de $\mathbb{R}^n$ toute application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad , \quad d\left(f(x), f(y)\right) = d(x, y).$$

Il est clair que les translations et les automorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ sont des isométries. Soit alors f une isométrie de $\mathbb{R}^n$ fixant l'origine ; f préserve les géodésiques qui sont les droites dans la cas de $\mathbb{R}^n$. Par isométrie, il en découle que f envoie une droite sur une droite parallèle à cette dernière. Finalement, f envoie un parallélogramme sur un autre et il en découle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad , \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Par récurrence sur la relation précédente, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad f(nx) = nf(x).$$

Soit alors $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, nous avons en utilisant plusieurs fois la dernière relation, $\frac{p}{q} f(x) = \frac{p}{q} f\left(\frac{q}{q} x\right) = pf\left(\frac{x}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q} x\right)$. Il s'ensuit

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Finalement, en remarquant que f est continue et par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, nous pouvons conclure que f est linéaire. Nous venons alors de démontrer le

Lemme 2.6. *Toute isométrie de $\mathbb{R}^n$ fixant l'origine est un automorphisme orthogonal.*

Soit maintenant g une isométrie de $\mathbb{R}^n$. Nous notons $t := g(0)$. Il existe donc une isométrie A fixant l'origine tel que, en notant τ_t la translation $x \mapsto x + t$,

$$g = \tau_t \circ A.$$

Il en découle le

Théorème 2.7. *Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^n$, il existe A une matrice orthogonale et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tels que*

$$f : x \mapsto Ax + b.$$

Il en découle la

Proposition 2.8. *Nous avons l'isomorphisme de groupe suivant :*

$$Isom(\mathbb{R}^n) \cong O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$$

où $\mathbb{R}^n$ *agit par translation.*

Ainsi il est facile de vérifier que $(\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$ vérifie les conditions de la 2.4. Nous présentons quelques géométries classiques et très rencontrées.

TABLE 1. Quelques cas importants de géométries.

Structure	**Espace modèle** X	**Groupe** G
Euclidienne	$\mathbb{R}^n$	$O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$
Sphérique	S^n	$O(n+1)$
Hyperbolique	$\mathbb{H}^n$	$O^+(n,1)$
Affine	$\mathbb{R}^n$	$GL(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$
Conforme	$S^n = \partial\mathbb{H}^{n+1}$	$O^+(n+1,1)$

2.2.2. (G,X)-*structures.* Étant donnée une variété lisse M et (G,X) une géométrie au sens de la section précédente, dans l'optique de munir notre variété d'une géométrie, nous introduisons la

Définition 2.9. Soit (G,X) une géométrie au sens de la section précédente. Soit U un ouvert de X. Soit $f : U \to X$ une application lisse. Nous disons que f est localement-G si U admet un recouvrement par des ouverts $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ et si il existe des éléments de G $\{g_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tels que

$$\forall \alpha \in A \quad , \quad f|_{U_\alpha} = g_\alpha|_{U_\alpha}.$$

Ainsi en rappelant la

Définition 2.10. Soit X un espace topologique. Un pseudogroupe sur X est un ensemble $\mathcal{G}$ d'homéomorphismes entre ouverts de X vérifiant les conditions suivantes.

(1) Les ensembles de définition des éléments $g \in \mathcal{G}$ forment un recouvrement de X.
(2) Pour tout élément $g \in \mathcal{G}$ et pour tout ouvert U contenu dans l'ensemble de définition de g, la restriction $g|_U$ appartient à $\mathcal{G}$.
(3) Pour tous $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ tels que l'image de g_1 soit contenue dans le domaine de définition de g_2, la composée $g_2 \circ g_1$ appartient à $\mathcal{G}$.
(4) Pour tout $g \in \mathcal{G}$, l'inverse g^{-1} appartient à $\mathcal{G}$.
(5) La propriété d'appartenir à $\mathcal{G}$ est locale : si $g : U \to V$ est un homéomorphisme entre ouverts de X et si U est recouvert par des ouverts U_a tels que chaque restriction $g|_{U_a}$ appartienne à $\mathcal{G}$, alors g appartient à $\mathcal{G}$.

Il en découle que les applications localement-G avec les ouverts de X forment un pseudogroupe sur lequel nous allons nous baser pour mettre une structure sur M. Ainsi, introduisons la

Définition 2.11. Un $(G,X)-$atlas sur M est une paire $(\mathcal{U}, \Phi)$ où

$$\mathcal{U} := \{U_\alpha \mid \alpha \in A\},$$

est un recouvrement ouvert de M et

$$\Phi = \left\{ U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} X \right\}_{U_\alpha \in \mathcal{U}}$$

est une collection de cartes telle que pour chaque paire $(U_\alpha, U_\beta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$, la restriction de $\varphi_\alpha \circ (\varphi_\beta)^{-1}$ à $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ est localement-G.

C'est ce que nous appellerons

Définition 2.12. Une (G,X)-structure sur M est un $(G,X)-$atlas maximal et une $(G,X)-$variété est une variété munie d'une (G,X)-structure.

Il découle directement de la définition qu'une $(G,X)-$variété possède une structure analytique sous-jacente puisque l'action de G sur X est analytique.

Un résultat fondamental pour notre travail est la

Proposition 2.13. *Soit Γ un sous-groupe de G qui opère librement et proprement discontinûment sur X, alors l'espace quotient hérite d'une structure naturelle de (G,X)-variété dont un atlas de cartes est fourni par les sections locales de la projection $X \to X/\Gamma$ et dont les changements de cartes sont induits par des restrictions d'éléments de Γ.*

2.3. **Structures affines sur les feuilles.** Le but de cette partie est de démontrer un théorème central pour la rigidité différentiable sur $\mathbb{T}^2$. Ce théorème a été démontré par Ghys dans [Ghys2]

Soit φ un difféomorphisme d'Anosov de $\mathbb{T}^2$ de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$.

Théorème 2.14 (E. Ghys)**.** *Il existe une unique structure affine sur les feuilles de $\mathcal{F}^s$ (resp. $\mathcal{F}^u$) qui est de classe C^r sur chaque feuille, qui dépend continûment du point (voir plus bas) et qui est invariante par φ. Pour cette structure, chaque feuille de $\mathcal{F}^s$ (resp. $\mathcal{F}^u$) est affinement isomorphe à la droite* $\mathbf{R}$.

Démonstration. Soit φ un difféomorphisme d'Anosov de classe C^r sur une variété compacte M, avec $r \geq 2$. Les feuilletages stable $\mathcal{F}^s$ et instable $\mathcal{F}^u$ sont intégrables, et chaque feuille est une sous-variété de dimension 1, de classe C^r.

Notre objectif est de doter chaque feuille de $\mathcal{F}^s$ (ou $\mathcal{F}^u$) d'une structure affine, c'est-à-dire d'un atlas dont les changements de cartes sont des applications affines. Il ne suffit pas d'utiliser la longueur d'arc induite par une métrique, car une telle structure ne serait pas, en général, invariante par φ.

Nous allons donc construire une structure affine canonique, invariante par φ. Pour cela, fixons un champ de vecteurs X de classe C^r tangent au feuilletage stable, de norme 1 dans une métrique riemannienne quelconque. Ce champ est bien défini localement, et sa direction est contractée par φ.

L'idée est d'utiliser une construction dynamique. À toute application f de classe C^2 d'un intervalle réel, on peut associer une 1-forme $n(f)$ (la dérivée logarithmique vue plus haut) qui mesure sa déviation par rapport aux transformations affines. Cette forme est nulle si et seulement si f est affine. En évaluant cette forme sur le champ X, on obtient une fonction $u := n(\varphi)(X)$, définie sur M, continue, et de classe C^{r-2} le long des feuilles.

Nous cherchons maintenant une fonction v sur M, de classe C^{r-2} le long des feuilles, telle que la nouvelle structure affine définie par v soit invariante par φ. Cela revient à résoudre l'équation fonctionnelle suivante :

$$u = \lambda \cdot v \circ \varphi - v,$$

où λ est la fonction définie par $\varphi_* X = \lambda X$. Cette équation est de type cohomologique, et l'existence d'une solution v découle d'un argument classique : l'opérateur $P(v) := \lambda \cdot v \circ \varphi$ est contractant sur un espace de fonctions approprié, en raison de la contraction du feuilletage stable. Par le théorème du point fixe de Banach, il existe une unique solution v continue, et de classe C^{r-2} le long des feuilles.

Cette fonction v définit une structure affine sur chaque feuille de $\mathcal{F}^s$, invariante par φ, de régularité C^r le long des feuilles, et qui varie continûment avec le point.

Enfin, pour voir que chaque feuille est affinement isomorphe à la droite $\mathbb{R}$, on utilise le fait que φ possède des points périodiques denses, et que sur la feuille stable d'un tel point périodique, l'itérée φ^n agit comme une contraction affine. Une telle action n'est possible que sur un espace affine isomorphe à $\mathbb{R}$.

$\square$

2.4. **Résultats.** Nous présentons le résultat principal de [Ghys1] qui mène à la rigidité différentiable sur $\mathbb{T}^2$.

Théorème 2.15. *Soit φ un difféomorphisme d'Anosov de classe $\mathcal{C}^r$ $(2 \leq r \leq \infty)$ du tore $\mathbb{T}^2$. Si $\mathcal{F}^s$ est transversalement de classe $\mathcal{C}^{1,1}$, alors $\mathcal{F}^u$ est transversalement affine. Plus précisément, le pseudogroupe d'holonomie de $\mathcal{F}^s$ préserve les structures affines des feuilles de $\mathcal{F}^u$.*

Dans un soucis de concision pour ce document nous admettrons ce résultat.

Corollaire 2.16 (rigidité différentiable de $\mathbb{T}^2$)**.** *Si $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont de classe $\mathcal{C}^{1,1}$, alors φ est $\mathcal{C}^r$-conjugué à un automorphisme linéaire du tore $\mathbb{T}^2$.*

Démonstration. Le revêtement universel de $\mathbb{T}^2$ est difféomorphe au produit $L^s \times L^u$ d'une feuille L^s du feuilletage stable $\mathcal{F}^s$ et d'une feuille L^u du feuilletage instable $\mathcal{F}^u$, muni des feuilletages produits. Cette description est permise car, par hypothèse, φ est topologiquement conjugué à un automorphisme linéaire du tore.

D'après le théorème 2.15, les feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont tous deux *transversalement affines*, et donc chaque feuille L^s, L^u est affinement isomorphe à $\mathbb{R}$, avec une structure affine naturelle.

Le groupe fondamental de $\mathbb{T}^2$ est $\mathbb{Z}^2$, et il agit naturellement sur le revêtement universel $L^s \times L^u \cong \mathbb{R}^2$ par automorphismes du feuilletage. Cette action est libre et sans point fixe, donc elle s'identifie à une action par translations affines sur $\mathbb{R}^2$.

Autrement dit, le tore hérite d'une structure affine complète : il s'identifie à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ de manière affine, et le difféomorphisme φ agit lui-même par une transformation affine sur ce quotient.

On en déduit que φ est affinement conjugué à un automorphisme affine de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, ce qui signifie que φ est linéaire dans une structure affine appropriée. Ainsi, φ est conjugué à un automorphisme linéaire du tore. $\square$

2.5. **Idée de généralisation.** Pour généraliser le cadre développé par Ghys dans [Ghys1], il est naturel de se concentrer sur les propriétés géométriques des feuilletages stable et instable associés à un difféomorphisme d'Anosov. En effet, une grande partie de la rigidité démontrée dans le cas du tore repose sur l'existence d'une structure affine invariante sur chaque feuille, ainsi que sur la régularité transverse de ces structures. Afin d'étendre ces résultats à des variétés plus générales, il devient crucial de construire, ou tout au moins d'identifier, des structures géométriques naturelles — affines, projectives, conformes ou autres — sur les feuilles de $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$. La compatibilité de ces structures avec la dynamique, ainsi que leur régularité dans la direction transverse, jouent alors un rôle central. Cette approche permet d'espérer une classification plus large des difféomorphismes d'Anosov, fondée non seulement sur des arguments topologiques, mais aussi sur une analyse fine des géométries portées par les feuilles des feuilletages dynamiques.

3. Le cas complexe stationnaire

Nous avons étudié le cas complexe stationnaire dans [BRU]. Nous construisons des (G, X)-structures sur les feuilles stables d'un biholomorphisme contractant passant par un point fixe.

3.1. **Polynômes sous-résonnants au sens de Katok.** Soit $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure et inversible de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_l$ avec $0 < |\lambda_1| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_n| < 1$. Nous avons

$$\mathbb{C}^n = E^{\lambda_1}(L) \oplus \cdots \oplus E^{\lambda_l}(L)$$

où $E^{\lambda_i}(L)$ est le sous-espace caractéristique de L associée à la valeur propre λ_i. Nous notons $n_i := \dim(E^{\lambda_i}(L))$.

Définition 3.1. Soit $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un polynôme homogène fixant 0, nous disons qu'il est de type sous-résonnant $s = (s_1, ..., s_l)$ si pour tous $a_1, ..., a_l \in \mathbb{C}$ et $(t_1, ..., t_l) \in E^{\lambda_1}(L) \times \cdots \times E^{\lambda_l}(L)$,

$$P(a_1 t_1 + ... + a_l t_l) = a_1^{s_1} ... a_l^{s_l} P(t_1 + ... + t_l)$$

Étant donné qu'une application polynomiale est la somme de termes homogènes, nous pouvons introduire la

Définition 3.2. Un polynôme $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ fixant 0 est dit sous-résonnant relativement à L si chaque composante $P_i : \mathbb{C}^n \to E^{\lambda_i}(L)$ n'a que des termes homogènes de type $s = (s_1, ..., s_l)$ vérifiant

$$\ln|\lambda_i| \leq \sum_j s_j \ln|\lambda_j|.$$

Les notions de polynômes homogènes et de degré d'homogénéité est invariante par changement de coordonnées. Il en découle que l'espace des polynômes sous-résonnants ne dépend aucunement d'un système de coordonnées mais uniquement de la matrice L et de ses sous-espaces caractéristiques. Nous noterons $\mathcal{SR}(L)$ l'ensemble des polynômes sous-résonnants relativement à L et $\mathcal{SR}_k(L)$ ceux de degré k.

Il découle directement de la définition le

Lemme 3.3. *Soit $P_i : \mathbb{C}^n \to E^{\lambda_i}(L)$ un terme homogène d'un polynôme sous-résonnant relativement à L de type $s = (s_1, ..., s_l)$, alors*

(1) $s_j = 0$ pour $j < i$,

(2) $\sum_j s_j \leq \frac{\ln|\lambda_1|}{\ln|\lambda_l|}$.

Le deuxième point donne une majoration du degré des polynômes sous-résonnants relativement à L.

Cette notion a été introduite en 1998 par M. Guysinsky et A. Katok dans [KaGU]. Ils démontrent que l'ensemble des polynômes sous-résonnants relativement à L dont la dérivée est inversible à l'origine est un groupe de Lie de dimension finie pour la composition.

Théorème 3.4. *L'ensemble des polynômes sous-résonnants relativement à L dont la dérivée est inversible à l'origine forme un groupe algébrique de dimension finie pour la composition. Nous le noterons $\mathcal{SR}^*(L)$.*

Démonstration. Montrons dans un premier temps que cet ensemble est stable par composition. Soient $F = (F_1, ..., F_l)$ et $G = (G_1, ..., G_l)$ deux polynômes sous-résonnants. Nous avons $F \circ G = (F_1 \circ G, ..., F_l \circ G)$ et pour $1 \leq i \leq l$, nous devons montrer que les types des termes homogènes de $F_i \circ G$ sont sous-résonnants. Soit alors Q_i un terme homogène de F_i, il existe $(s_1, ..., s_l)$ vérifiant $\ln|\lambda_i| \leq \sum_j s_j \ln|\lambda_j|$ tels que pour tous $a_1, ..., a_l \in \mathbb{C}$ et $(t_1, ..., t_l) \in E^{\lambda_1}(L) \times \cdots \times E^{\lambda_l}(L)$, $Q_i(a_1 t_1 + ... + a_l t_l) = a_1^{s_1} ... a_l^{s_l} P(t_1 + ... + t_l)$. Soit alors pour tout $1 \leq j \leq l$, R_j un terme homogène de G_j, il existe donc $(s_1^j,...,s_l^j)$ vérifiant $\ln|\lambda_j| \le \sum_k s_k^j \ln|\lambda_k|$ tels que pour tous $a_1,...,a_l \in \mathbb{C}$ et $(t_1,...,t_l) \in E^{\lambda_1}(L) \times \cdots \times E^{\lambda_l}(L)$, $R_j(a_1t_1+...+a_lt_l) = a_1^{s_1^j}...a_l^{s_l^j}P(t_1+...+t_l)$. Nous avons donc pour $a_1,...,a_l \in \mathbb{C}$ et $(t_1,...,t_l) \in E^{\lambda_1}(L) \times \cdots \times E^{\lambda_l}(L)$

$$\begin{aligned} Q_i\left(\sum_j R_j(a_1t_1+...+a_lt_l)\right) &= Q_i\left(\sum_j a_1^{s_1^j}\cdots a_l^{s_l^j} R_j(t_1+...+t_l)\right) \\ &= \left(a_1^{s_1^1}\cdots a_l^{s_l^1}\right)^{s_1}\cdots\left(a_1^{s_1^l}\cdots a_l^{s_l^l}\right)^{s_l} Q_i\left(\sum_j R_j(t_1+...+t_l)\right) \\ &= \left(a_1^{s_1s_1^1}\cdots a_l^{s_1s_l^1}\right)\cdots\left(a_1^{s_ls_1^l}\cdots a_l^{s_ls_l^l}\right) Q_i\left(\sum_j R_j(t_1+...+t_l)\right) \end{aligned}$$

Il s'agit donc de vérifier que

$$\lambda_i \le \sum_k \sum_j s_k^j s_j \ln|\lambda_k|.$$

Nous avons $\sum_k \sum_j s_k^j s_j \ln|\lambda_k| = \sum_j \sum_k s_k^j s_j \ln|\lambda_k|$ et $\ln|\lambda_j| \le \sum_k s_k^j \ln|\lambda_k|$ pour tout j car R_j est sous-résonnant. Ainsi nous avons

$$\sum_k \sum_j s_k^j s_j \ln|\lambda_k| \ge \sum_j s_j \ln|\lambda_j|.$$

Le résultat découle alors du caractère sous-résonnant de Q_i. $\mathcal{SR}^*(L)$ est donc stable par composition. Cette opération étant polynomiale en les coefficients, elle est algébrique.

Remarquons qu'une application linéaire est un polynôme sous-résonnant relativement à L si et seulement si elle préserve les espaces

$$\bigoplus_{\lambda;|\lambda|<\mu} E^\lambda(L)$$

pour tout $\mu \in]0,1[$. Ainsi Pour $F \in \mathcal{SR}^*(L)$, l'inverse de sa partie linéaire est aussi un polynôme sous-résonnant.

Montrons maintenant que les polynômes sous-résonnants relativement à L de dérivée en 0 sont inversibles au sens de la composition et que leur inverse est sous-résonnant. Soit F une telle application. En composant à droite par l'inverse P_1 de la dérivée de F en 0, on obtient une application $F_1 = Id+S_2+S_{>2}$ où S_2 est une somme de polynômes homogènes de degré 2 et $S_{>2}$ est une somme de termes homogènes de degré strictement supérieurs à 2. Par construction, la somme de deux polynômes sous-résonnants relativement à L est un polynôme sous-résonnant relativement à L. Ainsi le polynôme $P_2 := Id-S_2 \in \mathcal{SR}^*(\mathcal{L})$. En composant à droite F_1 par P_2 on obtient le polynôme de $\mathcal{SR}^*(\mathcal{L})$ $F_2 := F_1 \circ P_1 = Id-S_2+S_2+S_{>2} = Id+S_3+S_{>3}$. D'après le lemme 3.3, le degré de F est majoré par $\frac{\ln|\lambda_1|}{\ln|\lambda_l|}$. Il en découle qu'il existe un entier m tel que en continuant la construction précédente, nous ayons $F_m = Id$.

Nous avons donc montré que F est inversible et

$$F^{-1} = P_1 \circ \cdots \circ P_m$$

où chaque $P_i \in \mathcal{SR}^*(L)$. Il en découle que $F^{-1} \in \mathcal{SR}^*(L)$. L'opération qui à un polynôme de $\mathcal{SR}^*(L)$ associe son inverse est donc polynomiale en les coefficients, elle est donc algébrique.

Finalement $\mathcal{SR}^*(L)$ est bien un groupe algébrique de dimension finie par majoration du degré des polynômes sous-résonnants. □

3.2. **Théorème de Poincaré-Dulac.** Nous étudions les formes normales des germes de biholomorphismes contractant. Ce travail de Poincaré et Dulac se situe aujourd'hui dans le cadre général de la normalisation d'orbites, dans le cas particulier d'une orbite réduite à un point. Initialement motivé par la réduction d'une équation différentielle au voisinage d'un point d'équilibre, Poincaré démontre le

Théorème 3.5 (Poincaré)**.** *Soit $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ une application holomorphe dont la partie linéaire à l'origine L est inversible et contractante. Si le spectre de L ne satisfait aucune relation de résonnance, il existe un biholomorphisme local ϕ tel que $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = Id$ et $\phi^{-1} \circ F \circ \phi = L$.*

Dulac complète et étend alors les résultats de son directeur de thèse en démontrant la réduction systématique à une forme normale polynomiale avec le

Théorème 3.6 (Poincaré-Dulac)**.** *Soit $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ une application holomorphe dont la partie linéaire à l'origine L est inversible et contractante. Il existe un polynôme P et un biholomporhisme local ϕ tel que $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = Id$ et $\phi^{-1} \circ F \circ \phi = P$.*

Ces deux théorèmes centraux dans la théorie des formes normales appliquent le même schéma de preuve. Étant donné une transformation holomorphe $F : B_r \to \mathbb{C}^n$, elle peut se développer sous la forme $F = \sum_{p>1} H_p$ où H_p est une application polynomiale homogène de degré p. Nous construisons alors formellement un biholomorphisme local en composant des transformations construites afin d'annuler le terme d'un certain degré dans cette décomposition. Cette méthode nécessite d'étudier la convergence du changement de carte formellement construit.

Dans cette section l'intégralité de ces problèmes de convergence seront résolus par le théorème issu de [Bert]

Théorème 3.7 (Berteloot)**.** *Soit N un automorphisme de $\mathbb{C}^n$ fixant l'origine et dont la partie linéaire $L := N'(0)$ vérifie $a\|z\| \leq \|L(z)\| \leq A\|z\|$ où $0 < a \leq A < 1$.*

Soit $F : B_r \to \mathbb{C}^n$ une application holomorphe telle que

$$F = N + \sum_{p \geq k} H_p.$$

Alors, si $k > \frac{\ln a}{\ln A}$, la suite $(N^{-p} \circ F^p)_p$ converge et sa limite ϕ définit un biholomorphisme local tel que $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = Id$ et $\phi^{-1} \circ F \circ \phi = N$.

Considérons une application holomorphe $F = L + \sum_{p \geqslant 2} H_p$ où L est linéaire de spectre $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ avec $0 < |\lambda_1| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_n| < 1$. Nous notons D la partie diagonalisable de L par la décomposition de Dunford. Nous considérons une base $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ de trigonalisation de L adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = E^{\lambda_1}(L) \oplus \cdots \oplus E^{\lambda_l}(L)$. A partir de maintenant, nous nous plaçons de le système de coordonnées associé. C'est donc aussi une base de diagonalisation de D.

Définition 3.8. Nous notons $\mathcal{H}^p$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des applications polynomiales $p-$homogènes de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$. Pour tout multi-indice $I = (i_1, \cdots, i_n)$ on note $z^I := z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$. On munit $\mathcal{H}^p$ de sa base canonique $\mathcal{B}^p := \{H_{I,j} := z^I e_j, |I| = p, 1 \leqslant j \leqslant n\}$.

Définition 3.9. Toute transformation holomorphe de la forme $\sum_{p\geqslant k+1} h_p$ où $h_p \in \mathcal{H}^p$ sera notée $o(k)$.

Afin d'appliquer le théorème 3.7, nous cherchons à nous ramener à une application du type $L + o(k)$ où k vérifie les hyopthèses du théorème. En notant $c_0(L) := \left[\dfrac{\ln|\lambda_1|}{\ln|\lambda_l|}\right]$, tout entier strictement supérieur à $c_0(L)$ répond au problème. La preuve consiste alors à annuler un à un les termes de degré supérieur à 2 en conjuguant successivement F par des biholomorphismes locaux de la forme $\psi_p := I + h_p, h_p \in \mathcal{H}^p$ pour $p = 2, \cdots, c_0(L)+1$. Commençons par préciser l'effet d'une telle conjugaison avec la

Proposition 3.10. *Soit $\psi := I+h$ où $h \in \mathcal{H}^q$. Soit aussi $F = L+S_{q-1}+H_q+o(q)$ où $S_{q-1} \in \mathcal{H}^2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}^{q-1}$ et $H_q \in \mathcal{H}^q$. Alors*

$$\psi^{-1} \circ F \circ \psi = L + S_{q-1} + [H_q + L \circ h - h \circ L] + o(q).$$

Afin d'établir cette propoistion, on commence par démontrer le Soient $v \in \mathcal{H}^s$ pour $s \geq 2$ et f holomorphe telle que $f(0) = 0$. Nous avons

$$v[f + o(r)] = v \circ f + o(r + s - 1).$$

Démonstration. Il suffit de le vérifier sur la base canonique de $\mathcal{H}^s$. Soient I tel que $|I| = s$ et $1 \leq j \leq n$, on a pour $l = o(r)$

$$H_{I,j}[f + o(r)] = \left(\prod_{t=1}^{n}\sum_{k=0}^{i_t}\binom{i_t}{k} f_t^k l_t^{i_t-k}\right) e_j = \left(\prod_{t=1}^{n}\left(f_t^{i_t} + \sum_{k=0}^{i_t-1}\binom{i_t}{k} f_t^k l_t^{i_t-k}\right)\right) e_j.$$

Or pour $1 \leq t \leq n$ et $0 \leq k \leq i_t - 1$ (sous réserve d'existence), $f_t^k l_t^{i_t-k}$ est de degré au moins $r(i_t - k) + i_t$ car $f(0) = 0$ et donc autour d'un voisinage de l'origine le développement de f ne contient que des termes homogènes de degré plus grands que 1. Ainsi nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{i_t-1}\binom{i_t}{k} f_t^k l_t^{i_t-k} = o(r + i_t - 1)$. Il en découle que que $H_{I,j}[f + o(r)]$ est la somme de $H_{I,j} \circ f$ et de termes de degré au moins $s + r$ d'où le résultat. □

Preuve de la proposition 3.10. Nous avons $F \circ \psi = L + L\circ h + S_{q-1} \circ (I+h) + H_q \circ (I + h) + o(q)$. En appliquant plusieurs fois le lemme précédent, il s'ensuit

$$F \circ \psi = L + L \circ h + S_{q-1} + H_q + o(q).$$

Par le théorème d'inversion locale holomorphe, ψ est inversible d'inverse holomorphe sur un voisinage de l'origine. Nous avons ainsi sur un voisinage de l'origine $\psi^{-1}(y) = y + k(y)$ où k est une somme de polynômes homogènes de degré supérieur à 2. Soit alors $l \geq 2$ tel que $k = o(l-1)$. Nous avons par le lemme précédent sur un voisinage de l'origine,

$$\psi \circ \psi^{-1} = Id + k + h\,(Id + k) = Id + k + h + o(l + q - 2) = Id + k + h + o(q).$$

Il en découle que $k = -h + o(q)$ car $l - 2 \geq 0$. Nous avons ainsi $\psi^{-1}(y) = y - h(y) + o(q)$, il en découle

$$\psi^{-1} \circ F \circ \psi = L + L \circ h + S_{q-1} + H_q - h \circ (L + o(1)) + o(q).$$

En appliquant une dernière fois le lemme précédent,

$$\psi^{-1} \circ F \circ \psi = L + S_{q-1} + [H_q + L \circ h - h \circ L] + o(q).$$

□

Il apparaît dans la proposition 3.10 la famille d'opérateurs.

$$M_L^r : \mathcal{H}^r \longrightarrow \mathcal{H}^r$$

$$h \longmapsto h \circ L - L \circ h.$$

L'inversibilité de M_L^q permet dans la proposition précédente de conjuguer F en une transformation holomorphe sans termes de degré q. Étudions ces opérateurs dans le cas où L est diagonale avec le

Lemme 3.11. *L'opérateur M_D^r est diagonal dans la base $\mathcal{B}^r$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{C}^n$, nous avons

$$M_D^r(H_{I,j})(x) = H_{I,j}(Dx) - DH_{I,j}(x).$$

$H_{I,j}(Dx) = (Dx)^I e_j = (\lambda_1 x_1)^{i_1} \cdots (\lambda_n x_n)^{i_n} e_j = \lambda^I H_{I,j}(x)$ où l'on note λ le spectre de D.
$DH_{I,j}(x) = D(x^I e_j) = x^I \lambda_j e_j = \lambda_j H_{I,j}(x)$. Finalement,

$$M_D^r(H_{I,j}) = (\lambda^I - \lambda_j) H_{I,j}$$

d'où le résultat. □

Nous constatons donc que dans le cas diagonal, M_D^r est inversible si et seulement si pour tout $|I| = r$, pour tout j, $\lambda^I \neq \lambda_j$. Cela conduit naturellement à la

Définition 3.12. Le spectre λ vérifie la relation de résonance (I, j) si $\lambda^I = \lambda_j$.

L'étude de M_D^r suffit à comprendre le comportement de M_L^r. En effet, nous démontrons le

Lemme 3.13. *Le spectre de M_L^r est le même que celui de M_D^r.*

Démonstration. Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, nous notons $L' = P \circ L \circ P^{-1}$. Nous avons pour $h \in \mathcal{H}^r$,

$$\begin{aligned}
M_{L'}^r(h) &= h \circ L' - L' \circ h \\
&= h \circ P \circ L \circ P^{-1} - P \circ L \circ P^{-1} \circ h \\
&= P \circ (P^{-1} \circ h \circ P \circ L) \circ P^{-1} - P \circ (L \circ P^{-1} \circ h \circ P) \circ P^{-1} \\
&= P \left((P^{-1} \circ h \circ P) \circ L - L \circ (P^{-1} \circ h \circ P) \right) \circ P^{-1} \\
&= \phi \left(M_L^r(\phi^{-1}(h)) \right)
\end{aligned}$$

où $\phi : h \mapsto P \circ h \circ P^{-1}$. Il en découle que M_L^r et $M_{L'}^r$ sont conjugués. La densité des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ permet alors de conclure. □

Nous sommes maintenant en mesure de donner une preuve du théorème de Poincaré.

Preuve du théorème 3.5. Par hypothèse le spectre de L ne vérifie pas de relation de résonance, il en découle par le lemme 3.13 que tous les opérateurs M_L^r pour $r \geq 2$ sont inversibles. Pour tout $2 \leq r \leq c_0(L) + 1$, il existe donc un polynôme $h_r \in \mathcal{H}^r$ tels que la conjugaison de F par le biholomorphsime local $\psi_r = Id + h_r$ supprime le terme de degré r de F par la proposition 3.10. En posant $\varphi = \psi_2 \circ \cdots \circ \psi_{c_0(L)+1}$, nous avons

$$\tilde{F} := \varphi^{-1} \circ F \circ \varphi = D + o(c_0(L) + 1).$$

Or $L = F'(0) = \tilde{F}'(0)$, nous pouvons donc appliquer le théorème 3.7 pour conclure. □

Dans le cas général, nous proposons une étude approfondie des opérateurs M_L^r. Remarquons tout d'abord la

Proposition 3.14. *M_L^r est triangulaire dans un réordonnement de $\mathcal{B}^r$.*

Démonstration. En effet pour $|I| = r$ et $1 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned}
M_L^r(H_{I,j})(z_1,...,z_n) &= (H_{I,j} \circ L)(z_1,...,z_n) - (L \circ H_{I,j})(z_1,...,z_n) \\
&= H_{I,j}\left(\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{j=t}^{n} l_{t,j} z_j\right) e_t\right) - z^I L e_j \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} l_{1,j} z_j\right)^{i_1} \cdots (l_{n,n} z_n)^{i_n} e_j - \sum_{i=1}^{j} l_{i,j} H_{I,i}(z_1,...,z_n) \\
&= (\lambda^I - \lambda_j) H_{I,j}(z_1,...,z_n) + \left(\sum_{I'} \alpha_{I'} z^{I'}\right) e_j - \sum_{i=1}^{j-1} l_{i,j} H_{I,i}(z_1,...,z_n) \\
&= (\lambda^I - \lambda_j) H_{I,j}(z_1,...,z_n) + \sum_{I'} \alpha_{I'} H_{I',j}(z_1,...,z_n) - \sum_{i=1}^{j-1} l_{i,j} H_{I,i}(z_1,...,z_n)
\end{aligned}$$

Nous définissons un ordre sur les multi-indices par $I' \ll I$ si $i'_n > i_n$ ou $i'_n = i_n$ et $i'_{n-1} > i_{n-1}$ et ainsi de suite. Cet ordre assure que tous les multi-indices qui apparaissent dans la somme $\sum_{I'} \alpha_{I'} H_{I',j}(z_1,...,z_n)$ soit strictement inférieurs à I. Nous définissons alors naturellement sur les couples (I,j) par $(I',j') < (I,j)$ si $I' \ll I$ ou $I' = I$ et $j' < j$. Nous venons de démontrer que M_L^r est triangulaire supérieure dans ce réordonnement de $\mathcal{B}^r$. Il s'agit d'une nouvelle preuve du lemme 3.13. □

Ces opérateurs se comportent très bien vis à vis de l'espace des polynômes sous-résonnants relativement à L. Nous avons premièrement le

Lemme 3.15. *Pour tout r,*

(1) $\mathcal{SR}_r(L)$ est stable par M_L^r.

(2) Les antécédents d'un polynôme de $\mathcal{SR}_r(L)$ par M_L^r sont tous sous-résonnants.

Démonstration. (1) Soit r fixé, Soit h un polynôme de degré r sous-résonnant relativement à L, il suffit de remarquer que $M_L^r(h) = h \circ L - L \circ h$ est la somme de deux polynômes sous-résonnants d'après la stabilité de cet espace par composition. Nous avons utilisé que L est sous-résonnant par rapport à L.

(2) Afin de montrer le deuxième point, nous considérons $h = \sum c_{I,j} H_{I,j}$ un polynôme qui n'est pas sous-résonnant relativement à L. Il existe donc nécessairement (I,j) tel que $c_{I,j} \neq 0$ et $H_{I,j}$ qui n'est pas sous-résonnant relativement à L. Soit (I_0,j_0) maximal pour l'ordre définit dans la preuve de la proposition 3.14 qui vérifie la condition précédente. Nous avons

$$M_L^r(h) = c_{I_0,j_0}(\lambda^{I_0} - \lambda_{j_0}) H_{I_0,j_0} + \sum_{(I,j) \neq (I_0,j_0)} c_{I,j} M_L^r(H_{I,j}) + R$$

avec $R = c_{I_0,j_0} M_L^r(H_{I_0,j_0}) - c_{I_0,j_0}(\lambda^{I_0} - \lambda_{j_0}) H_{I_0,j_0}$.
Nous avons $\lambda^{I_0} - \lambda_{j_0} \neq 0$ sinon H_{I_0,j_0} serait sous-résonnant. Le terme $c_{I_0,j_0}(\lambda^{I_0} - \lambda_{j_0}) H_{I_0,j_0}$ n'est donc pas sous-résonnant relativement à L. D'après la proposition 3.14, dans la somme R n'a pas de composante en H_{I_0,j_0}. Toujours

d'après la proposition 3.14, si $H_{I,j}$ n'est pas sous-résonnant, $M_L^r(H_{I,j})$ n'a pas de composante en H_{I_0,j_0} par maximalité de (I_0, j_0). Enfin d'après le premier point du lemme, si si $H_{I,j}$ est sous-résonnant, $M_L^r(H_{I,j})$ est aussi sous-résonnant et donc n'a pas de composante en H_{I_0,j_0}. Finalement, $\sum_{(I,j)\neq(I_0,j_0)} c_{I,j} M_L^r(H_{I,j})$, n'a pas de composante en H_{I_0,j_0}. Il en résulte que $M_L^r(h)$ a une composante non nulle en H_{I_0,j_0} et donc que $M_L^r(h)$ n'est pas sous-résonnant relativement à L d'où le deuxième point.

□

Ce dernier lemme est fondamental, les opérateurs M_L^r se comportent bien vis à vis de l'espace des polynômes sous-résonants. Nous en déduisons la

Proposition 3.16. *Nous avons pour tout r,*

$$\mathcal{SR}_r(L) + Im(M_L^r) = \mathcal{H}^r.$$

Démonstration. D'après le lemme 3.15, comme le polynôme nul est évidement sous-résonnant, $\ker(M_L^r)$ est inclus dans $\mathcal{SR}_r(L)$. En itérant le lemme, nous avons que $E^0(M_L^r)$ le sous-espace caractéristique de M_L^r associé à la valeur propre 0 est inclus dans $S^r(L)$. Il est clair qu'un sous-espace caractéristique d'un endormorphisme associé à une valeur propre non nulle est inclus dans son image. Ainsi, en utilisant que

$$\mathcal{H}^r = E^0(M_L^r) \oplus \bigoplus_{\lambda valeur\ propre\ non\ nulle} E^\lambda(M_L^r)$$

nous avons la proposition.

□

Cette dernière proposition permet d'affiner le théorème 3.6 . Nous sommes ainsi en mesure de démontrer

Théorème 3.17. *Soit $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ une application holomorphe dont la partie linéaire à l'origine L est inversible et contractante. Il existe un polynôme $P \in \mathcal{SR}^*(L)$ et un biholomorphisme local ϕ tel que $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = Id$ et $\phi^{-1} \circ F \circ \phi = P$.*

Démonstration. Nous notons $F = L + H_2 + o(2)$ où $H_2 \in \mathcal{H}^2$. D'après la proposition 3.16, il existe $h_2 \in \mathcal{SR}_2(L)$ et $f_2 \in \mathcal{H}^2$ tels que $h_2 + M_L^2(f_2) = H_2$. En appliquant la proposition 3.10 au biholomorphisme local $\psi_2 = Id + f_2$, nous obtenons que

$$\tilde{F}_2 = \psi_2^{-1} \circ F \circ \psi_2 = L + h_2 + H_3 + o(3)$$

où $H_3 \in \mathcal{H}^3$. En itérant ce processus, nous avons pour tout $3 \le r \le c_0(L) + 1$, il existe donc un polynôme $f_r \in \mathcal{H}^r$ tels que la conjugaison par le biholomorphisme local $\psi_r = Id + f_r$ donne par la proposition 3.10

$$\tilde{F}_r = \psi_r^{-1} \circ \tilde{F}_{r-1} \circ \psi_r = L + h_2 + ... + h_r + H_{r+1} + o(r + 1).$$

Nous concluons alors par le théorème 3.7 car $L + h_2 + ... + h_{c_0(L)+1}$ est un polynôme sous-résonnant relativement à L dont la dérivée à l'origine est L qui est inversible.

□

3.3. **Structures géométriques sur les variétés de hopf.** Une variété de Hopf est le quotient d'un voisinage de l'origne U par le groupe engendré par l'action d'un germe de biholomorphisme contractant fixant l'origine et tel que $F(U)$ est relativement compact dans U.

En 2008, B. McKay et A. Pokrovskiy démontre l'existence de structures géométriques holomorphes localement homogènes sur les surfaces de Hopf.

Dans cette section, nous construisons une structure géométrique sur les variétés de Hopf en dimension quelconque.

Soit F un germe de biholomorphisme contractant fixant l'origine défini sur un ouvert U tel que $F(U)$ est relativement compact dans U. Notons L la partie linéaire de F et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ les valeurs propres de L. Démontrons la

Proposition 3.18. *$G := \langle \mathcal{SR}^*(L), \mathbb{C}^n \rangle$ où $\mathbb{C}^n$ agit par translation est un groupe algébrique de dimension finie.*

Démonstration. Pour $\tau \in \mathbb{C}^n$, nous noterons t_τ l'application $z \mapsto z + \tau$. Commencons par démontrer le $G = \{t_\tau \circ h | \tau \in \mathbb{C}^n, h \in \mathcal{SR}^*(L)\}$

Démonstration. Il suffit de vérifier que pour tout $(\tau, h) \in \mathbb{C}^n \times \mathcal{SR}^*(L)$,

$$t_{-h(\tau)} \circ h \circ t_\tau \in \mathcal{SR}^*(L).$$

La structure de groupe de $\mathcal{SR}^*(L)$ assure l'inversibilité de la dérivée en 0. Démontrons le caractère sous-résonnant. Pour ce faire, remarquons qu'à τ fixé, la relation précédente est linéaire en h. Il suffit donc de vérifier la condition sur les $H_{I,j}$ sous-résonnants.

Nous avons

$$\begin{aligned} t_{-H_{I,j}(\tau)} \circ H_{I,j} \circ t_\tau \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} &= t_{-H_{I,j}(\tau)} \begin{pmatrix} z_1 + \tau_1 \\ \vdots \\ z_n + \tau_n \end{pmatrix} \\ &= t_{-H_{I,j}(\tau)} \left((z_1 + \tau_1)^{s_1} \cdots (z_n + \tau_1)^{s_n} e_j \right) \\ &= \left((z_1 + \tau_1)^{s_1} \cdots (z_n + \tau_1)^{s_n} - \tau_1^{s_1} \cdots \tau_1^{s_n} \right) e_j \end{aligned}$$

où les s_i sont les indices du multi-indice I.

Les termes homogènes de $t_{-H_{I,j}(\tau)} \circ H_{I,j} \circ t_\tau$ sont donc du type.

$$\binom{s_1}{j_1} z_1^{j_1} \tau_1^{s_1 - j_1} \cdots \binom{s_n}{j_n} z_1^{j_n} \tau_1^{s_n - j_n}$$

où les $j_i \leq s_i$.

Nous avons donc

$$\ln |\lambda_j| \leq \sum s_k \ln |\lambda_k| \leq \sum j_k \ln |\lambda_k|$$

où la première inégalité provient du caractère sous-résonnant de $H_{I,j}$. □

Nous pouvons donc expliciter la loi de G. Soient (t_{τ_1}, h_1) et (t_{τ_2}, h_2) deux éléments de G. Nous avons

$$\begin{aligned} (t_{\tau_1}, h_1) \cdot (t_{\tau_2}, h_2) &= t_{\tau_1} \circ h_1 \circ t_{\tau_2} \circ h_2 \\ &= t_{\tau_1} \circ t_{-\alpha} \circ t_\alpha \circ h_1 \circ t_{\tau_2} \circ h_2 \\ &= t_{\tau_1 - \alpha} \circ h_3 \\ &= (t_{\tau_1 - \alpha}, h_3) \end{aligned}$$

où $\alpha = -h_1(\tau_2)$ et $h_3 = t_\alpha \circ h_1 \circ t_{\tau_2} \circ h_2$. $h_3 \in \mathcal{SR}^*(L)$ par le lemme et la structure de groupe de $\mathcal{SR}^*(L)$.Du calcul précédent, nous avons

$$(t_{\tau_1}, h_1)^{-1} = (t_{h_1^{-1}(\tau_1)}, t_{-h_1^{-1}(\tau_1)} \circ h_1^{-1} \circ t_{\tau_1}).$$

Nous constatons alors que ces relations sont algébriques en τ_1, τ_2, h_1, h_2. □

Soit $h \in \mathcal{SR}^*(L)$, la forme normale de Poincaré-Dulac de F. Il y a alors un biholomorphisme entre les variétés $U \setminus \{0\}/(z \sim F(z)$ et $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}/(z \sim h(z))$. Le groupe $\langle h \rangle$ préserve $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, il agit proprement discontinuement sur $\mathbb{C}^n$. Il en découle que $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}/(z \sim h(z))$ est munie d'une structure géométrique quotient. Nous venons de démontrer le

Théorème 3.19. *Toute variété de Hopf admet une structure géométrique.*

4. Qu'est ce qu'une structure géométrique au sens de Gromov

Afin de définir des structures géométriques sur les variétés stables et instables des difféomorphismes d'Anosov et tenter de généraliser [Ghys1], nous nécessitons une notion plus large de structure géométrique. Nous définissons ici la notion générale d'une structure géométrique sur les variétés. Nous essayons dans cette section de détailler le travail de Gromov [Gro].

4.1. **Définition.** Soient M et N des variétés lisses et soient f, g des applications lisses d'un voisinage d'un point $x \in M$ vers N. On dit que f et g représentent le même r-jet en x si $f(x) = g(x) = y \in N$ et que, par rapport à un choix de coordonnées lisses près de x et y, toutes les dérivées partielles de f et g jusqu'à l'ordre r coïncident.

Plus précisément, soient t_i, $1 \leq i \leq \dim M$ des coordonnées lisses près de x, et u_j, $1 \leq j \leq \dim N$ des coordonnées lisses près de y. On note D_i la dérivation partielle par rapport à t_i, et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multi-indice d'entiers naturels. On pose $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$. Alors f et g représentent le même r-jet en x si, pour tout i et tout α tel que $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq r$, on a :

$$D^\alpha(u_i \circ f)(x) = D^\alpha(u_i \circ g)(x).$$

Cette relation d'équivalence sur les applications locales de classe C^r est notée $f \sim_x^r g$. La classe d'équivalence représentée par f est appelée le r-jet de f en x, notée $j^r f_x$.

L'espace des r-jets des applications locales de classe C^r est une variété lisse, notée $J^r(M, N)$. Des coordonnées locales peuvent être définies sur $J^r(M, N)$ comme suit :

$$u_i^\alpha(j^r f_x) := D^\alpha(u_i \circ f)(x).$$

Le r-jet d'un champ de vecteurs lisse est aussi défini en considérant le champ comme une section de TM.

Une **paramétrisation** (lisse) d'un ouvert $U \subset M$ est un difféomorphisme (lisse) d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur U. On dit que $\varphi : U_0 \to U$ est une paramétrisation en x si $0 \in U_0$, $x \in U$, et $\varphi(0) = x$.

Un **repère d'ordre** r en $x \in M$ est le r-jet en x d'une paramétrisation lisse en x. Un repère d'ordre 1 en x s'identifie naturellement à un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers l'espace tangent $T_x M$. En général, la classe d'équivalence représentée par une paramétrisation φ sera notée $(j^r\varphi)_0$ – le r-jet de φ en 0.

La collection de tous les repères sur M forme naturellement une variété lisse appelée le **fibré des repères d'ordre** r de M, notée $F^r(M)$. Il s'agit d'un fibré principal localement trivial au-dessus de M, avec comme projection canonique $\pi : F^r(M) \to M$ l'application qui à $(j^r\varphi)_0$ associe $\varphi(0)$.

Étant donné un repère $\xi = (j^r\varphi)_0$ en x, tout autre repère d'ordre r en x s'écrit $\xi \cdot g$, où $g = (j^r f)_0$ est le r-jet d'un difféomorphisme local f d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $f(0) = 0$. Par définition :

$$\xi \cdot g := (j^r(\varphi \circ f))_0.$$

L'ensemble des r-jets en 0 des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$ fixant 0 forme un groupe de Lie, noté $G^r = G^r(n, \mathbb{R})$. On a $G^1 = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. On peut montrer que G^r est un groupe algébrique réel linéaire.

L'application $F^r(M) \times G^r \to F^r(M)$ définie par $(\xi, g) \mapsto \xi \cdot g$ est une action lisse de groupe qui préserve chaque fibre de $F^r(M)$. Cette action est transitive sur chaque fibre, et $F^r(M)$ devient ainsi un fibré principal de groupe G^r.

Définition 4.1. Soit V un espace (avec une structure supplémentaire précisée selon le contexte), muni d'une action à gauche de G^r. Une **structure géométrique** sur M d'ordre r et de type V est une application $G : F^r(M) \to V$ qui satisfait la propriété d'équivariance :

$$\mathcal{G}(\xi \cdot g) = g^{-1} \cdot G(\xi).$$

Remarque 4.2. On distingue deux cas particuliers.

(1) Lorsque V est une variété lisse, on dit que G est une structure géométrique *lisse* (resp. C^r, analytique réelle, continue, mesurable, etc.) si G est une application équivariante de cette régularité.
(2) Une structure géométrique est dite de **type algébrique** (ou **A-structure**) si V est une variété algébrique réelle lisse et que l'action de G^r sur V est algébrique. Les structures usuelles de la géométrie différentielle sont en général des A-structures.

Par convention, $F^0(M) = M$ et G^0 est le groupe trivial. Une structure d'ordre 0 et de type V est donc simplement une application $G : M \to V$.

Voyons désormais les exemples fondateurs de cette notion.

4.2. **Exemples fondateurs.**

4.2.1. *L-structures.* Cet exemple est fondamental et la plupart des exemples traités dans ce document sont des sous-structures. Soit L un sous-groupe fermé de G^r, et soit $P \subset F^r(M)$ un sous-ensemble tel que la restriction de la projection π^r à P soit un fibré principal de groupe L. Chaque élément $\xi \in F^r(M)$ est naturellement associé à une classe dans G^r/L, de sorte que P définit une application équivariante $\mathcal{G} : F^r(M) \to V$, où $V = G^r/L$. On dit alors que G est une L-structure d'ordre r.

Réciproquement, si $G : F^r(M) \to G^r/L$ est une application équivariante, elle produit facilement une réduction L-invariante de $F^r(M)$, c'est-à-dire un sous-fibré principal $P \subset F^r(M)$ de groupe L tel que l'action à droite de L sur P est la restriction de l'action de G^r sur $F^r(M)$. En effet, on peut poser :

$$P := \mathcal{G}^{-1}(L),$$

où L désigne ici la classe identité dans G^r/L.

4.2.2. *Parallélisme complet.* Un parallélisme complet est défini par l'assignation, à chaque point $x \in M$, d'un repère linéaire (un isomorphisme linéaire) $\sigma(x) : \mathbb{R}^n \to T_xM$, autrement dit : une section du fibré des repères $F(M)$.

Autrement dit, un parallélisme complet peut être défini par une application équivariante

$$\mathcal{G} : F(M) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),$$

où $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ agit sur $V = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ par multiplication à gauche. La relation entre $\mathcal{G}$ et σ est donnée par :

$$\xi = \sigma(x) \cdot A \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{G}(\xi) = A^{-1}.$$

Un parallélisme complet sur M est donc une L-structure d'ordre 1, où L est le groupe trivial.

4.2.3. *Forme volume.* Par une forme volume, on entend une assignation (lisse, de classe C^r, continue, mesurable, etc.) d'une n-forme non nulle sur chaque espace tangent T_xM. Une telle structure peut être donnée par une application équivariante :

$$\mathcal{G} : F(M) \to V,$$

où V désigne l'espace des n-formes alternées non nulles sur $\mathbb{R}^n$.

Soit μ_0 la n-forme sur $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\mu_0(u_1, \ldots, u_n) = \det(u_{ij}),$$

où u_{ij} sont les composantes des vecteurs $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ dans la base canonique.

Le groupe linéaire général $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ agit transitivement sur V, et le sous-groupe isotrope de μ_0 est $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Une réduction de $F(M)$ au sous-groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire une $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$-structure) détermine une forme volume sur M, et l'application équivariante $\mathcal{G}$ définie par cette forme volume ν s'exprime ainsi : pour chaque $\xi \in F(M)_x$, $G(\xi)$ est la n-forme sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\mathcal{G}(\xi)(u_1, \ldots, u_n) = \nu(x)(\xi \cdot u_1, \ldots, \xi \cdot u_n).$$

Autrement dit, la forme volume ν est entièrement codée par l'application équivariante $\mathcal{G}$.

4.2.4. *Métrique pseudo-riemanienne.* Dans ce cas, l'espace V est l'ensemble des formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur $\mathbb{R}^n$ de signature fixée s.

L'action (transitive) de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sur V correspond à la multiplication à gauche sur l'espace homogène $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{O}(p, n-p)$, où $s = 2p - n$ est la signature, et $\mathrm{O}(p, n-p)$ est le sous-groupe isotrope de la forme bilinéaire :

$$\beta_0(u, u) := u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2.$$

(Nous identifions ici un espace homogène G-espace transitif avec l'espace quotient G/H correspondant.)

L'action de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sur V peut s'écrire explicitement :

$$g \cdot B = B(g^{-1} \cdot, g^{-1} \cdot),$$

où $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $B \in V$.

L'application $G : F(M) \to V$ correspond à l'assignation d'une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ sur chaque espace tangent T_xM, selon la formule :

$$\langle v, w \rangle_x = G(\xi)(\xi^{-1} v, \xi^{-1} w),$$

où $\xi \in F(M)_x$ est un repère au-dessus de x.

L'équivariance de G par rapport à l'action de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$G(\xi \cdot g)(\cdot, \cdot) = G(\xi)(g \cdot, g \cdot),$$

implique que la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ ne dépend pas du choix du repère ξ au-dessus de x.

Si, au lieu du groupe $\mathrm{O}(p, n-p)$, on considère le groupe $\mathrm{CO}(p, n-p)$ des transformations qui laissent β_0 invariante à un facteur scalaire près, on obtient la définition d'une **structure conforme pseudo-riemannienne**.

4.2.5. *Sous-fibré de TM.* En identifiant $\mathbb{R}^m$ au sous-espace de $\mathbb{R}^n$ formé des vecteurs dont les $n-m$ dernières composantes sont nulles, on note $\mathrm{GL}(n,m,\mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ constitué des matrices inversibles qui envoient $\mathbb{R}^m$ dans lui-même.

Le groupe $\mathrm{GL}(n,m,\mathbb{R})$ est le sous-groupe isotrope de $\mathbb{R}^m$ pour l'action transitive de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sur la variété grassmannienne V des sous-espaces de dimension m de $\mathbb{R}^n$.

Une réduction lisse de $F(M)$ au groupe $\mathrm{GL}(n,m,\mathbb{R})$ correspond à un champ lisse

$$x \mapsto D(x)$$

de sous-espaces vectoriels de dimension m dans T_xM.

L'application équivariante G associée à ce champ D envoie chaque $\xi \in F(M)$ sur le sous-espace $\xi^{-1}D(x) \subset \mathbb{R}^n$, avec $x = p(\xi)$.

Autrement dit, la donnée d'un sous-fibré $D \subset TM$ (champ de plans lisse de dimension constante) est codée par une $\mathrm{GL}(n,m,\mathbb{R})$-structure d'ordre 1.

4.3. **Structures géométriques au sens de Gromov sur les variétés stables.** Dans l'introduction, nous avons vu que tout difféomorphisme d'Anosov de $\mathbb{T}^n$ est topologiquement conjugué à un seul automorphisme linéaire du tore. Nous allons voir que lorsque f n'est pas loin de son automorphisme linéaire du tore associé, [KaGU], [Fe] et [BEFH] construisent des structures géométriques au sens de Gromov sur la variété stable de f. Ces structures sont modelés sur un espace de polynômes sous-résonnants qui généralisent le groupe du cas complexe stationnaire.

La construction générale de structures géométriques dépendant continument du point pour un difféomorphisme d'Anosov quelconque est une question ouverte.

Références

[Avez] AVEZ, A., *Anosov diffeomorphisms*, Proc. Inter. Symp. topological dynamics, Benjamin (1968), 17-51.

[BEFH] Aaron Brown, Alex Eskin, Simion Filip, Federico Rodriguez Hertz, *Normal forms for contracting dynamics, revisited*, 2024

[Bert] F. Berteloot, *Méthodes de changement d'échelles en analyse complexe*, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 2006.

[Bergeron] Nicolas Bergeron, *Géométrie Différentielle*, 2022.

[BRU] P. Boureau, *Normal forms and geometric structures on Hopf manifolds*, 2025, arXiv :2501.10346

[Fe] R. Feres*A differential-geometric view of normal forms of contractions* in Modern Dynamical Systems and Applications, Eds. : M. Brin, B. Hasselblatt, Y. Pesin, Cambridge University Press, (2004) 103-121.

[Ghys1] Etienne Ghys, *Rigidité différentiable des groupes fuchsiens*, Publications mathématiques de l'I.H.E.S, tome 78 (1993), p. 163-185

[Ghys2] Etienne Ghys, *Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsiens*, Ann. Inst. Fourier, 42 (1992), 209-247.

[GoGu] Andrey Gogolev, Misha Guysinsky. *C^1-differentiable conjugacy of Anosov diffeomorphisms on three dimensional torus.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2008, 22(12) : 183-200. doi : 10.3934/dcds.2008.22.183

[Gro] M.Gromov - *Rigid transformation groups, dans G´eom´etrie diff´erentielle*, D.Bernard et Y.Choquet-Bruhat (´editeurs), Travaux en cours 33 (1988) p.65-139.

[KaGU] M. Guysinsky and A. Katok, *Normal Forms And Invariant Geometric Structures For Dynamical Systems With Invariant Contracting Foliations*, Mathematical Research Letters, 5(1-2), 149-163.

[FlaKat] Flaminio L, Katok A. *Rigidity of symplectic Anosov diffeomorphisms on low dimensional tori.* Ergodic Theory and Dynamical Systems. 1991 ;11(3) :427-441. doi :10.1017/S0143385700006258

[L] R. de la Llave. *Smooth conjugacy and S-R-B measures for uniformly and non-uniformly hyperbolic systems.* Commun. Math. Phys., 150 (1992), 289-320.

[LMM] R. de la Llave, J.M. Marco, R. Moriy´on. *Invariants for smooth conjugacy of hyperbolic dynamical systems*, I-IV. Commun. Math. Phys., 109, 112, 116 (1987, 1988).

[StBr] G. Stuck and M.Brin *Introduction to Dynamical Systems*, 2002.