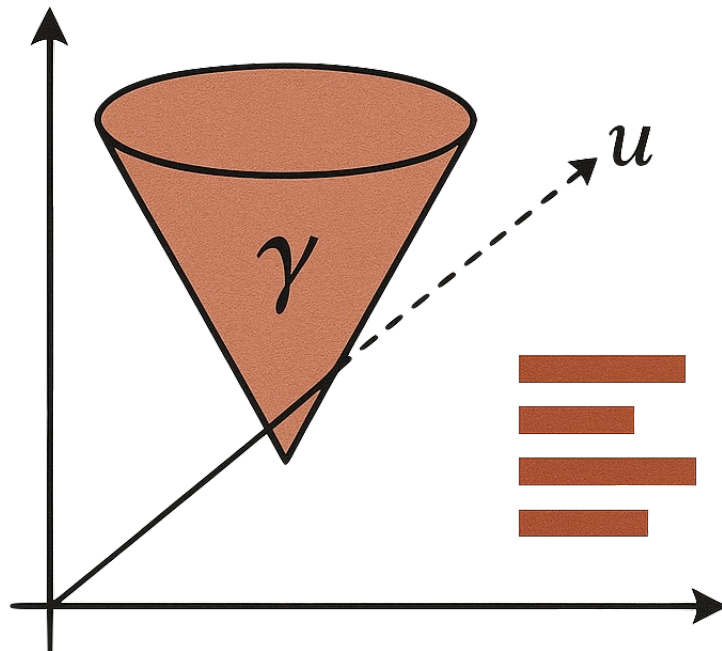


ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

INTRODUCTION À UN DOMAINE DE RECHERCHE (IDR)

FORMALISME DES SIX-FONCTEURS EN THÉORIE
DE LA PERSISTANCE

PAR
ALEX FERNANDES



Introduction

Cette *introduction à un domaine de recherche* porte sur l'utilisation de méthodes issues de la théorie microlocale des faisceaux pour l'étude des modules de persistance. Elle s'adresse aux étudiants en fin de premier cycle de master, elle suppose une certaine familiarité avec les notions classiques de topologie algébrique et d'algèbre homologique tel que contenu dans le cursus de topologie de licence de l'EPFL (dont les notes de cours peuvent être trouvées en ligne) ou bien le cours *Algebra and Topology* donné par Pierre Schapira aux étudiants de M1 de Paris VI (dont les notes de cours peuvent aussi être trouvées en ligne) et, bien évidemment, le cursus de topologie de l'École Normale Supérieure avec un stage de M1 contenant des méthodes d'algèbre homologique et idéalement ayant suivi le cours de *outils pour la géométrie algébrique*¹ d'Antoine Ducros tel que cela l'a été pour de nombreux parmi nous.

Dans de nombreuses applications génératrices de données, les caractéristiques topologiques de ces dernières peuvent représenter un objet d'intérêt sous-jacent. L'exemple d'illustration d'application en pneumologie provient d'une étude actuellement réalisée au Centre de Recherche en Epidémiologie et Statistiques (CRESS) par Álvaro Torras Casas, le docteur Amira Benattia, et cela sous la supervision de François Petit et du professeur Tazi.

Exemple 1. L'histiocytose à cellules de Langerhans est une maladie rare caractérisée par la prolifération de cellules de Langerhans, conduisant fréquemment à la formation de lésions kystiques et nodulaires au sein du parenchyme pulmonaire. L'imagerie par tomодensitométrie thoracique joue un rôle central dans le diagnostic et le suivi de l'atteinte pulmonaire, révélant des motifs spatiaux complexes d'anomalies tels que des kystes prédominant dans les lobes supérieurs et des nodules de tailles et d'épaisseurs pariétales variables. Pouvoir distinguer de petits kystes isolés de kystes larges et coalescents, ou identifier des schémas de distribution spatiale corrélant avec la progression de la maladie ou le pronostic, apporterait un éclairage précieux au clinicien. En effet, cette maladie est encore mal comprise et la disposition des symptômes observés par tomодensitométrie pourrait potentiellement fournir un outil de pronostic.

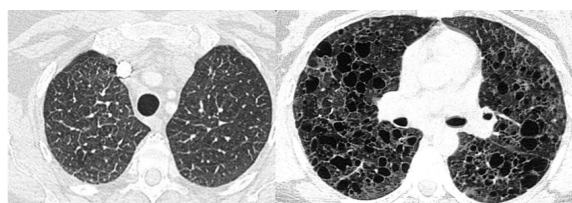


FIGURE 1 – Tomодensitométrie thoracique à haute résolution : à gauche, le patient (atteint de maladie veino-occlusive pulmonaire) ne présente pas de kystes [5] ; à droite, le patient atteint d'histiocytose à cellules de Langerhans présente de nombreux kystes [16].

1. Qui dispose de chaleureuse recommandations : sincèrement, il vaut le coup et les noeuds aux cerveaux ;).

Analyse topologique des données et persistance

La théorie de la persistance a émergé au début des années 2000, offrant un cadre algébrique pour l'analyse des caractéristiques topologiques au sein des jeux de données. Spécifiquement, elle étudie la façon dont les propriétés topologiques d'un jeu de données évoluent en fonction de l'échelle à laquelle on l'analyse. Un champs actif de la recherche en analyse topologique des données (TDA) est la persistance à n -paramètre, c'est à dire dans le cadre où ces variations d'échelle se font selon plusieurs directions.

Modules de persistance

L'évolution d'échelle en persistance est typiquement donnée par un poset (\mathcal{P}, \leq) que l'on considère comme une catégorie dont les objets sont les éléments de \mathcal{P} et pour tout x, y dans \mathcal{P} l'ensemble $\text{Hom}(x, y)$ est un singleton si $x \leq y$ et est vide autrement. Cette description permet de formuler précisément l'idée d'évolution d'un invariant le long du poset (\mathcal{P}, \leq) à l'aide d'un foncteur.

Définition 2. Un module de persistance est un foncteur de la catégorie poset (\mathcal{P}, \leq) vers la catégorie $\mathbf{Mod}(\mathbf{k})$ des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps \mathbf{k} .

En pratique de tel modules de persistance sont appelés *pointwise finite dimensional (p.f.d.)*. Ici tout les modules de persistance que nous considérons seront p.f.d. Une classe de module de persistance largement utilisé en persistance sont les modules intervalles.

Définition 3. Soit A un intervalle de (\mathcal{P}, \leq) le module intervalle \mathbf{k}^A est défini comme suit

$$\mathbf{k}^A(x) := \begin{cases} \mathbf{k} & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

où les morphismes structuraux $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}$ sont donné par l'identité.

Typiquement, on construira un module de persistance à l'aide d'un invariant topologique donné par un espace vectoriel.

Dans notre cadre d'analyse, le poset (\mathcal{P}, \leq) sera donné par $\mathcal{P} = \mathbb{R}^n$ muni de l'ordre produit. Une n -filtration $(F_t)_{t \in \mathbb{R}^n}$ d'espaces topologiques induit, via le foncteur d'homologie H_k , une famille de groupes d'homologie $(H_k(F_t))_{t \in \mathbb{R}^n}$ reliés par des morphismes linéaires $H_k(F_t) \rightarrow H_k(F_{t'})$ pour $t \leq t'$. Ainsi, l'homologie le long d'une filtration forme naturellement un module de persistance.

Exemple 4. Dans le cadre de l'histiocytose à cellules de Langerhans, la présence de kystes pulmonaires peut être considérée comme l'évolution de l'homologie le long d'un filtrage par niveaux de gris (voir Figure 1). La tomodynamométrie permet d'identifier la densité des tissus à l'aide de leur leur capacité à absorber les rayons X. En effet, les cavités changeant la densité du tissu pulmonaire elles perturbent l'homologie du poumon.

Dans le cas d'un paramètre unique, c'est-à-dire $n = 1$, la théorie est bien établie. Les modules de persistance à un paramètre peuvent être entièrement caractérisés par un invariant discret appelé *code-barre*.

Théorème 5 ([7, Thm 1.1]). *Soit M un module de persistance sur (\mathbb{R}, \leq) . Si M est p.f.d. alors il existe un unique multi-ensemble localement fini $\mathbf{B}(M)$ tel que $M \simeq \bigoplus_{I \in \mathbf{B}(M)} \mathbf{k}^I$.*

Ce resultat a été introduit par Crawley-Boevey en utilisant des techniques de théorie de représentation sur des carquois. De plus, ce *code-barre* peut être calculé de manière algorithmiquement efficace pour les modules de persistance issus d’une filtration d’un complexe simplicial. Cet algorithme, tel que mis en œuvre par exemple dans la bibliothèque C++ PHAT [2], s’appuie sur la réduction d’une matrice de bords construite à partir de la filtration.

Il existe deux notions de distances sur les modules de persistance, l’une intrinsèque à tout modules, l’autre pour les modules de 1-persistance définit à partir des codes barres. Fort heureusement, les deux coïncident lorsqu’elles sont toutes les deux définies [14].²

Multipersistance et limites

La persistance à un paramètre peut s’avérer limitante. En particulier manquer de sensibilité, notamment dans les applications dépourvues d’une fonction de filtrage simple pour les données, ou qui, selon les informations fournies par des experts, impliquent plusieurs directions de filtration.

Exemple 6. Dans le cadre de l’histiocytose à cellules de Langerhans, les kystes pulmonaires présentent une distribution prédominante au niveau des lobes supérieurs. Cette localisation pourrait constituer un facteur pronostique. Il est donc naturel de considérer les deux dimensions suivantes : l’échelle de gris et la position sur l’axe rostro-caudal (le long de la colonne vertébrale).

Bien que les modules de 1-persistance peuvent être paramétrisés par $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ à l’aide de la notion de code-barre la manipulation des modules de persistance à n paramètres s’avère plus complexe. En effet, il a été démontré que la paramétrisation des modules de n persistance est un problème *wild*. En particulier, un analogue combinatoire simple des codes barres ne peut exister [6].

Faisceaux en catégorie dérivée

Théorie des faisceaux

Afin de garantir l’accessibilité de ces notes, une introduction (trop) brève à la théorie des faisceaux est proposée. Celle-ci, bien que technique, se veut offrir une première exposition à la notion de faisceau, notamment en catégorie dérivée, ainsi qu’au formalisme des six foncteurs. Ces outils sont omniprésents dans différentes branches de la géométrie [10, 15, 12].

Alors qu’il était prisonnier de guerre à l’Oflag XVII en Autriche, Jean Leray donna un cours de topologie algébrique à l’université de captivité qu’il avait contribué à organiser. Les recherches de Leray en topologie algébrique durant sa captivité l’avaient conduit bien au-delà, et l’étude des relations entre l’homologie d’un espace fibré et celles de sa base et de sa fibre rendait nécessaires l’introduction de nouveaux outils : cohomologie à coefficients locaux variant d’un point à un autre, calcul de la cohomologie par suites d’approximations. Dans ses cours au Collège de France de 1947–48 et 1949–50, Leray partagea avec la communauté mathématique une première notion de faisceau. Pour les besoins de la géométrie algébrique, Grothendieck développa considérablement

2. L’utilisation des distances ne sera pas l’objet de ce mémoire, bien que connaître leur existence n’est pas inutile car elles sont clairement l’un des plus grand apport de la théorie de la persistance lorsqu’elle est appliquée en mathématiques fondamentales.

l'algèbre homologique et la théorie des faisceaux entre 1957 et 1965, en introduisant le concept de catégorie dérivée et le formalisme des opérations sur les faisceaux dans ce cadre.

Soit X un espace topologique la collection des ouverts $\text{Op}(X)$ est ici munie d'une structure de poset via l'inclusion.

Définition 7. Un faisceau \mathcal{F} sur X à valeurs dans les espaces vectoriels de dimensions finies est un foncteur contravariant $\mathcal{F} : \text{Op}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathbf{k})$ tel que, pour tout ouvert $U \subseteq X$ si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ est un recouvrement ouvert de U alors $\mathcal{F}(U)$ s'identifie à la limite du diagramme à deux flèches suivant :

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{F}(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Les faisceaux sur X , vus comme sous-catégorie pleine de $\text{Fun}(\text{Op}(X)^{\text{op}}, \mathbf{Mod}(\mathbf{k}))$ forment la catégorie dénotée $\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X)$.

Un module de persistance est un foncteur de codomaine une catégorie poset. Le lien entre un poset (\mathcal{P}, \leq) et faisceaux est obtenu au moyen d'une topologie associée à la structure de poset sur \mathcal{P} .

Définition 8. On définit la topologie d'Alexandrov associée à un poset (\mathcal{P}, \leq) comme la topologie sur \mathcal{P} induite par la base d'ouvert donnée par la collection des $\text{up}(x) = \{y \mid y \leq x\}$ pour tout $x \in X$.

On appellera faisceau sur (\mathcal{P}, \leq) un faisceau sur \mathcal{P} muni de la topologie d'Alexandrov. On peut formaliser qu'il suffit de définir les faisceaux sur une base d'ouvert de la topologie de son espace sous-jacent [8]. En particulier, la catégorie des faisceaux sur (\mathcal{P}, \leq) correspond exactement à celle des foncteurs $F : (\mathcal{P}, \leq)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathbf{k})$ que l'on dénotera $\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_{\mathcal{P}_\leq})$.

La condition de limite spécifiée dans la Définition 7 n'est évidemment pas toujours satisfaite.³ Il existe néanmoins un moyen d'associer à tout foncteur contravariant de $\text{Op}(X)$ un faisceau sur X . En effet, le foncteur d'inclusion $\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_{\text{Op}(X)_\subseteq}) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X)$ admet un adjoint à gauche, noté $F \mapsto F^+$.

Définition 9. Soit F un foncteur contravariant de $\text{Op}(X)$ à valeurs dans $\mathbf{Mod}(\mathbf{k})$. On appelle le faisceau sur X donné par F^+ le *faisceau associé à F* .

Un exemple standard de faisceau sur X est le *faisceau des fonctions localement constantes*. Il s'agit du faisceau associé au foncteur $U \mapsto \mathbf{k}$ noté \mathbf{k}_X . Ce faisceau jouera un rôle central dans la correspondance avec la théorie des modules de persistance, particulièrement lors de son utilisation en analyse topologique des données (la notation est, à nouveau, suggestive).

Les catégories de faisceaux sur des espaces topologiques raisonnables admettent plusieurs *opérations* permettant de manipuler aisément leur objets. Soient X et Y deux espaces topologiques que l'on supposera pour une simplicité d'exposition des variétés différentiables, et $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ deux applications continues.

3. Elle implique, par exemple, une condition sur l'espace vectoriel associé à l'ensemble vide. Le lecteur curieux pourra essayer de la dériver

Définition 10. On définit cinq opérations :

- le foncteur image inverse $g^{-1}: \mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathbf{k}_Y)$, où $g^{-1}\mathcal{F}$ est le faisceau associé au foncteur $U \mapsto \operatorname{colim}_V \mathcal{F}(V)$ où la colimite est calculée sur les voisinages ouverts V de $g(U)$;
- le foncteur image directe $f_*: \mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathbf{k}_Y)$ défini par $(f_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$;
- le foncteur image directe à support propre $f_!: \mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathbf{k}_Y)$ défini par

$$(f_!\mathcal{F})(U) = \{ s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \mid f: \bigcap_{s|_V=0} (U \setminus V) \rightarrow U \text{ est propre} \},$$

où l'intersection porte sur tous les ouverts $V \subseteq U$ tels que l'image de s par $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ s'annule ;

- le bifoncteur Hom interne $\mathcal{H}om: \mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X)^{\text{op}} \times \mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X)$ défini par⁴

$$(\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}))(U) = \operatorname{Hom}(\iota_U^{-1}\mathcal{F}, \iota_U^{-1}\mathcal{G});$$

- le bifoncteur produit tensoriel $\otimes: \mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X) \times \mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X)$, où $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ est le faisceau associé au foncteur $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{G}(U)$.

Ces opérations sont liées, en particulier, par deux adjonctions d'utilisation constante lors de la manipulation de faisceaux.

Proposition 11. Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ des faisceaux de $\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X)$ et \mathcal{F}' un faisceau de $\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_Y)$, ainsi qu'une application linéaire $f: X \rightarrow Y$. On dispose des isomorphismes naturels suivants

$$\operatorname{Hom}(f^{-1}\mathcal{F}', \mathcal{F}) \simeq \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{F}'), \quad \mathcal{H}om(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathcal{H}) \simeq \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{H})).$$

On construit maintenant un foncteur associé à un sous-ensemble $U \subseteq X$, qui sera d'usage constant dans la perspective de la théorie des faisceaux appliquée à la persistance.

Définition 12. Soit \mathcal{F} un faisceau sur X , $Z \subseteq X$ un sous-ensemble fermé et $j: Z \rightarrow X$ l'inclusion. On note alors $\mathcal{F}_Z = j_*j^{-1}\mathcal{F}$. De même, si $U \subseteq X$ est ouvert, on définit \mathcal{F}_U le faisceau défini par

$$A \mapsto \operatorname{Ker}(\mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}_{X \setminus U}(A)).$$

Plus généralement, pour tout sous-ensemble localement fermé $U \cap Z$, on pose $\mathcal{F}_{U \cap Z} = (\mathcal{F}_U)_Z$.

Soit A un sous-ensemble localement fermé de X , le faisceau $(\mathbf{k}_X)_A$ sera noté simplement \mathbf{k}_A . Cette typologie de faisceau représente une classe de modules de persistance d'intérêt majeur dans plusieurs décompositions pertinentes en analyse topologique des données (voir Théorème 21).

Catégories dérivées des faisceaux

Les constructions homologiques classiques calculent les foncteurs dérivés au moyen de résolutions et de suites spectrales, mais ces méthodes en obscurcissent souvent la functorialité naturelle et la cohérence. Passer à la catégorie dérivée revient à considérer les faisceaux directement comme objets d'une catégorie homotopique où les quasi-isomorphismes deviennent des isomorphismes, préservant

4. Le lecteur observera que la catégorie dans laquelle ces morphismes sont choisis n'a pas été rigoureusement introduite dans ce texte [13, Chapitre 2].

l'exactitude qui peut se perdre lors de réduction aux groupes de cohomologie et améliorant considérablement la transparence de nos calculs⁵. Informellement, on identifie les objets qui donnent la même cohomologie sans oublier les morphismes qui induisent cette cohomologie.

Dans cette sous-section, nous utiliserons la notation générique \mathbf{k}_X pour désigner $\mathbf{k}_{\mathcal{P} \leq}$ ou \mathbf{k}_Y , où (\mathcal{P}, \leq) est un poset et Y une variété différentiable. On note $\mathbf{K}(\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X))$ la catégorie homotopique de $\mathbf{Ch}(\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X))$ i.e. celle dont les objets sont les complexes de cochaînes et les morphismes les classes d'homotopie de morphismes de complexes.

Définition 13. Un morphisme $f: F \rightarrow G$ dans $\mathbf{Ch}(\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X))$ est appelé *quasi-isomorphisme* si les morphismes induits

$$H^n(f): H^n(F) \longrightarrow H^n(G)$$

sont des isomorphismes pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Considérer les objets à hauteur de leur cohomologie exige que ces quasi-isomorphismes deviennent des isomorphismes dans notre catégorie de travail. On note $K^b(\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X))$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{K}(\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X))$ dont les objets sont quasi-isomorphes à un complexe de cochaînes borné et Q la classe de tous les quasi-isomorphismes dans $K^b(\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X))$. La catégorie dérivée bornée de $\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X)$ est alors définie par

$$\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X) = K^b(\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X))[Q^{-1}],$$

c'est-à-dire la localisation de $K^b(\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X))$ obtenue en inversant formellement tous les morphismes de Q .⁶ Elle satisfait la propriété universelle suivante.

Proposition 14. *Tout foncteur $\Phi: K^b(\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X)) \rightarrow \mathcal{C}$ envoyant chaque quasi-isomorphisme sur un isomorphisme de \mathcal{C} se factorise de façon unique (à isomorphisme unique près) par le foncteur canonique*

$$K^b(\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_X)) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X).$$

On construit de manière analogue les catégories dérivées $\mathbf{D}^+(\mathbf{k}_X)$ et $\mathbf{D}^-(\mathbf{k}_X)$ à partir des complexes de cochaînes respectivement bornés en dessous et bornés en dessus.

Formalisme des six-foncteurs

Pour des raisons pédagogiques, l'utilisation de R et L pour désigner les foncteurs dérivés (de foncteurs non-exacts) sera systématique ici, bien qu'il ne soit pas rare de faire abstraction de ces notations. De plus, on observe que, par la suite, les objets de la catégorie dérivée des faisceaux seront également appelés faisceaux.

Les cinq opérations définies précédemment se prolongent dans le cadre dérivé. Soient X et Y deux espaces topologiques que l'on supposera pour une simplicité d'exposition des variétés différentiables, et $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ deux applications continues.

⁵. Il vaut mieux disposer d'une bonne catégorie avec de mauvais objets qu'une mauvaise catégorie avec de bons objets. A. Grothendieck

⁶. Cette construction n'est pas rigoureusement définie et soulève des problèmes de cardinalité. Voir [11] pour une construction rigoureuse de la catégorie dérivée.

Proposition 15. *Les images inverses sont exactes et les catégories de faisceaux sur espaces vectoriels satisfont aux conditions usuelles⁷, ce qui permet de définir les foncteurs dérivés suivants*

$$\begin{aligned} g^{-1} &: \mathbf{D}(\mathbf{k}_X) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{k}_Y), \\ \mathbf{R}f_* &: \mathbf{D}^+(\mathbf{k}_X) \longrightarrow \mathbf{D}^+(\mathbf{k}_Y), \\ \mathbf{R}f_! &: \mathbf{D}^+(\mathbf{k}_X) \longrightarrow \mathbf{D}^+(\mathbf{k}_Y), \\ \mathbf{R}\mathcal{H}om(-, -) &: \mathbf{D}^-(\mathbf{k}_X)^{\text{op}} \times \mathbf{D}^+(\mathbf{k}_X) \longrightarrow \mathbf{D}^+(\mathbf{k}_X), \\ - \overset{\text{L}}{\otimes} - &: \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X) \times \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X). \end{aligned}$$

De plus, pour tout localement fermé $Z \subseteq X$, les foncteurs $-_Z$ de la définition 12 sont exacts et se prolongent dans le cadre des catégories dérivées.

Dans le cadre dérivé, ces opérations révèlent toute leur utilité, car les interactions entre opérations se transposent du cas abélien au cas dérivé et font apparaître de nouveaux phénomènes (voir [13, Chapitre II/III]). Par exemple, les adjonctions de la proposition 11 se prolongent de la manière suivante.

Proposition 16. *Soient \mathcal{F} et \mathcal{H} des faisceaux dans $\mathbf{D}^-(\mathbf{k}_X)$ et \mathcal{G} un faisceau dans $\mathbf{D}^+(\mathbf{k}_X)$. On dispose de l'isomorphisme suivant :*

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{F} \overset{\text{L}}{\otimes} \mathcal{H}, \mathcal{G}) \simeq \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{H}, \mathcal{G})).$$

De plus, on a l'adjonction $f^{-1} \vdash \mathbf{R}f_*$.

Un phénomène inhérent au cadre dérivé est l'existence d'un adjoint à droite du foncteur $\mathbf{R}f_!$ noté $f^!$. La collection des opérations suivantes : image directe, image inverse, image directe à support propre, image inverse à support propre, Hom interne et produit tensoriel muni des trois adjonctions précédemment décrite est appelée le *formalisme des six-foncteurs* ou bien les *six opérations de Grothendieck*. Celui-ci donne un formalisme général permettant de définir de nombreux résultats maintenant considérés comme standards sur la cohomologie : un exemple est la dualité de Verdier.

Proposition 17 ([13, Prop 3.1.10]). *Si $f_!$ est de dimension cohomologique finie alors pour \mathcal{F} dans $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_Y)$ et \mathcal{G} dans $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_X)$*

$$\mathbf{R}\text{Hom}(\mathbf{R}f_!\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathbf{R}\text{Hom}(\mathcal{G}, f^!\mathcal{F}), \quad \mathbf{R}f_*\mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathbf{R}f_!\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{G}, f^!\mathcal{F}).$$

Module de persistance et faisceaux

L'étude des modules de persistance à paramètres multiples s'inscrit dans le formalisme de la théorie microlocale des faisceaux, telle qu'initée par Masaki Kashiwara et Pierre Schapira [12]. L'utilisation de ce formalisme permet notamment d'utiliser pleinement les six opérations. Celle là permettent, par exemple, de fournir une solution partielle au problème de la multi-persistance.

7. Voir [13, Chapitre II] pour une description plus précise des hypothèses

Correspondance

Lorsque \mathbf{V} est muni d'un ordre partiel \leq induit par un cône γ , il est possible de faire correspondre les modules de persistance sur (\mathbf{V}, \leq) avec une classe de faisceaux sur \mathbf{V} satisfaisant une condition géométrique induite par γ . Suivant [12] nous dénoterons l'antipode $A^a = -A$ pour tout sous-ensemble $A \subset \mathbf{V}$. De même, $\text{int}(A)$ et $\text{cl}(A)$ désigneront respectivement l'intérieur et l'adhérence de A pour la topologie euclidienne.

Soit γ un cône, c'est-à-dire un sous-ensemble non vide de \mathbf{V} invariant par homothéties de rapport non négatif. On définit son *cône polaire* par

$$\gamma^\circ := \{\eta \in \text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{k}) \mid \forall c \in \gamma, \eta(c) \geq 0\}.$$

On supposera γ fermé, convexe, pointé (i.e. $\gamma^a \cap \gamma = \{0\}$) et d'intérieur non vide. Le choix de γ induit un ordre partiel sur $\mathbf{V} : x \leq_\gamma y$ si et seulement si $x + \gamma \subseteq y + \gamma$.

Observons que $(\mathbf{V}, \leq_\gamma)^{\text{op}}$ est équivalente à \mathbf{V} muni de l'ordre opposé \leq_γ^{op} , ce qui fournit l'équivalence suivante entre modules de persistance et faisceaux sur un poset approprié :

$$\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_{\mathbf{V}_{\leq_\gamma}}) \simeq \text{Fun}((\mathbf{V}, \leq_\gamma^{\text{op}}), \mathbf{Mod}(\mathbf{k})).$$

En particulier, lorsque que l'on part des applications, on peut choisir γ de façon à obtenir le module de persistance recherché.

Exemple 18. Pour $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$ et $\gamma = [0, +\infty)^n$, l'ordre \leq_γ^{op} coïncide avec l'ordre produit sur \mathbb{R}^n . La catégorie $\text{Fun}((\mathbb{R}^n, \leq_\gamma^{\text{op}}), \mathbf{Mod}(\mathbf{k}))$ est alors la catégorie usuelle des modules de persistance sur \mathbb{R}^n muni de l'ordre produit.

Bien que cette construction fournisse une catégorie de faisceaux, elle relève davantage d'un changement de terminologie que d'un véritable lien avec les catégories classiquement étudiées. En particulier, le formalisme des six foncteurs n'y a pas été spécialement développé.

Kashiwara, Schapira, Berkouk et Petit, dans [12, 3], établissent une correspondance avec $\mathbf{D}_{\gamma^\circ, a}^b(\mathbf{k}_{\mathbf{V}})$, c'est-à-dire la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{\mathbf{V}})$ constituée des faisceaux satisfaisant une condition microlocale : leur microsupport⁸ est contenu dans $\mathbf{V} \times \gamma^{\circ, a}$. Cette correspondance fait appel à une généralisation de la notion de fonction continue, dite *morphisme de sites*, pour laquelle l'évaluation point par point n'est pas immédiate⁹. Nous représenterons ici ce *morphisme de sites* $\Psi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_{\leq_\gamma}$ par un foncteur $\Psi^t : (\mathbf{V}, \leq_\gamma) \rightarrow \text{Op}(\mathbf{V})$ induisant une adjonction $\Psi^{-1} \vdash \mathbf{R}\Psi_*$. Les notations suggèrent le comportement de $(\Psi^{-1}, \mathbf{R}\Psi_*)$, sans toutefois formaliser cette idée.

Théorème 19. *Il existe un foncteur $\Psi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_{\leq_\gamma}$ induisant un couple de foncteurs pleinement fidèles donnés par*

$$\Psi^{-1} : \mathbf{D}(\mathbf{k}_{\mathbf{V}_{\leq_\gamma}}) \xrightleftharpoons{\quad} \mathbf{D}_{\gamma^\circ, a}^b(\mathbf{k}_{\mathbf{V}}) : \mathbf{R}\Psi_*.$$

tels que $\Psi_ \circ \Psi^{-1} = \text{id}$ et qu'on dispose d'une adjonction $\Psi^{-1} \vdash \mathbf{R}\Psi_*$.*

8. La notion de microsupport ne sera pas décrite ici, car elle n'est ni utilisée ni nécessaire à la compréhension de ce rapport. Le lecteur curieux pourra se référer à [13, Chapitre 5].

9. Le lecteur courageux, ou plutôt intrépide, pourra consulter [11, Chapitre 17].

Il est naturel de s'interroger sur la surjectivité essentielle de ces foncteurs, or ce n'est malheureusement pas le cas : ils n'établissent pas une équivalence de catégories. Cependant, nous avons une bonne compréhension de l'information qui se perd à travers cette correspondance. En effet, l'échec de la correspondance du théorème 19 à définir une équivalence de catégories peut s'interpréter à travers la distance sur les modules de persistance. Dans [3, Thm. 3.6], les auteurs montrent que deux modules de persistance non isomorphes sont envoyés sur des faisceaux isomorphes si et seulement si leur distance est nulle¹⁰.

Quelques résultats

Lorsqu'un module de persistance admet une représentation convenable, on peut calculer explicitement le faisceau qui lui correspond. Par exemple, considérons les modules de persistance à n paramètres s'écrivant comme somme directe de modules \mathbf{k}^A où A est un intervalle du poset $(\mathbf{V}, \leq_\gamma)$. Ils sont omniprésents dans les applications car ils disposent d'une combinatoire favorable au traitement informatique.

Le résultat suivant permet de décrire explicitement leur analogue faisceautique : il se démontre par des manipulations standard d'opérations sur les faisceaux dans le cadre dérivé.

Proposition 20. *Soit $A \subseteq \mathbf{V}$ tel que $A = \Omega \cap F$, avec $\Omega + \gamma = \Omega$ et $(\mathbf{V} \setminus F) + \gamma = \mathbf{V} \setminus F^{11}$, et supposons A un intervalle pour \leq_γ . Dans ce cadre, on a $\Psi^{-1}\mathbf{k}^A \simeq \mathbf{k}_{\text{int}(\Omega) \cap \text{cl}(F)}$.*

Un exemple d'application de tels résultats est la notion de *barcode* pour les faisceaux sur \mathbb{R} , qui existe dans deux contextes : les faisceaux satisfaisant une condition de finitude appelés faisceaux \mathbb{R} -constructibles¹² et les faisceaux issus d'un module de persistance p.f.d.

Théorème 21 ([12, Thm. 1.17], [9, Cor. 4.7]). *Pour tout faisceau \mathcal{F} dans $\mathbf{Mod}(\mathbf{k}_{\mathbb{R}})$, si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

1. \mathcal{F} est \mathbb{R} -constructible ;
2. il existe un module de persistance M p.f.d. tel que $\mathcal{F} \simeq \Psi^{-1}M$,
alors il existe un unique multi-ensemble localement fini $\mathbf{B}(\mathcal{F})$ d'intervalles de \mathbb{R} tel que

$$\mathcal{F} \simeq \bigoplus_{I \in \mathbf{B}(\mathcal{F})} \mathbf{k}_I.$$

De plus, si \mathcal{F} vérifie les deux conditions, alors les deux invariants $\mathbf{B}(\mathcal{F})$ coïncident.

Démonstration. (1.) Voir [12, Thm. 1.17].

(2.) Suit de la proposition 20, compte tenu de l'exactitude de Ψ^{-1} . □

Définition 22. Soit \mathcal{F} satisfaisant l'une des deux hypothèses du théorème 21. Le multi-ensemble $\mathbf{B}(\mathcal{F})$ est appelé la *code-barre de \mathcal{F}* . On définit la *code-barre observable* d'un module de 1-persistance M p.f.d. noté $\bar{\mathbf{B}}(M)$, comme étant le code-barre de $\Psi^{-1}M$.

La notion de code-barre se prolonge dans le cadre dérivé, à l'aide d'un argument d'algèbre homologique calculant les Ext modules, comme suit.

¹⁰. Cet énoncé se précise à l'aide d'un analogue de la distance des modules de persistance pour les faisceaux et de la notion de quotient de Serre de catégories abéliennes.

¹¹. Cette condition technique rend A un sous-ensemble localement fermé pour la topologie d'Alexandrov.

¹². Voir [13, Chapitre VIII] pour une description (étendue) de la \mathbb{R} -constructibilité.

Proposition 23. Soit \mathcal{F} un faisceau de $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{\mathbb{R}})$ tel que chacun de ses groupes de cohomologie soit \mathbb{R} -constructible. Alors

$$\mathcal{F} \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}^i(\mathcal{F})[-i].$$

En particulier, cela permet de définir un *code-barre gradué* dans la catégorie dérivée.

Définition 24. Pour $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{\mathbb{R}})$ vérifiant les conditions précédentes, on appelle *code-barre gradué* de \mathcal{F} la collection $\{\mathbf{B}(\mathbf{H}^j(\mathcal{F}))\}_{j \in \mathbb{Z}}$, notée $\mathbf{B}(\mathcal{F})$. C'est un invariant discret et complet de la classe d'isomorphisme de \mathcal{F} .

Dans le cadre des modules de persistance dérivés à cohomologie p.f.d., prenons par exemple M dans $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{\mathbb{R}_{\leq}})$, on définit le *code-barre observable gradué* comme la collection $\{\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{H}^k(M))\}_{k \in \mathbb{Z}}$ que l'on notera $\overline{\mathbf{B}}(M)$.

Application : calcul du code-barre projeté

Le formalisme des six opérations de Grothendieck, permet d'introduire de nouveaux invariants sur les modules de persistance et de démontrer leur propriétés de stabilité. Dans ce cadre, la correspondance du théorème 19 permet de conserver la compatibilité avec les méthodes computationnelles de l'analyse topologique des données. On décrira ici un exemple de cette philosophie : le *code-barre projeté*.

Le code-barre projeté gamma-linéaire, introduit par Berkouk et Petit dans [4, Section 5], est un invariant permettant d'étudier les modules de multi-persistance. Il est obtenu via l'application de l'image directe dérivée le long d'une forme linéaire $u \in \text{int}(\gamma^\circ)$, unitaire pour la norme d'opérateur i.e. $u \in \mathbf{S}^*$.

$$\mathcal{P}^\gamma : \text{int}(\gamma^\circ) \cap \mathbf{S}^* \times \mathbf{D}_{\mathbb{R}c, \gamma^\circ, a}^b(\mathbf{k}_{\mathbf{V}}) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathbb{R}c, [0, +\infty)^\circ, a}^b(\mathbf{k}_{\mathbb{R}}) \quad (u, \mathcal{F}) \mapsto \text{Ru}_* \mathcal{F}.$$

En particulier, une fois projetés, les modules de persistance sont 1-dimensionnels et peuvent donc être étudiés par leur code-barre gradué. De plus, il existe des situations où le code-barre projeté est particulièrement simple à calculer algorithmiquement.

Exemple 25. Lorsque les modules de persistance sont générés par les sous-niveaux d'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, la projection via une forme linéaire u correspond simplement à l'analyse en 1-persistance des sous-niveaux de la fonction composée $u \circ f$, ce qui permet l'utilisation des algorithmes standardisés tels que ceux implémentés dans PHAT.

Dans les cas plus complexes, l'une des méthodes standard pour traiter les modules de multi-persistance est l'utilisation de résolutions par des modules plus simples comme peuvent être les modules libres.

Définition 26. Un module de persistance M sur (\mathcal{P}, \leq) est dit *libre* s'il admet une décomposition en modules intervalles donnés par des éléments de la base de la topologie d'Alexandrov

$$M \simeq \bigoplus_{b \in B} \mathbf{k}_{\text{up}(b)}.$$

où B est un muti-ensemble dont les éléments sont appelés les générateurs.

Définition 27. Une *résolution libre* d'un module de persistance M est un complexe de cochaînes borné L de modules libres, concentré en degrés négatifs, muni d'un morphisme d'augmentation $\epsilon : L^0 \rightarrow M$ tel que

$$\cdots \longrightarrow L^{-2} \longrightarrow L^{-1} \longrightarrow L^0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

est une suite longue exacte.

Les résolutions libres facilitent le calcul effectif des invariants associés, notamment lors d'utilisation de méthodes computationnelles car elles peuvent être traitées de manière combinatoire au travers des générateurs. En particulier, elle font le lien entre certains modules de multi-persistance et des problèmes d'algèbre linéaire (en dimension finie) et donc de calcul matriciel.

Utilisant la correspondance du Théoreme 19 et à l'aide de la Proposition 20, on peut définir l'analogie des résolutions libres en théorie des faisceaux : les complexes coniques. Ce sont des complexes de faisceaux (γ -complexes ou bien $\text{int}(\gamma)$ -complexes) dont les termes sont des sommes directes finies de faisceaux élémentaires de la forme $\mathbf{k}_{b+\gamma}$ ou $\mathbf{k}_{b+\text{int}(\gamma)}$ avec $b \in \mathbf{V}$.

Définition 28. Un γ -*complexe* \mathcal{L} (resp. $\text{int}(\gamma)$ -*complexe* \mathcal{U}) est défini comme un objet de $\mathbf{Ch}^+(\mathbf{k}_{\mathbf{V}})$ (resp. $\mathbf{Ch}^-(\mathbf{k}_{\mathbf{V}})$) de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \quad 0 &\longrightarrow \bigoplus_{j_0 \in J_0} \mathbf{k}_{j_0+\gamma} \longrightarrow \bigoplus_{j_1 \in J_1} \mathbf{k}_{j_1+\gamma} \longrightarrow \bigoplus_{j_2 \in J_2} \mathbf{k}_{j_2+\gamma} \longrightarrow \cdots, \\ \mathcal{U} : \quad \cdots &\longrightarrow \bigoplus_{j_2 \in J_2} \mathbf{k}_{j_2+\text{int}(\gamma)} \longrightarrow \bigoplus_{j_1 \in J_1} \mathbf{k}_{j_1+\text{int}(\gamma)} \longrightarrow \bigoplus_{j_0 \in J_0} \mathbf{k}_{j_0+\text{int}(\gamma)} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

où les J_i sont des multi-ensembles de \mathbf{V} . Les éléments du multi-ensemble $J = \bigcup_{i=0}^{+\infty} J_i$ sont appelés *générateurs*.

Cette transformation rend la perspective de la théorie microlocale des faisceaux sur la théorie de la persistance compatible avec les algorithmes de l'analyse topologique des données tel que ceux utilisant des réductions matricielles [9], permettant ainsi le calcul effectif des invariants issus des perspectives faisceautiques.

Par exemple, si $u \in \text{int}(\gamma)^\circ$ est unitaire pour la norme d'opérateur alors le code-barre projeté envoie des complexes coniques sur des complexes coniques.

Théorème 29. Soient \mathcal{L} et \mathcal{U} deux complexes coniques bornés aux multi-ensembles de générateurs finis, plus précisément :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \quad 0 &\longrightarrow \bigoplus_{j_0 \in J_0} \mathbf{k}_{j_0+\gamma} \longrightarrow \bigoplus_{j_1 \in J_1} \mathbf{k}_{j_1+\gamma} \longrightarrow \bigoplus_{j_2 \in J_2} \mathbf{k}_{j_2+\gamma} \longrightarrow \cdots, \\ \mathcal{U} : \quad \cdots &\longrightarrow \bigoplus_{j_2 \in J_2} \mathbf{k}_{j_2+\text{int}(\gamma)} \longrightarrow \bigoplus_{j_1 \in J_1} \mathbf{k}_{j_1+\text{int}(\gamma)} \longrightarrow \bigoplus_{j_0 \in J_0} \mathbf{k}_{j_0+\text{int}(\gamma)} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Alors, dans $\mathbf{D}^b(\mathbf{k}_{\mathbf{V}})$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Ru}_* \mathcal{L} : \quad 0 &\longrightarrow \bigoplus_{j_0 \in J_0} \mathbf{k}_{[u(j_0), +\infty)} \longrightarrow \bigoplus_{j_1 \in J_1} \mathbf{k}_{[u(j_1), +\infty)} \longrightarrow \bigoplus_{j_2 \in J_2} \mathbf{k}_{[u(j_2), +\infty)} \longrightarrow \cdots, \\ \text{Ru}_* \mathcal{U} : \quad \cdots &\longrightarrow \underbrace{\bigoplus_{j_2 \in J_2} \mathbf{k}_{(u(j_2), +\infty)}}_{-n-1} \longrightarrow \underbrace{\bigoplus_{j_1 \in J_1} \mathbf{k}_{(u(j_1), +\infty)}}_{-n} \longrightarrow \underbrace{\bigoplus_{j_0 \in J_0} \mathbf{k}_{(u(j_0), +\infty)}}_{-n+1} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

La dualité précise entre code-barre projeté dans le cadre de la théorie microlocale des faisceaux et l'utilisation d'algorithmes d'analyse topologique des données et de géométrie algorithmique sont décrites dans [9].

Conclusion

La théorie microlocale des faisceaux fournit un cadre unificateur pour l'étude des modules de multi-persistence. De plus, grâce à la correspondance initiée par Kashiwara–Schapira, puis approfondie par Berkouk–Petit, nous disposons d'un formalisme permettant de passer efficacement de modules de multi-persistence vers des faisceaux en catégorie dérivée et inversement. Ce cadre autorise pleinement l'emploi du formalisme des six foncteurs, ce qui facilite la définition et l'étude d'invariants nouveaux, tels que le code-barre projeté gamma-linéaire tout en permettant de garantir leur calculabilité algorithmique.

Le code-barre projeté, en particulier, illustre clairement l'intérêt pratique de cette approche en permettant de transformer des problèmes de multi-persistence qui sont complexes à décrire combinatoirement en des calculs effectifs en persistence unidimensionnelle, exploitant ainsi les algorithmes construits par la communauté d'analyse topologique des données.

Fort heureusement, cette approche met en lumière des questions nouvelles. En particulier, la dualité de Verdier, bien connue en théorie des faisceaux plus classique et établie pour certaines classes spécifiques d'espaces tels que les ensembles partiellement ordonnés sous certaines conditions [1] ou les espaces localement compacts de Hausdorff, reste à démontrer dans le contexte précis des modules de persistence sur (\mathbb{R}^n, \leq) tel que traité ici.

Une version dite *covariante* de cette dualité, telle que proposée par Jacob Lurie dans Higher Algebra [15, Théorème 5.5.5.4], l'établit comme une équivalence entre faisceaux et cofaisceaux. De notre point de vue, une telle dualité de Verdier covariante est suggérée par l'interprétation de la persistence en théorie microlocale des faisceaux. Cette question représente une direction potentielle de futures recherches.

Références

- [1] Ko AOKI. « Posets for which Verdier duality holds ». In : *Selecta Mathematica* 29.5 (2023), p. 78. URL : <https://link.springer.com/article/10.1007/s00029-023-00887-2>.
- [2] Ulrich BAUER et al. « Phat – persistent homology algorithms toolbox ». In : *Journal of Symbolic Computation* 78 (2017), p. 76-90.
- [3] Nicolas BERKOUK et François PETIT. « Ephemeral persistence modules and distance comparison ». In : *Algebraic & Geometric Topology* 21.1 (2021), p. 247-277.
- [4] Nicolas BERKOUK et François PETIT. *Projected distances for multi-parameter persistence modules*. Fév. 2023. URL : <https://arxiv.org/abs/2206.08818>.
- [5] Athénaïs BOUCLY et al. « La maladie veino-occlusive pulmonaire ». In : *Revue des Maladies Respiratoires* 35 (mars 2018). DOI : 10.1016/j.rmr.2017.11.005.
- [6] Gunnar CARLSSON et Afra ZOMORODIAN. « The theory of multidimensional persistence ». In : *Discrete & Computational Geometry* 42.1 (2007), p. 71-93.

- [7] William CRAWLEY-BOEVEY. « Decomposition of pointwise finite-dimensional persistence modules ». In : *Journal of Algebra and Its Applications* 14.05 (2015), p. 1550066. DOI : 10.1142/S0219498815500668.
- [8] David EISENBUD et Joe HARRIS. *Geometry of Schemes*. T. 197. Graduate Texts in Mathematics. New York : Springer-Verlag, 2000.
- [9] Alex FERNANDES, Steve OUDOT et François PETIT. « Computation of gamma-linear projected barcodes for multiparameter persistence ». In : *Journal of Applied and Computational Topology* 9.12 (2025).
- [10] Alexander GROTHENDIECK et Jean DIEUDONNÉ. *Éléments de géométrie algébrique*. T. 4–32. Publ. Math. IHÉS. Bures-sur-Yvette, France : Institut des Hautes Études Scientifiques, 1960.
- [11] Masaki KASHIWARA et Pierre SCHAPIRA. *Categories and sheaves*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [12] Masaki KASHIWARA et Pierre SCHAPIRA. « Persistent homology and microlocal sheaf theory ». In : *Journal of Applied and Computational Topology* 2.1-2 (2018), p. 83-113.
- [13] Masaki KASHIWARA et Pierre SCHAPIRA. *Sheaves on manifolds*. Springer, 1990.
- [14] Michael LESNICK. « The theory of the interleaving distance on multidimensional persistence modules ». In : *Foundations of Computational Mathematics* 15.3 (2015), p. 613-650.
- [15] Jacob LURIE. *Higher Algebra*. Manuscript, available at <http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf>. 2017.
- [16] A TAZI. « Histiocytose langerhansienne pulmonaire de l'adulte ». In : *EMC - Pneumologie* 1.1 (2004), p. 19-36. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1762422303000035>.