Sous-groupes discrets des groupes de Lie

Ferdinand Jacobé de Naurois

22 mai 2025

Table des matières

1 Introduction

Cette courte note a vocation à introduire un public relativement averti au domaine de recherche qu'est celui des sous-groupes discrets des groupes de Lie. Le parti pris dans ce texte sera de dégager dans un premier temps la notion cruciale de réseau, avant de mettre en opposition le cas du rang 1 avec celui des groupes de Lie simples de rang supérieur, c'est à dire de rang réel supérieur ou égal à 2. Pour ce faire, nous nous pencherons dans un premier temps sur la classification des réseaux de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, ou plutôt de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, avant d'énoncer et expliquer quelques résultats de rigidité et d'arithméticité propres au rang supérieur et de mettre en évidence la non conformation de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ à ces énoncés.
Le ton employé sera relativement informel en comparaison avec les standards usuels de rédaction mathématique.

1.1 Généralités

Considérons un groupe de Lie G. Le première image mentale à s'en faire est celle d'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Une question à première vue extrêmement vague mais extrêmement fructeuse est la suivante : quels sont les sous-groupes discrets de G ? Et réciproquement, quels groupes peuvent apparaitre comme sous-groupes discrets de groupes de Lie ? Ici, par sous-groupe discret de G, on entend un sous-groupe fermé dont tous les points sont isolés dans G.
Évidemment, la théorie des représentations des groupes finis nous assure que tous les groupes finis apparaissent comme sous-groupes de groupes de Lie. Au contraire, un groupe indénombrable ne peut pas apparaître comme sous-groupe discret d'un groupe de Lie.

Pour ce qui est des groupes infinis dénombrables, la réponse est moins claire. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors les groupes $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \cdots, \mathbb{Z}^n$ apparaissent clairement comme sous-groupes discrets de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En revanche, $\mathbb{Z}^{n+1}$ n'est pas un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: sinon, la proposition 3.4 assurerait l'existence d'une sous-algèbre de Lie abélienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n+1$, ce qui n'est pas.
En poussant cette idée un peu plus loin, on constate qu'on peut alors construire un groupe dénombrable qui n'est pas sous-groupe discret d'un groupe de Lie. Posons $\Gamma = \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ le groupe des suites d'entiers nulles à partir d'un certain rang. Supposons par l'absurde que Γ est sous-groupe discret d'un groupe de Lie. Alors, il existe un entier n tel que Γ soit un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathbb{Z}^{n+1}$ est un sous-groupe de Γ, on obtient alors que $\mathbb{Z}^{n+1}$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, ce qui est absurde.

Le groupe $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ n'étant pas de type fini, contrairement à tous ceux évoqués précédemment, on pourrait s'attendre à ce que ce soit cette caractérstique qui l'empêche de s'injecter discrètement dans un groupe de Lie. Il n'en est rien : un argument de Ping-Pong permet de construire par exemple dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe libre de rang 2, qui lui-même contient un sous-groupe libre sur une infinité de générateurs. En revanche, en rigidifiant un peu la structure cherchée, on arrive à un résultat de ce type : voir à ce sujet le théorème 1.1 ci-dessous.

Cette rigidification de structure passe par la notion de réseau, qui doit être compris comme étant à un groupe de Lie G ce que $\mathbb{Z}^n$ est à $\mathbb{R}^n$.

1.2 Réseaux versus sous-groupes discrets

Commençons par donner une première définition d'un réseau. On considère à cet effet un groupe de Lie unimodulaire G, et Γ un sous-groupe discret de G. Il est bien connu que l'esace quotient G/Γ peut être muni d'une mesure régulière (unique à renormalisation près) qui est invariante par l'action de G à gauche. On dira que Γ est un réseau dans G si et seulement si cette mesure est de masse totale finie. Plus généralement, même si G n'est pas unimodulaire, on dire que Γ est un réseau dans G si G/Γ admet une mesure de probabilité régulière invariante sous l'action de G.
Évidemment, si le quotient G/Γ est compact alors Γ est bien un réseau dans G : on dit

dans ce cas qu'il s'agit d'un réseau "uniforme". C'est par exemple le cas pour l'inclusion $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$. En revanche, il peut arriver que G/Γ soit de masse totale finie sans pour autant être compact. Un exemple de ce phénomène est donné par l'inclusion $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

On peut donc naturellement être tentés de classifier les réseaux d'un groupe de Lie G donné, faute de pouvoir classifier tous ses sous-groupes discrets. À ce sujet, on peut commencer par effectuer la remarque suivante. Si G est un groupe de Lie et Γ un réseau de G, et si φ est un automorphisme de G, alors $\varphi(\Gamma)$ est également un réseau : on dit qu'il s'agit d'un réseau équivalent à Γ. L'espace R_G des réseaux à équivalence près est celui que nous allons tâcher d'élucider. Par exemple, quelques instants de réflexions convaincront le lecteur que $R_{\mathbb{R}^n}$ est un singleton.

Voyant les réseaux non plus comme des points dans l'espace R_G mais comme des groupes, on peut aussi tâcher d'élucider leur structure interne, qui va s'avérer nettement plus rigide que celle des sous-groupes discrets quelconques. Le théorème suivant donne un exemple de ce paradigme, et contraste avec la possibilité de construire des sous-groupes discrets libres sur une infinité de générateurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.

Théorème 1.1. *Tout réseau d'un groupe de Lie connexe est de type fini.*

Ce fait hautement non trivial dont on pourra trouver une preuve dans [6] est à rapprocher du notable lemme de Schreier, qui affirme qu'un sous-groupe d'indice fini d'un groupe finiment présenté est finiment présenté : ici, c'est l'hypthèse "réseau" qui remplace l'hypothèse d'indice fini.
Il est également à noter que ceci est faux pour un sous-groupe discret quelconque : dès lors que le groupe de Lie contient un groupe libre discret, il contient automatiquement des sous-groupes discrets qui ne sont même pas finiment engendrés.

1.3 Sous-groupes arithmétiques

Dans cette section, nous allons nous pencher sur une manière très fructueuse de construire des sous-groupes d'indice fini dans un groupe de Lie. Considérons un groupe de Lie réel simple G. Il est bien connu que G peut alors être vu comme un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$, c'est à dire essentiellement un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ défini par des équations polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Q}$. On peut alors considérer $G_{\mathbb{Z}}$, le sous-groupe de G formé des points entiers de G. Dans le cas de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ par exemple, on obtient de cette façon $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.
Le lecteur ne sera pas surpris de constater que $G_{\mathbb{Z}}$ est toujours un sous-groupe discret de G. De plus, ce group $G_{\mathbb{Z}}$ est en un certain sens maximal dans G : il semble s'étendre dans toutes les directions, à moins que des conditions arithmétiques improbables sur les équations polynomiales définissant G viennent empêcher l'apparition de points entiers dans certaines direction. Le fait miraculeux est que cette intuition est vérifiée : on obtient bien de cette façon des réseaux de G.

Théorème 1.2 (Borel-Harish-Chandra)**.** *$G_{\mathbb{Z}}$ est un réseau de G.*

Cette méthode permet en fait d'obtenir bien plus qu'un seul réseau dans G. En effet, tous les sous-groupes d'indices finis d'un réseau étant également des réseaux et réciproquement. La définition suivante associée au fait que $G_{\mathbb{Z}}$ est un réseau dans G fournit donc de nombreux autres réseaux : tous les sous-groupes discrets commensurables à $G_{\mathbb{Z}}$.

Definition 1.3. Soient Γ_1, Γ_2 deux sous-groupes d'un groupe G. On dit que Γ_1 et Γ_2 sont commensurables si et seulement si $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ est d'indice fini dans Γ_1 et Γ_2.

Si Γ_1 et Γ_2 sont commensurables dans G, il est aisé de se convaincre que le premier est un réseau si et seulement si c'est le cas du second. Ainsi, on obtient comme nouveaux réseaux tous les groupes commensurables à $G_{\mathbb{Z}}$. Par ailleurs, étant donnée une représentation $\pi : G \to H$ où H est un autre groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$, on peut considérer également $\pi^{-1}(H_{\mathbb{Z}})$ qui sera naturellement un réseau de G, ainsi que tous les sous-groupes qui lui sont commensurables. On obtient ainsi de nombreux réseaux de G. Les réseaux obtenus par ce processus sont appelés réseaux arithmétiques.
Nous verrons plus tard qu'en rang supérieur, il s'agit essentiellement de la seule manière d'obtenir des réseaux, tandis que ceci est complètement faux pour les groupes de rang 1 dont le premier exemple est $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

2 Sous-groupes discrets de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

Nous allons donc tâcher de nous faire une idée de la zoologie des sous-groupes discrets, ou au moins des réseaux de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Pour cela, commençons par remarquer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ admet un quotient par un sous-groupe d'ordre 2, à savoir $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Les réseaux de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ se tirent donc en arrière en des réseaux de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ par la projection canonique, et réciproquement. On peut donc sans dommage s'intéresser plutôt à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, qui a le bon goût d'être le groupe des isométries du demi-plan hyperbolique de Poincarré, noté $\mathbb{H}$.

2.1 Groupes fuchsiens et surfaces

Definition 2.1. Les sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sont appelés les groupes fuchsiens.

On a alors le résultat fondamental suivant, qui caractérise les sous-groupes fuchsiens de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. On en trouvera une preuve dans [4].

Proposition 2.2. *Soit Γ un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$. Alors, Γ est fuchsien si et seulement si il agit proprement discontinûment sur $\mathbb{H}$.*

Cette remarque permet d'associer à un groupe fuchsien Γ la surface quotient $\mathbb{H}/\Gamma$ qui hérite (presque : quelques complications peuvent arriver lorsque le réseau agit avec des points fixes, auquel cas la notion d'orbifold est nécessaire) d'une structure de surface hyperbolique. Cette surface sera d'aire finie dès lors que Γ est un réseau dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Elle sera compacte si le réseau est uniforme. Toute surface hyperbolique compacte étant un quotient de $\mathbb{H}$, on en déduit une myriade de réseaux uniformes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

La question qui se pose maintenant est de déterminer lesquels sont, ou non, équivalents. On cherche donc quels réseaux sont conjugués sous l'action de $\mathrm{PSL}_2^{\pm}(\mathbb{R}) = \mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$. Soient donc deux tels réseaux Γ_1 et Γ_2. Par simplicité, supposons que $\mathbb{H}/\Gamma_1$ et $\mathbb{H}/\Gamma_2$ soient

bien des surfaces hyperboliques. Les surfaces hyperboliques correspondantes $\mathbb{H}/\Gamma_1$ et $\mathbb{H}/\Gamma_2$ sont isométriques.
La réciproque est en fait également vérifiée. Supposons en effet qu'on dispose d'une isométrie $\varphi : \mathbb{H}/\Gamma_1 \to \mathbb{H}/\Gamma_2$. Comme $\mathbb{H}$ est le revêtement universel de ces deux surfaces, cette isométrie se relève en une isométrie locale $\tilde{\varphi} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, et cette isométrie locale est en réalité une isométrie globale puisque $\mathbb{H}$ est totalement géodésique. On constate alors aisément que Γ_1 et Γ_2 sont conjugués par $\tilde{\varphi} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

En particulier, ceci montre que les réseaux uniformes à équivalence près de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sont en bijection naturelle avec l'ensemble des orbiflods hyperboliques compacts à isométrie près. Or, il y a énormément de surfaces hyperboliques compactes distinctes à isométrie près (un nombre indénombrable), d'où le petit résultat suivant qui montre qu'il y a beaucoup de réseaux non-équivalents dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 2.3. *$R_{PSL_2(\mathbb{R})}$ est indénombrable.*

2.2 Classification des réseaux

Soit maintenant Γ un réseau de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Alors, $\mathbb{H}/\Gamma$ est un espace topologique, compact si le réseau est uniforme. Si de plus le groupe Γ agit sans points fixes sur $\mathbb{H}$, le quotient $\mathbb{H}/\Gamma$ est une surface hyperbolique. C'est donc une surface orientable de genre $g \geq 2$ avec r trous, et Γ s'identifie naturellement au groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{H}/\Gamma)$ dont une présentation est donnée par :

$$\pi_1(\Sigma_{g,r}) = \langle a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots, b_g, d_1, \cdots, d_r \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] d_1 \cdots d_r = e \rangle$$

Ainsi, on a obtenu le résultat suivant, qui donne une première approche à la question de la classification des réseaux dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 2.4. *Les réseaux de $PSL_2(\mathbb{R})$ qui agissent sans point fixe sur $\mathbb{H}$ sont tous isomorphes à $\pi_1(\Sigma_{g,r})$ pour des entiers $g \geq 2$ et $r \geq 0$. Réciproquement, chaque $\pi_1(\Sigma_{g,r})$ apparaît comme un réseau de $PSL_2(\mathbb{R})$.*

Le lecteur attentif aura remarqué que, dès lors que $r \geq 1$, le groupe $\pi_1(\Sigma_{g,r})$ est un groupe libre à $2g + r - 1$ générateurs.
En particulier, comme il existe de nombreuses surfaces hyperboliques homéomorphes sans être isométriques, il y a beaucoup de réseaux uniformes dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ isomorphes les uns aux autres sans pour autant être équivalents dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Nous verrons dans la prochaine section que ceci est surprenament très faux pour $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$ dès lors que $n \geq 3$.

Pour ce qui est des réseaux agissant avec des points fixes, le paysage est un peu moins clair. En particulier, l'argument affirmant que Γ est le groupe fondamental de $\mathbb{H}/\Gamma$ échoue : ceci fonctionne uniquement lorsque la projection $\mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma$ est un revêtement, donc quand aucun élément de Γ n'a de point fixe dans $\mathbb{H}$.

La théorie des orbifolds permet de contourner ce problème. Si Γ est un réseau général, le quotient $\mathbb{H}/\Gamma$ n'est pas en général une surface hyperbolique. C'est en revanche un orbifold, c'est à dire informellement une variété avec certains points singuliers, qui correspondent aux points fixes de l'action de Γ sur $\mathbb{H}$. En généralisant la théorie des revêtements à ces orbifolds, on arrive à démontrer un analogue général de la proposition qui précède.

Proposition 2.5. *Soit Γ un réseau de $PSL_2(\mathbb{R})$. Alors, il existe des entiers g, k, r et $m_1, \cdots, m_k \geq 2$ tels que le groupe Γ admette comme présentation :*

$$\langle a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots b_g, c_1, \cdots c_k, d_1, \cdots d_r \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] d_1 \cdots d_r = e, \ \forall i \in [\![1, k]\!], \ c_i^{m_i} = e\rangle$$

Le $k+2$-uplet $(g, m_1, \cdots, m_k, r)$ est alors appelé signature de Γ. L'orbifold $\mathbb{H}/\Gamma$ est alors une surface de genre g, à laquelle on a ajouté r cusps et k points singuliers d'ordres respectifs $m_1, \cdots, m_r$. De plus, l'aire de cette surface, qui correspond ici à la mesure du quotient $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma$ (et est donc finie) est donnée par la formule :

$$\mathcal{A}(\mathbb{H}/\Gamma) = 2\pi \left(2g - 2 + r + k - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{m_i}\right)$$

Notons que cette formule impose que, pour qu'il existe un réseau de la forme imposée par la proposition 2.5, il faut que $2g + r + k > 2 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{m_i}$: une aire est toujours positive. Réciproquement, une construction effectuée dans [4] assure que cette condition est suffisante pour l'existence d'un tel réseau.

Tâchons maintenant d'élucider plus avant la structure du groupe dont la présentation a été donnée dans la proposition 2.5. Ce groupe est isomorphe au produit libre : $\pi_1(\Sigma_{g,r}) * \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}/m_k\mathbb{Z}$, et $\pi_1(\Sigma_{g,r})$ est libre à $2g+r-1$ générateurs dès lors que $r \geq 1$. Ainsi, on a obtenu une classification complète des réseaux dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Pour vérifier ce résultat, on peut par exemple tâcher de placer $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ dans cette classification. Pour cela, on constate que $\mathbb{H}/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ admet deux points singuliers d'ordres respectifs 2 et 3, et un unique cusp. On en déduit donc (et ceci peut se vérifier explicitement) :

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

2.3 Groupes fuchsiens arithmétiques

Parmi les sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que sont les groupes fuchsiens, on peut naturellement se demander lesquels, comme $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, sont arithmétiques au sens évoqué dans la section 1.3. Bien sûr, on sait déjà qu'ils seront des réseaux au vu du théorème de Borel-Harish-Chandra. Le critère dû à Takeuchi (voir [7]) suivant répond intégralement à la question en fonction des traces des éléments du groupe Γ.

Théorème 2.6 (Takeuchi - [7])**.** *Soit Γ un réseau de $PSL_2(\mathbb{R})$. Alors, Γ est arithmétique si et seulement si la condition sivante est vérifiée.*
L'ensemble $Tr(\Gamma)$ traces des éléments de Γ est inclus dans l'anneau des entiers d'un corps de nombres K, et pour tout morphisme $\sigma : K \to \mathbb{C}$ tel que $\sigma \neq id$, l'ensemble $\sigma(Tr(\Gamma))$ est borné dans $\mathbb{C}$.

En appliquant ce critère, Takeuchi parvient à donner une liste des groupes triangulaires qui sont arithmétiques.

Definition 2.7. Les groupes triangles sont les réseaux fuchsiens Γ dont l'orbifold quotient est de genre zéro, à zéro cusp et à trois points singuliers.

Soit Γ un groupe triangle. Si m_1, m_2, m_3 sont les multiplicités des points singuliers de l'orbifold associé, le groupe triangle correspondant est noté $\Delta(m_1, m_2, m_3)$. Au vu de la proposition 2.5, on alors a l'isomorphisme :

$$\Delta(m_1, m_2, m_3) \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/m_3\mathbb{Z}$$

Dans [8], s'appuyant sur ses précédents travaux dans [7], Takeuchi parvient à donner la liste exacte des triplets d'entiers (m_1, m_2, m_3) tels que le groupe triangle $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ soit arithmétique. Il y en a 76, a permutation près. Si on autorise certains des m_i à valoir $+\infty$, ce qui correspond à remplacer des points singuliers par des cusps, ce nombre monte à 85. Ceci montre en particulier que de nombreux réseaux dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ne sont pas arithmétiques, y compris des réseaux uniformes. Ceci sera mis en défaut en rang supérieur par les théorèmes d'arithméticité de Margulis, voir théorème 3.6.

Le critère de Takeuchi dans [7] semble ouvrir la porte à d'autres tentatives de classifications de groupes arithmétiques dans des cas plus compliqués, par exemple $\Delta(m_1, m_2, m_3, m_4)$. À notre connaissance, ces problèmes n'ont pas reçu une grande attention de la part des mathématiciens.

2.4 Autres groupes fuchsiens

Disons tout de même un mot des groupes fuchsiens qui ne sont pas des réseaux. Ceux-ci sont nettement moins bien compris, et en particulier bien plus difficiles à classifier. Un invariant qui leur est usuellement attaché est le suivant. Considérons l'espace hyperbolique $\mathbb{H}$ incarné dans le modèle du disque de Poincarré $\mathbb{D}$. Si Γ est un groupe fuchsien et $x \in \mathbb{H}$, Γx est une partie dicrète de $\mathbb{D}$. L'ensemble de ses points d'accumulation est noté $\Lambda(\mathbb{D})$, et s'avère ne pas dépendre de x.

Proposition 2.8. *Soit Γ un sous-groupe fuchsien.*
Alors $\Lambda(\Gamma)$ est soit égal à tout le cercle $\partial\mathbb{D}$, soit parfait et nulle part dense dans $\partial\mathbb{D}$, soit de cardinal $0, 1$ ou 2.
On dit que Γ est du premier type si $\Lambda(\Gamma) = \partial\mathbb{D}$, et du second type sinon.

Il n'est pas très difficile de se convaincre que les réseaux de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sont parmi les groupes fuchsiens du premier type. Réciproquement, un groupe fuchsien du premier type qui est finiment engendré est un réseau, mais il existe des groupes fuchsiens du premier type qui ne sont pas des réseaux - il ne sont donc pas finiment engendrés.

Les réseaux fuchsiens sont également porteurs d'une propriété importante qui disparaîtra en rang supérieur : ce sont ce qu'on appelle des groupes (relativement) hyperboliques.

Definition 2.9. Soit Γ un groupe discret. On dit que Γ est hyperbolique si et seulement si il existe une constante δ telle que, pour tout triangle ABC dans le graphe de Cayley de Γ, C est à distance au plus δ du segment AB.

Par exemple, les triangles étant dégénérés dans un arbre, les groupes libres sont hyperboliques. C'est également le cas des groupes $\pi_1(\Sigma_g)$ évoqués plus tôt. En fait, ce phénomène est conservé pour tous les réseaux uniformes fuchsiens.

Proposition 2.10. *Soit G un groupe de Lie réel simple connexe non compact de rang 1. Alors, tous les réseaux uniformes dans G sont hyperboliques.*

Un propriété similaire mais légèrement plus faible reste vraie pour les réseaux fuchsiens non uniformes. Ceci devient en revanche complètement faux en rang supérieur, où aucun réseau n'est hyperbolique (voir [3]).

3 Rigidité en rang supérieur

Cette classification dans le cas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est très spécifique à ce groupe. Elle repose en effet sur le fait que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ soit le groupe d'isométries du demi-plan de Poincarré, phénomène qui disparaît complètement en dimension supérieure : le groupe d'isométries de l'espace hyperbolique standard de dimension n n'est pas $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$, mais bien $\mathrm{PSO}(n, 1)$.

3.1 Rigidité forte de Mostow - Margulis

Et en effet, de manière relativement surprenante, les réseaux à équivalence près sont en nombre nettement plus faible en dimension plus grande. Pour le voir, commençons par citer le très difficile théorème suivant, dit de "rigidité".

Théorème 3.1 (Rigidité de Mostow - Margulis - [6])**.** *Soient G_1, G_2 deux groupes de Lie réels simples connexes de rang supérieur. Soient Γ_1, Γ_2 des réseaux de G_1 et G_2 respectivement. Alors, tout isomorphime de Γ_1 vers Γ_2 se prolonge en un isomorphisme bicontinu entre G_1 et G_2.*

En prenant $G_1 = G_2$ dans le résultat ci-dessus, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.2 (Rigidité forte de Mostow - Margulis)**.** *Soit G un groupe de Lie réel simple connexe de rang supérieur (par exemple $SL_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$).*
Alors, deux réseaux isomorphes dans G sont toujours équivalents.

Ce résultat doit sembler extrêmement contre-intuitif. En substance, il affirme que tout isomorphisme $\varphi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ se prolonge en un automorphisme (bicontinu) de G. De plus, il n'est pas spécifique à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, mais s'applique en réalité à tous les groupes de Lie simples de rang supérieur.
Ainsi, dans les groupes de Lie semi-simples de rang supérieurs, l'équivalence entre réseaux est identique à l'isomorphie. Le lecteur pourra constater que c'est aussi le cas pour $\mathbb{Z}^n$ inclus dans $\mathbb{R}^n$: ceci est en fait un avatar d'un analogue du corollaire 3.2 que nous verrons dans la section 3.4.

Un conséquence de ce fait est le résultat suivant, reposant sur le fait qu'il n'existe qu'un nombre dénombrable de groupes finiment présentés à isomorphisme près. Il est à mettre en opposition avec la proposition 2.3.

Proposition 3.3. *Soit G un groupe de Lie réel simple de rang supérieur. Alors, R_G est dénombrable.*

Revenons maintenant au cas général du théorème 3.1. Ainsi, un groupe dénombrable ne peut pas apparaître comme un réseau de deux groupes de Lie réels simples connexes de rangs supérieurs distincts. On peut donc en un certain sens, à partir d'un réseau donné, retrouver le groupe de Lie dont celui-ci provient. Bien entendu, la détermination effective de ce groupe de Lie à partir d'une simple présentation du réseau reste à ce stade un problème complètement ouvert.
La question est donc de savoir si il est envisageable de lire un groupe de Lie de rang supérieur G sur les propriétés géométriques d'un de ses réseaux. La théorie des C^*-algèbres entend classifier les groupes dénombrables et leurs propriétés géométriques à partir d'un objet purement algébrique, sa C^*-algèbre réduite. Aujourd'hui, on ne sait toujours pas si l'affirmation suivante, qui est une conjecture de Connes, est vraie : soient G_1, G_2 deux groupes de Lie réels simpes connexes et Γ_1, Γ_2 deux réseaux de ces groupes de Lie dont les C^*-algèbres réduites associées sont isomorphes, alors G_1 et G_2 sont isomorphes. On ne sait même pas s'il est possible de lire le rang du groupe de Lie sur la C^*-algèbre du réseau.

3.2 Superrigidité de Margulis

Revenons au problème de trouver les sous-groupes discrets de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ isomorphes à $\mathbb{Z}^k$ évoqué dans l'introduction. On considère donc un morphisme injectif $\theta : \mathbb{Z}^k \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ d'image discrète, où $k, n \in \mathbb{N}$, ou, ce qui revient au même, k matrices $A_1, \cdots, A_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui engendrent un groupe abélien libre discret. Un exemple typique de cette situation est la donnée d'une sous-algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{h} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont l'exponentielle est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ et contient donc des copies de $\mathbb{Z}^n$. Il se trouve que cette situation est, à indice fini près, la seule qui peut se produire, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.4. *Soient $k, n \in \mathbb{N}$, et $\theta : \mathbb{Z}^k \to GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes injectif d'image discrète.*
Alors , il existe un sous-groupe $F \subseteq \mathbb{Z}^k$ d'indice fini tel que $\theta_{|F}$ se prolonge en un morphisme continu $\hat{\theta} : \mathbb{R}^k \to GL_n(\mathbb{R})$, et $\hat{\theta}$ est un isomorphisme sur son image.

Démonstration. Prenons $A_1, \cdots, A_k$ les images de générateurs de $\mathbb{Z}^k$ par φ. Quitte à prendre le carré des A_i et donc passer à un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer que les A_i n'ont pas de valeur propre négative. En effectuant une coupure l'axe réel négatif, on peut prendre un logarithme réel des A_i, qu'on note B_i, de sorte que les B_i commutent également (car le logarithme est une fonction analytique donc donnée localement par une série entière). Les B_i forment alors une famille libre. En effet, on pourrait sinon en exponentiant une relation de liaison et en approchant les réels par des rationnels trouver une infinité d'élements de $\mathbb{Z}^k$ dont l'image par θ serait bornée, ce qui est absurde.
Alors, l'algèbre de Lie engendrée par les B_i est abélienne de dimension k, et en prenant son exponentielle on obtient l'extension de θ souhaitée. $\square$

Autrement dit, les copies de $\mathbb{Z}^k$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont elles mêmes obtenues, à commensurabilité près, comme sous-groupes de copies de $\mathbb{R}^k$ contenues dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ce résultat peut s'interpréter comme un phénomène de rigidité ayant lieu dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: la présence d'un $\mathbb{Z}^k$ assure celle d'un $\mathbb{R}^k$. Il peut aussi s'interpréter comme un résultat de théorie des représentations, cette fois-ci des groupes $\mathbb{Z}^k$ et $\mathbb{R}^k$: les représentations de $\mathbb{Z}^k$ s'étendent (au moins dans ce contexte, et quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini) à des représentations de $\mathbb{R}^k$.
Il se trouve que ce dernier point de vue ce généralise très largement à des réseaux plus compliqués que $\mathbb{Z}^k$ dans $\mathbb{R}^k$. Cet ensemble de résultats est connu sous le nom de superrigidité de Margulis. Voici un exemple d'un résultat de ce type. Notons qu'il ne s'applique que pour les groupes de Lie semi-simples de rang au moins égal à 2 : le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, traité dans la section précédente, ne bénéficie absolument pas de telles propriétés.

Théorème 3.5 (Superrigidité de Margulis - [3], [6])**.** *Soit Γ un réseau dans un groupe de Lie réel simple simplement connexe de rang supérieur G.*
Alors, toute représentation θ de Γ dans un $GL_n(\mathbb{R})$ d'image non bornée s'étend en une représentation continue $\hat{\theta}$ de G, à indice fini et erreur bornée près.

Ici, à indice fini et erreur bornée près signifie qu'il existe Γ' d'indice fini dans Γ, et K un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\hat{\theta}(\gamma) \in \theta(\gamma)K$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Ce théorème doit être perçu comme extrêmement surprenant. Il peut en effet être compris comme indiquant que la présence d'une copie de Γ dans un groupe de Lie implique celle de G : Γ garde donc une quantité d'information considérable par rapport à G.
Les théorèmes ci-dessus tendent à limiter le nombre de réseaux disponibles dans les groupes de Lie réels simples de rang supérieur. Nous allons maintenant voir qu'ils ont effectivement permis à Margulis de fournir une classification très satsifaisante de ces réseaux.

3.3 Théorème d'arithméticité

Pour se donner une idée de cette classification, tâchons maintenant de donner des exemples de réseaux en rang supérieur. Pour commencer, dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, le groupe des points entiers $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un réseau. Cette construction arithmétique se généralise facilement à de nombreux groupes de Lie semi-simples : le lecteur connaissant les groupes algébriques n'aura aucun mal à deviner que cette construction fonctionne également sur tous les groupes algébriques définis sur $\mathbb{Q}$. En précisant quelques détails, on obtient ainsi la notion de réseau arithmétique développée en section 1.3.
Le résultat boulversant de Margulis qui suit règle intégralement la classification des réseaux dans les groupes de Lie réels simples de rang supérieur, contrastant fortement avec la classification obtenue pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Théorème 3.6 (Théorème d'arithméticité de Margulis - [6])**.** *Soit G un groupe de Lie réel simple connexe de rang supérieur. Tous les réseaux de G sont arithmétiques.*

Ceci est parfaitement faux dans le cas des groupes de Lie simples de rang 1. Par exemple, il est connu que $\mathrm{SO}(n,1)$, $\mathrm{SU}(1,1) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{SU}(2,1)$ et $\mathrm{SU}(3,1)$ contiennent des réseaux qui ne sont pas arithmétiques. Pour $\mathrm{SU}(n,1)$ avec $n > 3$, cette question reste aujourd'hui ouverte, voir à ce sujet [3].

3.4 Addendum : le cas résoluble

Les réseaux dans les groupes de Lie nilpotents sont assez bien compris depuis les travaux de Malcev. Celui-ci a en effet démontré un critère permettant de s'assurer de l'existence de tels réseaux dans ce type de groupes, ainsi que des résultats de rigidités de tels réseaux à rapprocher des théorèmes de Mostow et Margulis vus plus tôt.

Théorème 3.7. *Soit G un groupe de Lie nilpotent. Alors, G admet un réseau si et seulement si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est définie sur $\mathbb{Q}$.*

De plus, dans ce cas, on peut construire le réseau en question en prenant simplement l'exponentielle d'un réseau arithmétique dans $\mathfrak{g}$, et en considérant le groupe engendré par cet ensemble, exactement comme dans le contexte de la proposition 3.4. Le réseau obtenu sera alors toujours uniforme : dans les groupes de Lie nilpotents, les réseaux sont toujours uniformes. Ce résultat est en revanche faux dans le cas général des groupes résolubles. Nous manquons encore aujourd'hui de critères efficaces pour décider si un groupe résoluble admet ou non un réseau, et le cas échéant, à quoi ressemblent ces réseaux.

Malcev a également obtenu une caractérisation de quels groupes peuvent apparaître comme réseaux de tels groupes de Lie nilpotents.

Théorème 3.8 (Malcev - [2])**.** *Soit Γ un groupe nilpotent de type fini. Alors, il existe un groupe de Lie nilpotent G qui contient un réseau isomorphe à Γ.*

Dans le cas nilpotent, on a également un résultat de rigidité proche de celui de Mostow vu précédement :

Théorème 3.9 (Théorème de rigidité de Malcev - [2,5])**.** *Soient G_1, G_2 deux groupes de Lie nilpotents simplement connexes. Soient Γ_1, Γ_2 des réseaux respectifs de G_1 et G_2. Alors, tout isomorphisme entre Γ_1 et Γ_2 s'étend en un isomorphisme entre G_1 et G_2.*

Tous ces résultats sont en général faux dans le cas résoluble, qui pose encore de nombreux problèmes. En particulier, on ne sait pas caractériser ni les groupes résolubles apparaissant comme réseaux de groupes de Lie résolubles, ni les groupes de Lie résolubles qui admettent des réseaux. À ce sujet, on peut tout de même citer les progrès obtenus dans [1] :

Théorème 3.10 (Auslander - [1])**.** *Soit Γ un groupe qui s'insère dans une suite exacte $0 \to \mathbb{Z}^r \to \Gamma \to \mathbb{Z}^s \to 0$. Alors, Γ est un réseau uniforme d'un groupe de Lie résoluble.*

4 Directions de recherches et conclusion

Dans cette petite annexe, nous récapitulons quelques exemples de sujets de recherches potentiels dans le domaine présenté dans cette note. L'essentiel des paragraphes qui suivent sont des questions encore sans réponse.

Au sujet des groupes fuchsiens, la question de savoir lesquels sont effectivement arithmétiques reste en suspens. Les travaux de classification de Takeuchi ne couvrent qu'un cas très spécifique, celui des groupes triangles, et on aimerait pouvoir généraliser son critère à d'autres exemples. De plus, on aimerait pouvoir prouver un résultat allant dans le sens de l'heuristique assez largement partagée selon laquelle "la plupart" des réseaux de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ne sont pas arithmétiques. Toutes ces questions ont également des contreparties dans les autres groupes de rang 1, par exemple dans $\mathrm{SU}(n,1)$ où on se sait même pas s'il existe des réseaux non-arithémtiques.

Du côté du rang supérieur, un immense travail reste à faire, notamment au sujet du retour en arrière dans le résultat de rigidité de Mostow : comment, à partir d'un réseau de rang supérieur, retrouver le groupe de Lie dont il provient ? Est-il possible d'obtenir des critères sur les groupes dénombrables finiment présentés pour s'assurer qu'ils sont, ou non, des réseaux de rang supérieur ? Un de ces critères bien connus est celui de la propriété (T) de Kazhdan, que nous n'avons pas eu la place de développer dans cette note. En particulier, est-il possible de retrouver des propriétés géométriques de G telles que sa croissance par exemple, à partir de celles de Γ ?

Toutes ces questions, et beaucoup d'autres dans ce domaine, continuent et continueront sans doute d'occuper les mathématiciens pendant de longues années, tant géomètres, arithméticiens, analystes que probabilistes.

Références

[1] L. Auslander. Some compact solvmanifolds and locally affine spaces, 1958.

[2] P. Pansu M. Gromov. Rigidity of lattices : an introduction, 1991.

[3] F. Kassel. Discrete subgroups of semisimple lie groups, beyond lattices, 2022.

[4] S. Katok. Fuchsian groups, 1992.

[5] A. Malcev. On a class of homogeneous spaces, 1949.

[6] G. Margulis. Discrete subgroups of semisimple lie groups, 2010.

[7] K. Takeuchi. A characterization of arithmetic fuchsian groups, 1975.

[8] K. Takeuchi. Arithmetic triangle groups, 1976.