

IDR - THÉORIE DES MODÈLES ET INTÉGRATION MOTIVIQUE

XAVIER PIGÉ

Thèse sous la direction d'ARTHUR FOREY (CNRS-Université de Lille)

1. INTRODUCTION

La théorie des modèles est une branche des mathématiques utilisant les outils de la logique, comme le théorème de compacité, les espaces de types ou les ultraproducts, pour étudier des structures concrètes apparaissant dans d'autres domaines des mathématiques. Ici, on s'intéressera par exemple aux applications aux corps algébriquement clos, aux groupes abéliens ordonnés divisibles et aux corps valués algébriquement clos. La théorie des modèles ne s'intéresse qu'aux structures « simples », dans le sens où elles n'encodent rien de trop complexe. Par exemple, les nombres entiers ne sont pas du ressort de la théorie des modèles : le théorème d'incomplétude de Gödel exprime le fait que leur structure est trop riche (capable d'encoder tout ce qui est calculable). En revanche, sur les trois exemples cités plus haut, on dispose de puissants théorèmes de structure (élimination des quantificateurs, caractère fortement minimal, description explicite de l'espace des types...) qui permettent de faire fonctionner les outils et les idées de la théorie des modèles. C'est encore le cas dans bien d'autres structures. Un exemple des plus fameux est $\mathbf{R}_{\text{an,exp}}$, le corps des nombres réels muni de toutes les fonctions analytiques restreintes et de l'exponentielle globale : un important théorème de van den Dries et Miller [DM94] affirme que cette structure est o-minimale, c'est-à-dire qu'on a une description des parties définissables. La section 3 sera dédiée à l'étude des trois théories qui nous occupent ici, ainsi qu'à présenter quelques notions plus générales de théorie des modèles.

L'intégration motivique, quant à elle, émerge en 1995, lors d'un exposé de Kontsevich où il démontra le théorème 2.1. Il s'agit d'une méthode de calcul de certains invariants en géométrie algébrique, inspirée par les techniques d'intégration p -adique. La première formalisation, due à Denef et Loeser [DL98], emploie le langage des espaces d'arcs et de l'élimination des singularités en géométrie algébrique, et ne fonctionne qu'au-dessus d'un corps algébriquement clos - en toute caractéristique, bien que l'élimination des singularités soit nécessaire pour les applications, ce qui la restreint *de facto* à la caractéristique nulle en l'état actuel des connaissances. Quelques années plus tard, ils parviennent à généraliser à une autre classe de corps, les corps pseudo-finis [DL99]. Un peu plus tard, au milieu des années 2000, de façon à peu près simultanée, Cluckers et Loeser [CL08] d'une part, Hrushovski et Kazhdan [HK06] d'autre part, mettent au point de nouvelles théories de l'intégration motivique. Celles-ci ne font plus appel à des espaces d'arcs ou à de la résolution des singularités, mais à de la théorie des modèles (davantage dans le cas de Hrushovski et Kazhdan que dans celui de Cluckers et Loeser, cela dit). La théorie de Cluckers et Loeser, de plus, fonctionne sur tout corps de caractéristique nulle, pour peu qu'il soit possible d'en comprendre convenablement les parties définissables. Celle de Hrushovski et Kazhdan a rapidement été généralisée à une vaste classe de structures, notamment par Yin [Yin10], [Yin13]. Des variantes avec transformée de Fourier existent aussi, par exemple chez Cluckers et Loeser [CL10] ou chez Hrushovski et Kazhdan [HK06].

Notre objectif ici sera de proposer une introduction à l'intégration motivique de Hrushovski et Kazhdan, en cherchant à la fois à expliquer ses propriétés et les techniques permettant de l'utiliser, et son fonctionnement interne, jusque dans quelques aspects de sa construction. Nous présenterons d'abord en section 2 l'exemple historique qui a motivé l'introduction de l'intégration motivique, en tâchant de faire apparaître les bonnes propriétés de l'intégration motivique qui sont utilisées. Il s'agit d'un exemple typique d'une utilisation de l'intégration motivique. Ensuite, dans la section 3, nous introduirons quelques éléments de théorie des modèles. Ces deux sections se veulent aussi accessibles que possibles ; aussi, notamment dans la première, de nombreux détails techniques, relatifs notamment à la géométrie algébrique complexe, sont omis. La section 4, plus technique, explique en détail (mais sans preuve) la construction d'une forme de l'intégration motivique de Hrushovski et Kazhdan. Enfin, dans la section 5 on trouvera quelques exemples d'applications, d'une part à l'étude des singularités en géométrie algébrique, et d'autre part à des questions de géométrie arithmétique.

2. UN EXEMPLE : L'ARGUMENT DE KONTSEVICH

On explique ici l'argument de Kontsevich, sans entrer dans les détails techniques du fonctionnement de l'intégration motivique. Cette section ne comporte donc pas de théorie des modèles - pas plus, en réalité, que la preuve de Kontsevich, car il utilisait une théorie de l'intégration motivique (plus tard formalisée et développée par Jan Denef et François Loeser [DL98]) très « géométrique », à base de géométrie algébrique et d'espaces d'arcs. Nous n'en parlerons pas davantage, une présentation détaillée (à la fois de cette théorie et de l'argument que nous allons exposer) est présente dans le livre de Chambert-Loir, Nicaise et Sebag [CNS18] (pp. 417-418).

Voici le théorème démontré par Kontsevich en 1995 :

Théorème 2.1. *Deux variétés algébriques complexes lisses de Calabi-Yau birationnelles ont les mêmes nombres de Hodge.*

2.1. Analyse des termes de l'énoncé. Commençons par expliquer les différents termes qui apparaissent ici, et en quoi ce résultat est - au moins un peu - surprenant.

Tout d'abord, *variété complexe* est à prendre ici dans un sens de variété algébrique. En première approche, on peut voir cela comme un sous-ensemble d'un espace projectif $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^N$ défini par des équations polynomiales (qui doivent être homogènes, pour avoir un sens dans un espace projectif). On suppose de plus que les variétés étudiées sont lisses, au sens de la géométrie algébrique, ou de façon équivalente au sens de la géométrie analytique. L'hypothèse « Calabi-Yau » est plus technique, et dit que le diviseur canonique de la variété est trivial. Pour le reformuler, le fibré canonique d'une variété est le fibré des formes volumes - sur une variété X de dimension n , on le note Ω_X^n . Il s'agit d'un fibré en droites, ce qui correspond en géométrie algébrique à des objets appelés *diviseurs*. Dire que le diviseur est trivial, c'est exactement dire que le fibré en droites Ω_X^n est trivial, c'est-à-dire qu'il possède une section globale qui ne s'annule nulle part.

Ensuite, une application rationnelle entre deux variétés algébriques X et Y est une fonction, notée $f : X \dashrightarrow Y$, qui au lieu d'être définie sur X tout entier est définie sur un ouvert dense - et qui, de plus, est un morphisme de cet ouvert vers Y , au sens des variétés algébriques, c'est-à-dire qu'elle est donnée par des fonctions polynomiales. Dire que deux variétés X et Y sont birationnellement équivalentes, ou plus simplement birationnelles, c'est alors dire qu'il existe des applications $f : X \dashrightarrow Y$ et $g : Y \dashrightarrow X$ inverses l'une de l'autre. Autrement dit, c'est dire qu'on peut trouver, dans X et dans Y , deux ouverts denses qui sont isomorphes. Par exemple, la droite affine est birationnelle à la droite projective, puisque la droite projective est la compactification de la droite affine obtenue en rajoutant un point à l'infini. À l'inverse, on peut voir que deux courbes qui n'ont pas le même genre (soit, si on voit ces courbes complexes comme des surfaces réelles, qui n'ont pas le même « nombre de trous ») ne sont pas birationnelles.

Pour finir, les *nombres de Hodge* sont des invariants extrêmement importants de géométrie complexe, de nature cohomologique. Ils viennent d'une décomposition des espaces de cohomologie (singulière, ou de de Rham) des variétés complexes en somme directe de sous-espaces (c'est le théorème de décomposition de Hodge), cette décomposition étant liée entre autres à la présence de la conjugaison complexe, qui induit certains automorphismes. Nous n'entrerons pas davantage dans les détails (voir sinon le livre de Voisin [Voi02]), il suffit de retenir qu'il s'agit d'invariants très fins, liés à certaines formes différentielles globales, et de nature cohomologique. Le fait qu'ils expriment la géométrie globale de la variété, par opposition au caractère birationnel qui ne s'intéresse qu'à un ouvert dense, explique que ce théorème soit quelque peu surprenant, et l'emploi de moyens détournés pour le prouver.

2.2. Une esquisse de la preuve de Kontsevich. En 1995, Kontsevich a démontré ce théorème via une nouvelle théorie qui a pris le nom d'*intégration motivique*. Pour comprendre d'où vient cette idée, intéressons-nous d'abord à une variante de ce théorème, démontrée par Batyrev quelques années plus tôt :

Théorème 2.2. *Deux variétés algébriques complexes lisses de Calabi-Yau birationnelles ont les mêmes nombres de Betti.*

Les nombres de Betti sont les dimensions des espaces de cohomologie singulière ; en particulier, le théorème de décomposition de Hodge mentionné plus haut assure que les nombres de Betti peuvent se retrouver à partir des nombres de Hodge (en les additionnant). La preuve de ce théorème par Batyrev reposait sur des arguments de comptage de points (dont il est classique en théorie de l'homologie qu'il est lié aux nombres de Betti, via par exemple la formule de la trace de Grothendieck-Lefschetz), qu'il transférait d'une variété à l'autre grâce à la théorie de l'intégration p -adique. Un mot sur l'intégration p -adique : comme le corps des p -adiques est un corps local, c'est-à-dire un corps localement compact, on sait qu'il dispose à un facteur près d'une unique mesure invariante par translation additive, appelée mesure

de Haar ; ceci permet d'utiliser la théorie de l'intégration de Lebesgue sur les p -adiques. L'argument de Kontsevich va consister à généraliser cette idée, mais au lieu d'utiliser une « vraie » intégrale, à valeurs dans les réels, il va s'agir de voir l'intégrale comme étant à valeurs « cohomologiques ». Précisons un peu cela.

L'ensemble des variétés algébriques sur un corps k peut être envoyé dans un groupe, appelé *groupe de Grothendieck* des k -variétés et noté $K_0(\text{Var}_k)$, défini comme suit. Le groupe $K_0(\text{Var}_k)$ est le groupe engendré par les $[X]$, pour X une variété algébrique sur k , avec les relations suivantes :

- (1) si X et Y sont deux variétés isomorphes, alors $[X] = [Y]$;
- (2) si $U \subset X$ est une sous-variété ouverte et $V = X \setminus U$ est un fermé complémentaire, alors $[X] = [U] + [V]$;
- (3) $[\emptyset] = 0$.

Il est à noter que le produit de variété fait de $K_0(\text{Var}_k)$ un anneau. Notre intégrale motivique prendra ses valeurs dans $K_0(\text{Var}_{\mathbf{C}})$.

On peut voir le morphisme $\text{Var}_k \rightarrow K_0(\text{Var}_k)$ comme un invariant additif universel, dans le sens où tout invariant additif (*i.e.* vérifiant les trois propriétés listées ci-dessus) se factorise nécessairement par celui-ci. Or il existe un grand nombre d'invariants additifs intéressants : citons par exemple le comptage de points (si k est un corps fini), ou encore, si $k = \mathbf{C}$, et c'est ce qui nous occupera ici, les polynômes d'Euler-Poincaré et de Hodge-Deligne. Pour donner une idée d'où viennent ces résultats, dans le cas du polynôme d'Euler-Poincaré, on peut plus ou moins le voir à travers la suite exacte longue de Mayer-Vietoris. Le polynôme d'Euler-Poincaré de la variété X est défini par

$$EP_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n t^n,$$

avec b_n le n -ième nombre de Betti ; celui de Hodge-Deligne est défini par

$$HD_X(u, v) = \sum_{p, q \geq 0} (-1)^{p+q} h^{p,q} u^p v^q,$$

avec $h^{p,q}$ le (p, q) -ième nombre de Hodge. Il s'agit dans les deux cas de polynômes, car ces nombres s'annulent quand n (ou $p + q$) est trop grand par rapport à la dimension de la variété - pour être précis, strictement supérieur au double de celle-ci. En particulier, le théorème principal est équivalent au fait que deux variétés algébriques complexes de Calabi-Yau birationnelles aient le même polynôme de Hodge-Deligne. Mais donc, pour montrer cela, il suffit de voir qu'elles sont égales dans $K_0(\text{Var}_{\mathbf{C}})$ (ou qu'elles sont égales, modulo des variétés dont le polynôme de Hodge-Deligne est nul).

L'intégration motivique s'inspire de la relation entre \mathbf{F}_p un corps fini, et \mathbf{Q}_p le corps des p -adiques. Si on remplace \mathbf{F}_p par \mathbf{C} , le corps le plus naturel à mettre à la place de \mathbf{Q}_p est sans doute $\mathbf{C}((t))$, le corps des séries formelles. Comme \mathbf{Q}_p , il s'agit d'un *corps valué* : on dispose d'un certain groupe de valeurs (ici, \mathbf{Z} dans les deux cas) et d'une fonction $v : \mathbf{C}((t)) \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$, qui vérifie les mêmes propriétés que la valuation p -adique. Plus précisément :

- on a $v(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;
- pour tous $x, y \in \mathbf{C}((t))$, on a $v(xy) = v(x) + v(y)$;
- pour tous $x, y \in \mathbf{C}((t))$, on a $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$.

Sur un tel corps, en plus des variétés algébriques, on est amené à considérer ce qu'on appelle des ensembles *semi-algébriques*, définis à la fois par des équations polynomiales et par des inéquations impliquant la valuation. Par exemple, $\mathcal{O} \subset \mathbf{C}((t))$, l'ensemble des points de valuation positive, est un ensemble semi-algébrique mais pas algébrique. On notera $\text{SAlg}_{\mathbf{C}((t))}$ l'ensemble des parties semi-algébriques. On peut encore définir le groupe de Grothendieck de celles-ci, noté $K_0(\text{SAlg}_{\mathbf{C}((t))})$. L'intégration motivique se formule alors comme suit :

Théorème 2.3. *Il existe un morphisme canonique*

$$\int^{\text{mot}} : K_0(\text{SAlg}_{\mathbf{C}((t))}) \rightarrow \widehat{K}_0(\text{Var}_{\mathbf{C}})[S^{-1}]$$

pour une certaine partie multiplicative S , et avec $\widehat{K}_0(\text{Var}_{\mathbf{C}})[S^{-1}]$ la complétion de $K_0(\text{Var}_{\mathbf{C}})[S^{-1}]$ relativement à la filtration par la dimension. Ce morphisme satisfait au théorème de Fubini et à la formule de changement de variable. De plus, si Y est une variété algébrique lisse sur \mathbf{C} , on a l'égalité :

$$\int^{\text{mot}} [Y(\mathcal{O})] = [Y]$$

La partie multiplicative S est explicite, et avec cette description il est élémentaire de vérifier que le polynôme de Hodge-Deligne (ou d'ailleurs celui d'Euler-Poincaré) se factorise via $\widehat{K}_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})[S^{-1}]$. Les énoncés pour le théorème de Fubini et la formule de changement de variable sont des analogues de ceux que l'on connaît en calcul différentiel réel (ou d'ailleurs p -adique), et on ne les écrira pas ici. Ces propriétés justifient l'interprétation de \int^{mot} comme une intégrale motivique.

À partir de là, on est capable de démontrer le théorème 2.1. Soient X et Y deux variétés algébriques complexes de Calabi-Yau, dont on suppose qu'elles sont birationnelles. Par des arguments standard de géométrie algébrique, on peut construire une variété algébrique Z et deux morphismes $f : Z \rightarrow X, g : Z \rightarrow Y$, qui sont birationnels et propres (au sens de la géométrie algébrique, mais cette propriété est analogue à la notion de propriété en topologie, qui signifie que l'image réciproque d'un compact est un compact). On peut alors écrire

$$[X] = \int^{\text{mot}} [X(\mathcal{O})]$$

puis tirer en arrière vers Z grâce à la formule de changement de variable. Cette formule de changement de variable donne un certain coefficient, mais l'hypothèse que X est de Calabi-Yau assure que celui-ci est trivial. En faisant la même chose avec Y , on trouve finalement que $[X] = [Y]$ dans $\widehat{K}_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})[S^{-1}]$, ce qui prouve le théorème 2.1.

3. QUELQUES NOTIONS DE THÉORIE DES MODÈLES

Cette section a pour objectif de donner au lecteur quelques notions de théorie des modèles. L'objectif de cet exposé étant introductif, le choix a été fait de ne pas chercher à donner des définitions précises, lesquelles sont souvent extrêmement lourdes en ce qui concerne les bases de la logique, mais plutôt de développer largement les exemples qui nous intéresseront ici, ainsi que celles de leurs propriétés qui nous intéresseront. Nous ne nous intéresserons donc pratiquement qu'aux cas des corps algébriquement clos, des groupes abéliens ordonnés divisibles et des corps valués algébriquement clos. Ces exemples, cependant, contiennent déjà de nombreux ingrédients de théorie des modèles qui servent fréquemment dans la théorie plus générale - les corps algébriquement clos, en particulier, forment en un certain sens une classe « de référence » pour les théoriciens des modèles. Ainsi, au-delà de notre intérêt purement pratique qui est de permettre l'exposition de la théorie de l'intégration motivique, ces trois exemples ont un intérêt propre. Le lecteur désireux de découvrir davantage la théorie des modèles, avec une exposition plus complète et systématique, peut par exemple consulter les livres de Marker [Mar02] ou de Tent et Ziegler [TZ12], ou encore les exposés de Jahnke et Hils dans [JPT18] pour ce qui concerne les corps valués.

3.1. Corps algébriquement clos. Commençons par les corps algébriquement clos. Un corps algébriquement clos k est un ensemble - aussi noté k - muni de constantes 0 et 1, ainsi que de fonctions $+, \times : k^2 \rightarrow k$ pour l'addition et la multiplication, auxquelles on rajoute par commodité une troisième fonction $- : k \rightarrow k$ pour la soustraction. On demande de plus que ces différentes constantes et fonctions vérifient un certain nombre de propriétés. Citons-en quelques-unes :

$$\begin{aligned} \forall x, x + 0 &= x \wedge 0 + x = x && \text{(neutralité de 0)} \\ \forall x, y, z, x \times (y + z) &= x \times y + x \times z && \text{(distributivité)} \\ \forall x, x \neq 0 &\rightarrow \exists y, x \times y = 1 && \text{(existence d'un inverse)} \\ \forall a_0, \dots, a_{n-1}, \exists x, x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 &= 0 && \text{(caractère algébriquement clos).} \end{aligned}$$

On a utilisé le symbole \wedge , qui en logique signifie « et », ainsi que la flèche \rightarrow pour écrire l'implication à l'intérieur d'une formule - souvent distinguée, en logique, de l'implication à l'extérieur des formules. On a aussi utilisé les règles habituelles d'écriture, de priorité, etc. De façon plus intéressante, on n'a pas précisé sur quel domaine portaient les quantificateurs - en fait, tous portent sur k . Pour le dernier axiome, il aurait pourtant été plus naturel de le faire précéder de $\forall n \in \mathbf{N}$; cependant, la logique du premier ordre dans laquelle nous travaillons impose de n'utiliser que des quantificateurs portant sur les éléments de la structure - en l'occurrence, sur k . Ce qui pourrait sembler une restriction technique est en réalité un point très important, qui va permettre entre autres choses d'établir le *théorème de compacité* - notre outil principal.

3.1.1. Un peu de vocabulaire. Comme on l'a déjà implicitement indiqué, les propriétés écrites ci-dessus sont toutes des *formules*, plus précisément des formules *closes* car elles ne dépendent d'aucun paramètre : toutes les variables qui y apparaissent sont *liées* par un quantificateur. Un exemple de formule non close serait

$$x^2 + 2 \neq 2x + 1 \wedge (\forall y, \exists z, x^3 + y^2 + z = 5)$$

où les variables y et z sont liées, tandis que x est libre. De façon générale, une formule pourrait être définie comme ce qu'on obtient à partir des symboles de notre langage (et de $=$; dans la suite, quand on parle des symboles du langage, l'égalité est toujours considérée comme en faisant partie), ainsi qu'avec les opérateurs booléens et les quantificateurs \forall, \exists , en écrivant des suites de symboles valides. On peut ensuite définir une *théorie* - ici la théorie des corps algébriquement clos - comme un ensemble (cohérents) de formules closes. L'hypothèse de cohérence, ici, est sémantique : elle signifie qu'on peut trouver une structure qui vérifie toutes ces formules (parfois appelées axiomes), comme par exemple \mathbf{C} ou $\overline{\mathbf{F}}_p$ la clôture algébrique du corps fini à p éléments.

3.1.2. Complétude d'une théorie. On peut remarquer qu'une différence fondamentale existe entre \mathbf{C} et $\overline{\mathbf{F}}_p$, à savoir leur caractéristique. Dans le second, la formule $p = 0$ est vraie (on peut définir p , si on veut, comme $1 + 1 + \dots + 1$), mais pas dans le premier. Ceci montre que la théorie n'est pas *complète* : elle ne décide pas de la véracité ou de la fausseté de toutes les formules closes. En revanche, on peut prouver que préciser la caractéristique (en rajoutant un axiome $p = 0$ pour la caractéristique $p > 0$, et une infinité d'axiomes $p \neq 0$ pour la caractéristique 0) permet de trouver une théorie complète. Notons ACF la théorie des corps algébriquement clos (de l'anglais *algebraically closed field*, il s'agit de la notation usuelle), et ACF_p la théorie (complète) des corps algébriquement clos de caractéristique p .

3.1.3. Élimination des quantificateurs. L'exemple précédent de formule non close paraît peut-être un peu étrange, il n'est pas habituel d'écrire une formule aussi compliquée sur un corps, on a l'impression qu'on pourrait « mieux l'écrire », de façon plus « simple ». De fait, en regardant de plus près, on voit qu'elle est équivalente (dans ACF) à

$$x \neq 1$$

Une façon d'exprimer le fait que cette seconde écriture est plus simple est le fait qu'elle ne comporte aucun quantificateur. Les formules sans quantificateur sont de fait souvent plus simples à manipuler. Il se trouve, dans le cas de ACF, que toute formule est équivalente à une formule sans quantificateur comme la précédente : on dit que ACF *élimine les quantificateurs*.

Remarque 3.1. Adoptons un autre point de vue sur les formules, plus sémantique (qui s'intéressent à ce qu'elles définissent) et moins syntaxique (qui s'intéresse à leur écriture). Une formule $\varphi(x)$, avec $x = (x_1, \dots, x_n)$, définit un sous-ensemble de k^n pour tout k corps algébriquement clos : l'ensemble des $a = (a_1, \dots, a_n)$ pour lesquelles $\varphi(a)$ est vrai. Dire que deux formules sont équivalentes (dans k , ou dans la théorie de k , c'est-à-dire la théorie de toutes les formules vraies dans k ; ici, si k est de caractéristique p , il s'agit de ACF_p), c'est exactement dire qu'elles définissent le même sous-ensemble de k^n . Dans ce cas, dire que ACF_p élimine les quantificateurs, c'est exactement dire que tout ensemble définissable peut être défini par une formule sans quantificateur. Une telle formule est une combinaison booléenne de formules *atomiques* (fabriquées sans quantificateur ni opérateur booléen, seulement avec les symboles du langage), ce qui revient à dire que l'ensemble qu'elle définit est fabriqué à partir des ensembles définis par ces formules atomiques par union, intersection et passage au complémentaire. En géométrie algébrique, de tels ensembles sont appelés constructibles. Les quantificateurs existentiels, quant à eux, consistent à prendre l'image d'un ensemble définissable par une projection. Ainsi, l'élimination des quantificateurs dans ACF signifie que l'image d'un ensemble constructible est encore un ensemble constructible : on reconnaît le théorème de Chevalley, un résultat classique de géométrie algébrique.

Cette façon de voir les formules à travers les ensembles qu'elles définissent nous sera très utile par la suite. Introduisons également la notion de *fonction définissable* : si X et Y sont des parties définissables, une fonction définissable $f : X \rightarrow Y$ est une fonction dont le graphe est définissable. Dans ACF, par élimination des quantificateurs, on peut voir que les fonctions définissables sont les recollements de fonctions polynomiales le long de partitions définissables (c'est-à-dire constructibles).

3.1.4. Caractère fortement minimal. Une autre propriété des corps algébriquement clos, qui découle de l'élimination des quantificateurs, est le fait suivant :

Théorème 3.2. *Soit $\varphi(x, y)$ une formule, avec x une variable unaire et y un n -uplet de paramètres. Alors, pour tout corps algébriquement clos k et tout choix de paramètres $b \in k^n$, le sous-ensemble de k défini par $\varphi(x, b)$ est fini ou cofini (c'est-à-dire de complémentaire fini).*

On dit alors que ACF est une théorie *fortement minimale*. Ce résultat revient au fait qu'un polynôme a un nombre fini de racines (combiné à l'élimination des quantificateurs). En effet, on peut vérifier qu'une combinaison booléenne de formules fortement minimales (*i.e* ne définissant que des ensembles finis ou cofinis) est encore une formule fortement minimale, et alors par élimination des quantificateurs il suffit de vérifier que les formules atomiques sont fortement minimales. Puisque les formules atomiques peuvent

se mettre sous la forme $P(x, y) = 0$, on s'est bien ramenés au fait qu'un polynôme en une variable n'a qu'un nombre fini de racines (ou est identiquement nul).

En fait, les polynômes qu'on peut obtenir en faisant varier les paramètres sont manifestement de degré borné, ce qui veut dire que $|\varphi(x, b)|$ est borné uniformément en b , et ce indépendamment du choix de k (sur le lieu où cette quantité est finie, bien sûr ; sur le lieu où elle est cofinie, on peut de même borner le cardinal du complémentaire). Ce genre de résultat est un exemple typique de phénomène de compacité que nous présenterons dans un instant : si, pour tout N , on pouvait trouver des paramètres pour lesquels on a simultanément $|\varphi(x, b)| > N$ et $|k \setminus \varphi(x, b)| > N$, alors on pourrait trouver un corps algébriquement clos et un choix de paramètre pour lequel les deux seraient infinis.

3.1.5. *Théorème de compacité.* Posons $\mathbf{T} = \text{ACF}$ (ou ACF_p).

Théorème 3.3. *Soit $\Phi = \{\varphi_i(x, b_i) : i \in I\}$ un ensemble de formules à paramètres dans k un modèle de \mathbf{T} , avec x une variable n -aire. On suppose que, pour tout sous-ensemble fini $\Phi^0 \subset \Phi$, il existe $a^0 \in k^n$ qui satisfait à toutes les formules $\varphi_i(x, b_i)$ de Φ^0 . Alors il existe K , un modèle de \mathbf{T} qui est une extension de k , et un point $a \in K^n$, tel que a satisfait à toutes les formules $\varphi_i(x, b_i)$ de Φ .*

En réalité, ce théorème est vraie pour toute théorie \mathbf{T} du premier ordre. Il s'agit d'un résultat essentiel - voire même fondamental - pour la théorie des modèles. Ses applications sont extrêmement variées ; on a pu en voir une juste au-dessus. Le fait que \mathbf{T} soit la théorie des corps algébriquement clos n'a aucune importance ici : le même énoncé reste vrai en remplaçant \mathbf{T} par une autre théorie, en particulier celles que nous étudierons dans la suite.

Détaillons l'application du théorème de compacité pour obtenir des bornes uniformes :

Proposition 3.4. *Soit $\varphi(x, y)$ une formule, avec x une variable unaire et y un n -uplet de paramètres. Il existe alors un entier N tel que, pour tout corps algébriquement clos k et tout choix de paramètres $b \in k^n$, le sous-ensemble de k défini par $\varphi(x, b)$ ou son complémentaire soit de cardinal inférieur ou égal à N .*

Démonstration. Pour simplifier, on suppose qu'on a fixé la caractéristique et qu'on travaille donc dans la théorie complète ACF_q . Soit $\psi_n(y)$ la formule qui affirme qu'il existe x_1, \dots, x_n et x'_1, \dots, x'_n deux à deux distincts tels que, pour tout $i = 1, \dots, n$, on ait $\varphi(x_i, y) \wedge \neg\varphi(x'_i, y)$ (où \neg est le symbole qui signifie « non »). Il s'agit bien d'une formule du premier ordre, de la famille de celles avec lesquelles nous travaillons. Si la proposition était fautive, alors pour tout n il existerait un modèle de ACF_q qui contient une réalisation de ψ_n . Par complétude de ACF_q , tout modèle de ACF_q contient une réalisation de ψ_n . Fixons-en un, appelé k . On peut alors appliquer le théorème de compacité à la famille $\{\psi_n(y) : n \in \mathbf{N}\}$, ce qui fournit un modèle K de ACF_q et un point $b \in K^n$ qui réalise tous les ψ_n simultanément. En particulier, le sous-ensemble de K défini par $\varphi(x, b)$ n'est ni fini ni cofini, ce qui est absurde. \square

3.2. **Groupes abéliens ordonnés divisibles.** Commençons par introduire la notion de groupe abélien ordonné divisible, qu'on peut voir comme une généralisation de \mathbf{R} ou de \mathbf{Q} :

Définition 3.5. Un *groupe abélien ordonné* est $(\Gamma, 0, +, \leq)$ tel que :

- (1) $(\Gamma, +)$ est un groupe abélien de neutre 0 ;
- (2) (Γ, \leq) est un ensemble ordonné ;
- (3) l'addition préserve l'ordre, c'est-à-dire que pour tous $a, b, c \in \Gamma$, on a

$$a \leq b \iff a + c \leq b + c.$$

De plus, on dit que Γ est divisible s'il l'est en tant que groupe abélien, c'est-à-dire si pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $\gamma' \in \Gamma$ tel que $n \cdot \gamma' = \gamma$. Dans ce cas, γ' est nécessairement unique.

Comme précédemment, on voit qu'il s'agit d'un ensemble, muni d'une constante 0, d'une fonction $+$ pour l'addition (et aussi, pour simplifier l'écriture, d'une fonction $-$ pour la soustraction), avec en plus un nouveau type d'objet : une relation \leq , qu'on peut voir comme un sous-ensemble de Γ^2 . Il doit satisfaire un certain nombre d'axiomes, qu'on peut écrire en logique du premier ordre à nouveau - c'est-à-dire en ne quantifiant que sur les éléments de Γ . Il est à noter que, pour cela, comme pour les corps algébriquement clos, la condition de divisibilité doit être écrite avec une infinité d'axiomes, un pour chaque n . On obtient ainsi une théorie DOAG (de l'anglais *divisible ordered Abelian groups*), qui est complète et qui élimine les quantificateurs. En revanche, elle n'est absolument pas fortement minimale, puisque

$$\Gamma^+ := \{\gamma \in \Gamma : \gamma \geq 0\}$$

est définissable, infini, de complémentaire infini.

On voit que l'ordre constitue une obstruction au caractère fortement minimal de DOAG. En fait, on peut obtenir une sorte d'orthogonalité entre les corps algébriquement clos et les groupes abéliens ordonnés divisibles.

3.3. Corps valués algébriquement clos. Comme on a pu le voir dans la section 2, pour faire de l'intégration motivique, il nous faudra étudier les corps valués. Nous ne nous intéresserons ici qu'aux corps valués algébriquement clos :

Définition 3.6. Un corps valué algébriquement clos (K, Γ, v) est un corps K , supposé algébriquement clos, muni d'une valuation v à valeurs dans un groupe abélien ordonné Γ (ainsi qu'en un point ∞), de sorte que :

- (1) $v(x) = \infty$ si et seulement si $x = 0$;
- (2) $v(xy) = v(x) + v(y)$ pour tous $x, y \in K$;
- (3) $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$ pour tous $x, y \in K$.

On demande généralement aussi que $v : K^\times \rightarrow \Gamma$ soit surjective. Son *anneau des entiers* est $\mathcal{O} = \{x \in K : v(x) \geq 0\}$, qui possède un unique idéal maximal $\mathfrak{m} = \{x \in K : v(x) > 0\}$. Le quotient $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ est appelé *corps résiduel* de K .

Puisque K est algébriquement clos, on peut vérifier que Γ est nécessairement divisible et k algébriquement clos. En particulier, dans la section 2, les corps valués considérés (\mathbf{Q}_p et surtout $\mathbf{C}((t))$) n'étaient pas algébriquement clos. Néanmoins, nous allons dans la suite considérer des corps algébriquement clos, pour les deux raisons suivantes :

- la théorie des modèles des corps algébriquement clos est extrêmement riche et bien comprise ;
- c'est le cadre le plus simple pour que l'intégration motivique de Hrushovski-Kazhdan fonctionne.

Il est à noter que d'autres théories de l'intégration motivique emploient d'autres cadres, notamment Cluckers-Loeser (qui emploie aussi la théorie des modèles) et qui utilise $\mathbf{C}((t))$.

Contrairement à ce qui se passait pour les corps algébriquement clos et les groupes abéliens ordonnés divisibles, un corps valué comporte plusieurs *sortes* : on ne peut pas comparer un élément du corps et un élément du groupe de valeurs. Cela ne pose pas de difficulté particulière du point de vue de la théorie des modèles, qui peut parfaitement fonctionner sur des théories à plusieurs sortes. Notons tout de même qu'il y a de nombreux choix possibles de sortes pour les corps valués. Par exemple, il est possible de regarder une théorie dont les trois sortes seraient (K, Γ, k) (corps valué, groupe de valeurs, corps résiduel), mais aussi une théorie qui n'aurait qu'une seule sorte (pour le corps valué), avec une relation unaire (c'est-à-dire une partie de K) pour l'anneau des entiers. Ici, nous choisirons de travailler avec trois sortes (K, RV, Γ) . La sorte du milieu, RV, est un groupe, défini par $\text{RV} = K^\times / (1 + \mathfrak{m})$. On dispose donc de morphismes de groupes $\text{rv} : K^\times \rightarrow \text{RV}$ et $v_\Gamma : \text{RV} \rightarrow \Gamma$, dont la composée redonne la valuation (du moins sur K^\times ; si on veut retrouver la valuation sur tout K , on peut par exemple rajouter un point ∞ à RV, et définir $\text{rv}(0) = \infty$). Toutes les théories de corps valués que nous avons décrites sont « les mêmes », en un sens précis de la théorie des modèles : elles sont *interprétables* les unes dans les autres.

Expliquons le sens de RV. On a une suite exacte

$$1 \rightarrow k^\times \rightarrow \text{RV} \rightarrow \Gamma \rightarrow 1.$$

Ainsi, RV est un amalgame entre le corps résiduel et le groupe de valeurs (d'où son nom : R pour résiduel, V pour valeurs). Il est utile de comprendre les classes d'équivalence de K^\times associées à RV ; pour cela, nous regardons l'exemple de $K = \mathbf{C}((t))$. Un point de K^\times s'écrit de façon unique

$$x = \alpha t^{v(x)}(1 + ty),$$

avec $y \in \mathbf{C}[[t]]$. Le facteur $\alpha t^{v(x)}$ est le terme dominant de la série de Laurent x . Ainsi, dire que deux points x et y de K^\times ont la même image dans RV, c'est dire qu'ils ont le même terme dominant. En général, on n'a pas de section canonique de la suite exacte précédente (là où, pour $\mathbf{C}((t))$, une section est induite par $n \in \Gamma = \mathbf{Z} \mapsto t^n$).

Une fois ce choix de sortes effectué, on dispose d'un langage des corps valués qui lui est associé. Ce langage est celui des corps sur K , des groupes abéliens ordonnés divisibles sur Γ et des groupes sur RV (soit $1, \times$ et inv la fonction inverse). On met de plus deux symboles pour relier les sortes entre elles : la fonction rv et la fonction v_Γ , définies précédemment. On peut alors transcrire les propriétés énoncées plus haut en axiomes, et ainsi obtenir la théorie ACVF des corps algébriquement clos (en anglais, *algebraically closed valued fields*). Elle n'est pas complète, puisqu'il faut encore préciser la caractéristique de K et de son corps résiduel (avec la contrainte que, si K est de caractéristique $p > 0$, alors le corps résiduel aussi). Les théories ACVF(p, q) obtenues en imposant que K soit de caractéristique p et son corps résiduel de caractéristique q sont, quant à elles, complètes.

Un fait fondamental, dû à Robinson [Rob77], est le suivant :

Théorème 3.7. *La théorie ACVF élimine les quantificateurs.*

Pour rappel, un ensemble semi-algébrique est un ensemble défini par des équations polynomiales et par des inéquations entre des valuations de polynômes. En particulier, on déduit que théorème que, sur la sorte K , les parties définissables (éventuellement avec des paramètres) sont les ensembles semi-algébriques.

Il est également important de noter les deux faits suivants (qui suivent de l'élimination des quantificateurs) :

Corollaire 3.8. (1) *La structure induite par ACVF sur la sorte Γ est celle de groupe abélien ordonné divisible. Autrement dit, dans tout modèle $M = (K_M, RV_M, \Gamma_M)$ de ACVF, une partie définissable de Γ_M par une formule de ACVF et avec des paramètres dans M est déjà définissable par une formule de DOAG et avec des paramètres dans Γ_M .*

(2) *La structure induite par ACVF sur le corps résiduel est celle de corps algébriquement clos.*

Remarque 3.9. On peut voir le corps résiduel comme le noyau de l'application v_Γ (au 0 près, du moins). Du point de vue de la théorie des modèles, les détails tels que la présence ou l'absence de 0 dans l'ensemble ainsi défini n'ont que peu d'importance. Ils ne changent pas la combinatoire des parties définissables, et on peut y remédier si on le souhaite, au prix de grandes lourdeurs dans les définitions - et c'est pourquoi il est plus fréquent de s'en abstenir.

Démonstration. Comme pour le caractère fortement minimal de ACF, par élimination des quantificateurs et stabilité du résultat par combinaison booléenne, il suffit de traiter le cas des formules atomiques, ce qui se fait de façon élémentaire en remarquant qu'une formule atomique ne peut avoir qu'un nombre très limité de formes. \square

4. UNE ESQUISSE DE L'APPROCHE DE HRUSHOVSKI ET KAZHDAN

Une intégrale motivique, informellement, est un morphisme d'un groupe de Grothendieck de parties semi-algébriques sur un espace d'arcs (pour ce qui nous préoccupe, sur un corps valué) vers un groupe de Grothendieck de variétés algébriques sur un corps, qui satisfait de plus certaines propriétés comme le théorème de Fubini ou la formule de changement de variables.

L'intégration motivique de Hrushovski et Kazhdan [HK06] se situe dans cet esprit. La différence majeure avec l'intégration motivique « géométrique » de Kontsevich ou Denef-Loeser [DL98] est le recours à la théorie des modèles comme cœur technique des preuves, ce qui évite notamment d'employer de puissants résultats de résolution des singularités. Nous allons commencer par définir précisément la source et le but de l'intégrale de Hrushovski et Kazhdan. La construction de celle-ci est ensuite très simple, la difficulté est de montrer ses propriétés (à commencer par la bonne définition). Nous n'en ferons rien, laissant là les détails techniques. Nous ne chercherons pas non plus à expliquer les différentes variantes de cette intégrale (dans l'article d'origine de Hrushovski et Kazhdan, on compte déjà un grand nombre de différentes intégrales, avec ou sans forme volume, avec différents choix de caractéristique d'Euler...). Nous ne traiterons que le cas le plus simple, celui de l'intégrale motivique sans forme volume, sur $ACVF(0, 0)$. Une intégrale motivique sans forme volume est davantage à interpréter comme une vaste généralisation de la caractéristique d'Euler. Le cas qui correspond vraiment à l'intuition de l'intégration est celui avec forme volume, plus lourd à expliquer, mais techniquement proche du précédent.

Remarque 4.1. Dans toute cette section, « définissable » signifie « définissable sans paramètres ». Plus précisément, on fixe l'ensemble des paramètres (qui doit être dans la sorte K), et seuls des paramètres dans cet ensemble sont autorisés.

Dans toute la suite, sauf mention contraire, on suppose toujours qu'on travaille en caractéristique nulle (c'est-à-dire que les corps valués aussi bien que leurs corps résiduels sont de caractéristique nulle).

4.1. La source. Une notion de dimension est nécessaire à l'intégrale. On définit donc des catégories $K[n, \cdot]$, dont les objets sont les parties définissables X de (modèles de) ACVF dans les sortes K et RV , telles qu'il existe une fonction définissable $f : X \rightarrow K^n \times RV^*$ à fibres finies (où l'exposant $*$ désigne simplement un exposant quelconque; si l'on veut, il existe m tel qu'il existe une fonction définissable $f : X \rightarrow K^n \times RV^m$). Les morphismes, dans cette catégorie, sont les fonctions définissables. Définissons également $K[n]$ comme étant la sous-catégorie pleine de $K[n, \cdot]$ des objets X pour lesquels il existe une fonction définissable à fibres finies $f : X \rightarrow K^n$ (une sous-catégorie pleine est la donnée d'une sous-famille d'objets d'une catégorie, et on conserve les morphismes de la catégorie initiale). On peut alors poser $K[*]$ l'union disjointe des $K[n]$, $n \geq 0$. Posons également $K[\leq n] = \bigsqcup_{m \leq n} K[m]$.

Il est alors possible de considérer le groupe de Grothendieck de ces catégories, défini comme précédemment par générateurs et relations, et noté par exemple $K_0(K[*])$ pour $K[*]$. Celui-ci est un anneau.

4.2. Le but. De même, une notion de dimension va être nécessaire. Mais d'autres subtilités apparaissent. Soit $\text{RV}[n]$ la catégorie des paires (U, f) , avec $U \subset \text{RV}^*$ une partie définissable et $f : U \rightarrow \text{RV}^n$ à fibres finies. Un morphisme $g : (U, f) \rightarrow (U', f')$ est une fonction définissable $g : U \rightarrow U'$, sans condition de compatibilité aux fonctions f et f' . On peut alors définir $\text{RV}[*]$ comme étant l'union disjointe de ces catégories, puis $K_0(\text{RV}[*])$ son groupe de Grothendieck. Il s'agit d'un anneau.

4.3. Le morphisme \mathcal{L} . Soit $(U, f) \in \text{Ob RV}[n]$. On pose :

$$\mathcal{L}(U, f) = U \times_{f, \text{rv}} (K^\times)^n.$$

Ainsi, les points de $\mathcal{L}(U, f)$ sont les couples (u, x) , avec $u \in U$ et $x \in (K^\times)^n$ tels que $\text{rv}(x) = f(u)$. Remarquons que la projection $(u, x) \in \mathcal{L}(U, f) \mapsto x \in (K^\times)^n$ est à fibres finies, car c'est le cas de f . On a donc obtenu une fonction

$$\text{Ob RV}[n] \rightarrow \text{Ob } K[n]$$

Cette fonction n'est pas un foncteur *a priori*, car cela pose des problèmes de choix de relèvement. En revanche, il est clair que c'est compatible aux unions disjointes et aux produits cartésiens (et donc, dans les groupes de Grothendieck, \mathcal{L} pourrait être un morphisme d'anneaux). On a de plus les résultats suivants :

Proposition 4.2. (1) *L'image de $\mathcal{L} : \text{Ob RV}[n] \rightarrow \text{Ob } K[n]$ rencontre toutes les classes d'isomorphisme.*

(2) *Soient $(U_i, f_i) \in \text{Ob RV}[*], i = 1, 2$. Alors $\mathcal{L}(U_1, f_1)$ et $\mathcal{L}(U_2, f_2)$ sont isomorphes si et seulement si $[U_1, f_1] - [U_2, f_2]$ est dans l'idéal engendré par $[1_1] - ([1_0] + [\text{RV}_{>0}])$.*

Ici, on a noté $1_n \in \text{Ob RV}[n]$ le couple $(\{1\}, \text{id})$, et $\text{RV}_{>0} \in \text{Ob RV}[*]$ le couple $(\{x \in \text{RV} : v_\Gamma(x) > 0\}, \text{id})$. On peut voir que $\mathcal{L}(1_1)$ est bien isomorphe à $\mathcal{L}(1_0) \sqcup \mathcal{L}(\text{RV}_{>0})$. En effet, le premier est l'ensemble des $(1, x) \in \text{RV} \times K^\times$ tels que $\text{rv}(x) = 1$ et est donc en bijection définissable avec $1 + \mathfrak{m}$, donc avec \mathfrak{m} . Le second, quant à lui, est l'union disjointe d'un point avec l'ensemble des $(u, x) \in \text{RV} \times K^\times$ tels que $v_\Gamma(u) > 0$ et $u = \text{rv}(x)$. Il est donc en bijection définissable avec l'ensemble des $x \in K^\times$ tels que $v(x) > 0$, soit exactement $\mathfrak{m} \setminus \{0\}$.

On a également le résultat suivant, plus difficile :

Proposition 4.3. *Soit $g : (U_1, f_1) \rightarrow (U_2, f_2)$ un morphisme de $\text{RV}[n]$. Alors il existe un morphisme $\mathcal{G} : \mathcal{L}(U_1, f_1) \rightarrow \mathcal{L}(U_2, f_2)$ qui relève \mathcal{G} , c'est-à-dire que pour tout $(u, x) \in \mathcal{L}(U_1, f_1)$, si on écrit $\mathcal{G}(u, x) = (u_2, x_2)$, alors $u_2 = g(u)$.*

Remarque 4.4. Ce relèvement existe, mais n'est pas canonique. On n'a donc toujours pas un foncteur. Cependant, avec les résultats précédents, cela va suffire à conclure.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème principal de ce mémoire (Hrushovski et Kazhdan, [HK06], Theorem 8.8) :

Théorème 4.5. *Soit I l'idéal engendré par $[1_1] - ([1_0] + [\text{RV}_{>0}])$ dans l'anneau $K_0(\text{RV}[*])$. Il existe alors un unique isomorphisme d'anneaux*

$$\int^{mot} : K_0(K[*]) \rightarrow K_0(\text{RV}[*])/I$$

tel que, pour tout $(U, f) \in \text{Ob RV}[*]$ et $X \in \text{Ob } K[*]$, on ait

$$\int^{mot} [X] = [U, f] \in K_0(\text{RV}[*])/I \iff [X] = [\mathcal{L}(U, f)] \in K_0(K[*]).$$

Remarque 4.6. Comme indiqué précédemment, cet isomorphisme satisfait également un théorème de Fubini. La formule de changement de variable, dans ce cas, revient plus ou moins au fait que deux ensembles en bijection définissable ont la même intégrale. Dans la version avec forme volume de cette même intégrale, ces deux théorèmes prennent des formes plus proches des formes habituelles dans un cours de calcul intégral réel.

Démonstration. La bonne définition vient de la première proposition énoncée ci-dessus : elle permet de vérifier que, étant donnée une classe d'isomorphisme de $\text{Ob } K[*]$, elle rencontre l'image de \mathcal{L} , puis de voir que l'intégrale motivique obtenue ne dépend pas du représentant. La surjectivité est évidente. Enfin, l'injectivité est conséquence de la seconde proposition (avec encore quelques arguments, mais plus rien de très technique). \square

Toutes les propositions intermédiaires reposent sur une étude approfondie de la théorie des modèles des corps valués algébriquement clos de caractéristique nulle.

Question 4.7. Est-il possible de développer semblable théorie de l'intégration motivique en caractéristique strictement positive ?

À ce jour, toutes les théories de l'intégration motivique fonctionnent seulement en caractéristique nulle - soit, dans le cas des théories de Cluckers-Loeser et Hrushovski-Kazhdan, à cause d'une mauvaise compréhension de la théorie des modèles des corps valués algébriquement clos en caractéristique strictement positive (par exemple, on ne connaît pas de bonne théorie de la dimension), soit, dans le cas de l'intégration motivique de Denef-Loeser, parce qu'appliquer cette théorie requiert des résultats d'élimination des singularités, démontrés par Hironaka en caractéristique nulle mais toujours inconnus en caractéristique strictement positive.

5. QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATIONS ET CONJECTURES

Pour finir, citons quelques exemples d'applications de l'intégration motivique et de conjectures. Tous les exemples cités ici n'emploient pas l'intégration motivique de Hrushovski et Kazhdan, certains utilisent l'intégration motivique de Denef-Loeser ou de Cluckers-Loeser.

5.1. Fonction ζ d'Igusa et conjecture de monodromie. L'un des principaux domaines d'applications de l'intégration motivique est la théorie des singularités, avec par exemple une généralisation au-delà des corps locaux de la notion de densité locale (Forey, [For17]), ou encore, grâce au théorème de Larsen-Lunts [LL01], de nombreuses applications à la géométrie birationnelle. L'une des principales motivations au développement de l'intégration motivique et à son utilisation en théorie des singularités, néanmoins, est la conjecture de monodromie d'Igusa, pour la présentation de laquelle nous suivons Chambert-Loir, Nicaise et Sebag [CNS18].

Soit $f : \mathbf{C}^d \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique non constante, et posons $V_f = f^{-1}(0)$. Soit $x \in V_f$. Dans ce cas, V_f est un sous-espace analytique de X , de pure codimension 1. Pour $\epsilon, \eta > 0$, on note $B(x, \epsilon)$ la boule ouverte dans X de centre x et de rayon ϵ (définie *via* un plongement de X dans \mathbf{C}^N , pour N assez grand, au voisinage de x), et $D(0, \eta)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon η , ainsi que $D^*(0, \eta) = D(0, \eta) \setminus \{0\}$ sa version épointée. On définit la fibration de Milnor ([Mil68]) grâce au théorème suivant :

Théorème 5.1. *Soit $\epsilon, \eta > 0$. Si ϵ est suffisamment petit, et η suffisamment petit par rapport à ϵ , alors l'application analytique*

$$f_x : B(x, \epsilon) \cap f^{-1}(D^*(0, \eta)) \rightarrow D^*(0, \eta),$$

déduite de f par restriction, est une fibration localement triviale de variétés \mathbf{C}^∞ .

La fibre de cette fibration est appelée *fibre de Milnor*, et nous la notons F_x . Il s'agit d'un invariant de la singularité. D'autre part, on dispose d'un lacet naturel dans la base de la fibration $D^*(0, \eta)$. Ce lacet induit une application de la fibre dans elle-même, notée $M_x : F_x \rightarrow F_x$, bien définie à homotopie près. En particulier, M_x induit un automorphisme de la cohomologie singulière à coefficients entiers de F . On suppose désormais que $f \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_d]$ est un polynôme, et que ses coefficients sont algébriques ; en particulier, ils sont contenus dans un certain corps de nombres L (*i.e.* dans une certaine extension finie de \mathbf{Q}). Soit v une place non archimédienne de L , c'est-à-dire une valuation non triviale sur L (qui en fait donc un corps valué), et soit K la complétion de L pour cette valuation. Soit $\Phi : K^d \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue et à support compact (en particulier, Φ est localement constante, car K est totalement discontinu). On peut alors considérer la fonction zêta locale d'Igusa :

$$Z_v(\Phi, f, s) = \int_{K^d} |f(x)|^s \Phi(x) dx.$$

Il s'agit d'une fonction rationnelle en q_K^{-s} , où q_K est le cardinal du corps résiduel de K .

Conjecture 5.2 (Conjecture de monodromie d'Igusa). *Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ un pôle de la fonction zêta locale d'Igusa $Z_K(\Phi, f, s)$. Alors il existe un point $x \in V_f(\mathbf{C})$ tel que $\exp(2i\pi \operatorname{Re}(\alpha))$ soit une valeur propre de l'action de monodromie M_x sur la cohomologie de la fibre de Milnor F_x de f en x .*

Cette conjecture possède un analogue motivique, dû à Denef et Loeser [DL98] et depuis également développé dans les autres théories d'intégration motivique, par exemple par Fichou et Yin [FY21], ce qui permet d'avoir plusieurs regards sur le même objet. La conjecture motivique implique la conjecture d'origine - du moins, en grande caractéristique résiduelle. Elles constituent un important sujet d'étude en théorie des singularités.

5.2. Lemme fondamental. L'intégration motivique, telle que nous l'avons définie, est purement géométrique, c'est-à-dire qu'on travaille sur un corps algébriquement clos. Mais il est possible de développer des variantes arithmétiques (Denef et Loeser, dans [DL99], en donnent le premier exemple). Dans celles-ci, le corps résiduel n'est pas fini - du point de vue de la théorie des modèles, c'est à éviter - mais *pseudo-fini*, c'est-à-dire, en bref, qu'il s'agit d'un modèle infini de la théorie des corps finis (laquelle « ne sait pas » que ces corps sont finis, d'après le théorème de compacité : en effet, il y en a d'arbitrairement grands). Ces corps se comportent à bien des aspects comme les corps finis, et un résultat vrai pour les corps pseudo-finis, en théorie des modèles, est vrai pour tous les corps finis suffisamment grands.

Certains résultats de nature plutôt arithmétique ont été démontrés dans un contexte d'intégration motivique, comme la formule de Poisson motivique de Hrushovski et Kazhdan ([HK09]), qui ne fait pas appel à de l'intégration motivique mais s'en inspire.

Une application remarquable de la théorie de l'intégration motivique (de Cluckers-Loeser, sur des corps pseudo-finis) est la preuve que Forey, Loeser et Wyss ont donnée en 2024 [FLW24] d'une version motivique du lemme fondamental. Il ne sera pas question ici de ce qu'est le lemme fondamental - à ce sujet, on se reportera par exemple à l'exposé de Hales au séminaire Bourbaki, [Hal12]. Il s'agit d'un résultat extrêmement important du programme de Langlands, conjecturé dans les années 1980 par Langlands et Shelstad et abondamment utilisé par la suite, notamment par Arthur pour établir la classification endoscopique des représentations des groupes classiques. Il n'a été démontré qu'en 2008, par Ngô ([Ngô10]), en utilisant des faisceaux pervers. Une autre preuve, due à Groechenig, Wyss et Ziegler ([GWZ19]) et datant de 2019, emploie l'intégration p -adique. C'est cette preuve que Forey, Loeser et Wyss ont adaptée pour obtenir une version motivique, formalisant ainsi l'intuition selon laquelle le lemme fondamental est de nature géométrique. Un aspect très intéressant de cette preuve est le fait que le recours à l'intégration p -adique (ou motivique) permet d'ignorer ce qui se passe sur le lieu non générique : en effet, le lieu générique forme un ouvert dense, et pour calculer une intégrale chacun sait qu'il est toujours possible de se restreindre à un ouvert dense du domaine. Il est possible que cette approche via l'intégration p -adique permette de traiter les quelques cas encore ouverts du lemme fondamental (à savoir le lemme fondamental pondéré d'Arthur et le lemme fondamental pondéré non standard de Waldspurger), ce qui, comme l'indiquent Atobe, Gan, Ichino, Kaletha, Mínguez et Shin dans [Ato+25], permettrait de clore la preuve de la classification endoscopique d'Arthur pour les groupes classiques.

Toujours sur le lemme fondamental, un apport de la théorie des modèles joue un rôle important. En effet, le lemme fondamental est habituellement utilisé sur \mathbf{Q}_p , ou plus généralement en caractéristique mixte. Or les différentes preuves citées ici fonctionnent seulement en caractéristique positive. Pour passer de l'un à l'autre cas, deux techniques de preuve sont possibles. La première, due à Waldspurger [Wal06] [Wal09], est purement *ad hoc*. La seconde, due à Cluckers, Hales et Loeser [CHL07], consiste à exploiter un principe plus général énoncé par Cluckers et Loeser [CL10] dans le langage de leur intégration motivique. Ce principe affirme, *grosso modo*, que, en caractéristique résiduelle suffisamment grande, l'égalité de deux fonctions constructibles - et, partant, de deux intégrales p -adiques de fonctions constructibles, par exemple - sur un certain corps local F ne dépend que du corps résiduel de F . Il existe encore un certain nombre de variantes du lemme fondamental pour lesquelles le transfert n'a pas été établi ; il est hautement probable que les techniques de Cluckers et Loeser s'appliquent à ces cas également, l'objectif étant donc de parvenir à exprimer certaines intégrales dans le langage de la théorie des modèles.

6. CONCLUSION

L'intégration motivique, on l'a vu, est un outil qui s'inspire de l'intégration p -adique (et, de façon plus lointaine, de l'intégration sur les réels), en permettant à la fois :

- de la généraliser au-delà des seuls corps locaux (c'est-à-dire localement compacts ; il coïncident avec les corps de groupe de valeurs \mathbf{Z} et de corps résiduel fini), par exemple à des corps très concrets et souvent utilisés comme $\mathbf{C}((t))$;
- de calculer des invariants plus fins qu'un volume ou une caractéristique d'Euler, à savoir une classe dans un groupe de Grothendieck des variétés, lequel possède des spécialisations à de nombreux invariants cohomologiques.

Elle présente cependant certaines limitations : elle n'est disponible qu'en caractéristique résiduelle nulle, et les calculs au-delà de certains classes bien comprises de corps sont particulièrement difficiles. On peut cependant nuancer le premier point. En effet, le lecteur aura peut-être remarqué que, pour l'application au lemme fondamental, nous avons appliqué l'intégration motivique en caractéristique résiduelle strictement positive. En fait, nous avons pu le faire car nous ne travaillions pas en caractéristique fixée, mais uniformément pour tout premier, et dans ce cas, grâce au théorème de compacité, les résultats vrais en caractéristique nulle demeurent vrais en grande caractéristique.

L'intégration motivique possède des applications à des domaines variés, comme la théorie des singularités ou la géométrie arithmétique. Elle permet de traiter efficacement certaines questions, en particulier lorsqu'il s'agit d'obtenir des résultats de transfert ou de prouver l'uniformité de certaines bornes - encore une fois, tout cela découle plus ou moins du théorème de compacité et de résultats d'élimination des quantificateurs dans les corps valués (sous une hypothèse d'hensélianité).

RÉFÉRENCES

- [Ato+25] Hiraku ATOBE et al. *Local Intertwining Relations and Co-tempered $SA\mathbb{S}$ -packets of Classical Groups*. 25 juill. 2025. arXiv : [2410.13504\[math\]](#). (Visité le 03/09/2025).
- [CHL07] R. CLUCKERS, T. HALES et F. LOESER. *Transfer Principle for the Fundamental Lemma*. 5 déc. 2007. arXiv : [0712.0708\[math\]](#).
- [CL08] Raf CLUCKERS et François LOESER. “Constructible motivic functions and motivic integration”. In : *Inventiones mathematicae* 173.1 (juill. 2008), p. 23-121. ISSN : 0020-9910, 1432-1297.
- [CL10] Raf CLUCKERS et François LOESER. “Constructible exponential functions, motivic Fourier transform and transfer principle”. In : *Annals of Mathematics* 171.2 (25 mars 2010), p. 1011-1065. ISSN : 0003-486X.
- [CNS18] Antoine CHAMBERT-LOIR, Johannes NICAISE et Julien SEBAG. *Motivic Integration*. T. 325. Progress in Mathematics. New York, NY : Springer New York, 2018. ISBN : 978-1-4939-7885-4 978-1-4939-7887-8.
- [DL98] J. DENEFF et F. LOESER. *Motivic Igusa zeta functions*. 11 mars 1998. arXiv : [math/9803040](#).
- [DL99] J. DENEFF et F. LOESER. *Definable sets, motives and p -adic integrals*. 22 oct. 1999. arXiv : [math/9910107](#).
- [DM94] Lou van den DRIES et Chris MILLER. “On the real exponential field with restricted analytic functions”. In : *Israel Journal of Mathematics* 85.1 (1^{er} fév. 1994), p. 19-56. ISSN : 1565-8511.
- [FLW24] Arthur FOREY, François LOESER et Dimitri WYSS. *A motivic Fundamental Lemma*. 13 nov. 2024. arXiv : [2308.12195\[math\]](#).
- [For17] Arthur FOREY. “Motivic local density”. In : *Mathematische Zeitschrift* 287.1 (1^{er} oct. 2017), p. 361-403. ISSN : 1432-1823.
- [FY21] Goulwen FICHOU et Yimu YIN. “Motivic integration and Milnor fiber”. In : *Journal of the European Mathematical Society* 24.5 (21 juill. 2021), p. 1617-1678. ISSN : 1435-9855.
- [GWZ19] Michael GROECHENIG, Dimitri WYSS et Paul ZIEGLER. *Geometric stabilisation via p -adic integration*. 28 oct. 2019. arXiv : [1810.06739\[math\]](#).
- [Hal12] Thomas HALES. “The Fundamental Lemma and the Hitchin fibration”. In : *Séminaire Bourbaki : volume 2010/2011, exposés 1027-1042*. Séminaire Bourbaki 63.2010/11=Exposés 1027/1042. Paris : Société Mathématique de France, 2012, p. 233-263. ISBN : 978-2-85629-351-5.
- [HK06] Ehud HRUSHOVSKI et David KAZHDAN. “Integration in valued fields”. In : *Algebraic Geometry and Number Theory*. Sous la dir. de Victor GINZBURG. T. 253. Series Title: Progress in Mathematics. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 2006, p. 261-405. ISBN : 978-0-8176-4471-0 978-0-8176-4532-8.
- [HK09] E. HRUSHOVSKI et D. KAZHDAN. “Motivic Poisson Summation”. In : *Moscow Mathematical Journal* 9.3 (2009), p. 569-623. ISSN : 16093321, 16094514.
- [JPT18] Franziska JAHNKE, Daniel PALACÍN et Katrin TENT, éd. *Lectures in model theory*. Münster lectures in mathematics. Zürich : European Mathematical Society, 2018. 212 p. ISBN : 978-3-03719-184-2.
- [LL01] Michael LARSEN et Valery A. LUNTS. *Motivic measures and stable birational geometry*. 23 oct. 2001. arXiv : [math/0110255](#).
- [Mar02] D. MARKER. *Model theory: an introduction*. Graduate texts in mathematics 217. New York : Springer, 2002. 342 p. ISBN : 978-0-387-98760-6.
- [Mil68] John Willard MILNOR. *Singular Points of Complex Hypersurfaces: AM-61*. Annals of Mathematics Studies 61. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1968. 1 p. ISBN : 978-0-691-08065-9 978-1-4008-8181-9.
- [Ngô10] Bao Châu NGÔ. “Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie”. In : *Publications mathématiques de l'IHÉS* 111.1 (1^{er} juin 2010), p. 1-169. ISSN : 1618-1913.
- [Rob77] Abraham ROBINSON. *Complete theories*. 2d ed. Studies in logic and the foundations of mathematics. Amsterdam ; New York : North-Holland Pub. Co. : sole distributors for the U.S.A. et Canada, Elsevier/North-Holland, 1977. 129 p. ISBN : 978-0-7204-0690-0.

- [TZ12] Katrin TENT et Martin ZIEGLER. *A course in model theory*. Lecture notes in logic 40. OCLC: ocn761380363. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 2012. 248 p. ISBN : 978-0-521-76324-0.
- [Voi02] Claire VOISIN. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. Cours spécialisés 10. OCLC: ocm53175423. Paris : Société Mathématique de France, 2002. 595 p. ISBN : 978-2-85629-129-0.
- [Wal06] J.-L. WALDSPURGER. “Endoscopie et changement de caractéristique”. In : *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 5.3 (juill. 2006), p. 423-525. ISSN : 1475-3030, 1474-7480.
- [Wal09] Jean-Loup WALDSPURGER. “Endoscopie et changement de caractéristique : intégrales orbitales pondérées”. In : *Annales de l’Institut Fourier* 59.5 (2009), p. 1753-1818. ISSN : 1777-5310.
- [Yin10] Yimu YIN. *Quantifier elimination and minimality conditions in algebraically closed valued fields*. 7 juin 2010. arXiv : [1006.1393](https://arxiv.org/abs/1006.1393) [math].
- [Yin13] Yimu YIN. “Integration in algebraically closed valued fields with sections”. In : *Annals of Pure and Applied Logic* 164.1 (1^{er} jan. 2013), p. 1-29. ISSN : 0168-0072.