

Introduction au domaine de recherche Dérivation d'un système à diffusion croisée

Alexandre Bertolino

Encadré par :

Ayman Moussa
LJLL, Sorbonne Université

Vincent Bansaye
CMAP, Ecole polytechnique

Résumé

Après avoir introduit le système parabolique SKT, un système de particules en marche aléatoire qui converge vers SKT est défini. Des bornes sur les moments de ce système sont présentées. Celles-ci permettent d'appliquer des estimations de stabilité de l'EDP pour montrer quantitativement la convergence de la distribution spatiale des particules vers la solution du système SKT. La construction de solutions de l'EDP et l'obtention de l'estimation de stabilité jouent donc un rôle crucial.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Etude du système de particules stochastique	2
2.1	Processus de Markov à sauts	2
2.2	Description du système de particules	3
2.3	Décomposition en semi-martingale	4
2.4	Bornes sur les moments	5
3	Etude du problème de Cauchy parabolique	7
3.1	Estimations d'énergie	7
3.2	Estimation de stabilité et convergence du système de particules	9
3.3	Construction de solutions régulières	10

Remerciements. Je tiens à remercier mes directeurs de stage Ayman et Vincent pour leur encadrement de qualité, ainsi que le laboratoire Jacques-Louis Lions pour m'avoir accueilli en ses locaux où ce mémoire a été rédigé.

1 Introduction

Dans [9], Shigesada, Kawasaki et Teramoto obtiennent heuristiquement, à partir d'un modèle stochastique, un système d'équations décrivant la répartition dans l'espace de différentes espèces animales. Ce système, nommé d'après leurs initiales SKT, porte sur les densités de population u et v de deux espèces animales :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta((d_1 + a_1 v)u) = u(r_1 - s_{11}u - s_{12}v), \\ \partial_t v - \Delta((d_2 + a_2 u)v) = v(r_2 - s_{21}u - s_{22}v), \\ (u, v)(0, \cdot) = (u_0, v_0). \end{cases} \quad (1)$$

Le terme contenant un opérateur laplacien modélise la diffusion en espace de la population, c'est à dire le fait que les individus sont en marche aléatoire. Cette diffusion et sa marche aléatoire sous-jacente sont d'autant plus rapides que la densité de l'autre espèce et les coefficients d_i et a_i sont grands. Cela modélise le fait que la présence d'une espèce agite l'autre espèce, ce qui tend à la fait partir plus vite. Cette répulsion donne une propriété phare de ce type de modèles, en temps long il peut y avoir ségrégation entre les deux espèces. C'est pour cette propriété que le système SKT a été introduit. Les termes en r_i sont des termes de reproduction de chaque espèce et les s_{ij} modélisent la compétition intra et inter-espèces. Dans cette courte présentation, on donne un aperçu de l'étude du système d'EDP 1, ainsi que de sa dérivation rigoureuse. La dérivation est obtenue par une approche basée sur une discrétisation en espace, premièrement décrite dans [4], puis pleinement implémentée dans [3] dans le cas conservatif. L'inclusion des termes de réaction en dimension 1 est un progrès récent ([2]). Après la définition et l'étude du système de particules, on étudiera le caractère bien posé du système SKT.

2 Etude du système de particules stochastique

2.1 Processus de Markov à sauts

Le système de particules sera défini en tant que processus de Markov à sauts. Commençons par définir cette notion à l'aide d'un exemple. On considère un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ alternant entre deux états x_0 et x_1 . On suppose $X_0 = x_0$, note $T_0 = 0$ et définit par récurrence

$$T_{n+1} = \inf\{t > T_n : X(t) \neq X(T_n)\}.$$

Sous l'hypothèse que les trajectoires de (X_t) sont continues à droite, que l'on fait désormais, cette dernière quantité est en fait un minimum et $T_{n+1} > T_n$ pour tout n . Pour $t \in [T_n, T_{n+1}[$, $X_t = x_0$ si n est pair et $X_t = x_1$ si n est impair. On souhaite que pour tout temps T , la loi de $(X_t)_{t > T}$ soit déterminée uniquement par X_T . Ce caractère "sans mémoire" est typique des lois exponentielles et on s'attend donc à ce que si (X_t) a cette propriété, la loi sachant X_T du plus petit temps de saut après T soit exponentielle, de paramètre dépendant uniquement de X_T . En demandant que cette propriété reste vraie si T est un temps d'arrêt pour la filtration naturellement associée à (X_t) (ce qui est raisonnable, par exemple d'après la Proposition IV.1.3 de [5]), on peut décrire la loi de (T_n) . En effet, notons $\tau_n = T_{n+1} - T_n$. Alors, en appliquant le caractère sans mémoire de (X_t) , appelé aussi *propriété de Markov*, en $T = T_n$, on obtient que la loi de τ_n dépend uniquement de $X_{T_n} = x_{n \bmod 2}$ et est exponentielle. Ceci caractérise (T_n) :

Definition 2.1. *Un processus stochastique (X_t) aux trajectoires càdlàg, à valeurs dans $\{x_0, x_1\}$ et tel que $X_0 = x_0$ est appelé processus de Markov à sauts initialisé en x_0 si la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ de ses temps de saut satisfait, en posant $T_0 = 0$:*

- (i) $(T_{n+1} - T_n)_{n \geq 0}$ est une famille indépendante de variables aléatoires.
- (ii) Il existe c_0, c_1 tels que pour tout $n \geq 0$, $T_{n+1} - T_n$ suit une loi exponentielle de paramètre $c_n \pmod 2$.

On souhaite généraliser cette définition pour définir des processus de Markov avec un espace d'états plus grand. Soit (V, E) un graphe orienté avec V dénombrable et tel que pour tout $x \in V$, $E_x := \{y \in V \mid (x, y) \in E\}$ est fini. On munit chaque arête orientée $(x, y) \in E$ d'un taux de transition c_{xy} . On définit le processus de Markov à sauts (X_t) sur V ayant pour taux de transition $(c_e)_{e \in E}$ en décrivant la suite de ses temps de saut $(T_n)_{n \geq 1}$ et la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ des valeurs prises par X_t : $Y_n = X_{T_n}$ où on pose encore $T_0 = 0$. La construction se fait par récurrence. Si Y_n et T_n ont été construits, on tire sur chaque arête $e \in E$, un temps de saut $\tau_n^e \sim \mathcal{E}(c_e)$. On suppose ces temps de saut indépendants entre eux et indépendants de toutes les variables aléatoires introduites pour construire Y_n et T_n . En fait, seuls les temps de saut associés à une arête partant de Y_n nous intéressent et ils s'interprètent le manière suivante : pour chaque $x \in E_{Y_n}$, X_t a l'occasion de sauter de Y_n vers x au temps $T_n + \tau_n^{Y_n x}$. On obtient Y_{n+1} et T_{n+1} en faisant sauter X_t dès la première occasion, c'est-à-dire $Y_{n+1} = x$ et $T_{n+1} = T_n + \tau_n^{Y_n x}$ pour $x \in E_{Y_n}$ tel que $\tau_n^{Y_n x}$ soit minimal. Il peut être montré qu'un tel x est unique p.s.. Cette construction récursive demande uniquement de connaître préalablement $T_0 = 0$ et Y_0 , que l'on tire aléatoirement au début de la construction.

Ceci permet de construire (X_t) jusqu'au temps $T^* = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$. Il est possible que les temps de saut s'accumulent et qu'on ait $T^* < \infty$, ce qui empêche de définir X_t $t > T^*$. La preuve que $T^* = \infty$ se fait au cas par cas. Par exemple, la construction proposée dans la section IV.2 de [5] montre qu'il n'y a pas d'accumulation si les taux de saut sont bornés. Ainsi, l'accumulation des temps de saut s'accompagne de l'explosion des taux de transition. Il est possible de quantifier la corrélation entre le nombre de sauts d'un certain type et la somme des taux de transition de ce type à l'aide de principes de grandes déviations pour les variables aléatoires de Poisson (par exemple écrits dans [1], Théorème 1). Le cas particulier suivant de la Proposition 3.4 de [2] illustre cela :

Proposition 2.2. *Il existe deux constantes $c, C > 0$ telles que pour tout processus de Markov à sauts (X_t) sur (V, E) , en notant $\nu(x) = \sum_{y \in E_x} c_{xy}$ le taux total de transition depuis x et $N(t)$ le nombre de sauts effectués par $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$, pour tous $t, K > 0$ et $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$,*

$$\mathbb{P} \left(\int_0^t \nu(X_s) ds > K, \left| N(t) - \int_0^t \nu(X_s) ds \right| > \varepsilon \int_0^t \nu(X_s) ds \right) \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^3 K} \right) e^{-c\varepsilon^2 K}.$$

On peut aussi voir que si $N(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$, alors $N(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \int_0^t \nu(X_s) ds$.

2.2 Description du système de particules

On travaille sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le tore de dimension 1, qu'on discrétise en posant pour $M \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{T}_M := \{x_j \mid j \in \mathbb{N} \cap [0, M-1]\}, \quad \text{avec } x_j := \frac{j}{M}.$$

Pour $0 \leq i \leq M$, le vecteur $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}_M}$ est défini par $\mathbf{e}_M = \mathbf{e}_0$ si $i = M$ et

$$\mathbf{e}_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour décrire le système de particules, on commence par fixer la masse des individus de chaque population à $1/N$, où $N \in \mathbb{N}^*$. Soient, pour $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{U}^{M,N}(t), \mathbf{V}^{M,N}(t) \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}^M}$ les distributions de masse respectives des espèces 1 et 2. Puisque les individus sont de masse $1/N$, il y a donc par exemple $N\mathbf{U}^{M,N}(t, x)$ individus de l'espèce 1 au temps t sur le site $x \in \mathbb{T}^M$. Le processus $(\mathbf{U}^{M,N}, \mathbf{V}^{M,N})$ évolue en tant que processus de Markov à sauts avec les transitions suivantes depuis la configuration $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}^M} \times \mathbb{R}^{\mathbb{T}^M}$:

- Naissance d'un individu de l'espèce 1 sur le site x_i , qui correspond au saut $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow (\mathbf{u} + \frac{1}{N}\mathbf{e}_i, \mathbf{v})$ et s'effectue au taux $N\mathbf{u}(x_i)r_1$.
- Mort d'un individu de l'espèce 1 sur le site x_i , qui correspond au saut $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow (\mathbf{u} - \frac{1}{N}\mathbf{e}_i, \mathbf{v})$ et s'effectue au taux $N\mathbf{u}(x_i)(s_{11}\mathbf{u}(x_i) + s_{12}\mathbf{v}(x_i))$.
- Déplacement d'un individu de l'espèce 1 du site x_i vers le site $x_{i\pm 1}$, qui correspond au saut $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow (\mathbf{u} + \frac{1}{N}(\mathbf{e}_{i\pm 1} - \mathbf{e}_i), \mathbf{v})$ et s'effectue au taux $M^2N\mathbf{u}(x_i)(d_1 + a_1\mathbf{v}(x_i))$.
- Des transitions analogues pour les individus de l'espèce 2.

Expliquons l'expression de ces taux de transition. Chacun d'entre eux a la structure $N\mathbf{u}(x_i)f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ peut être vu comme le taux de la transition en question pour un seul individu. En multipliant ce taux individuel par le nombre d'individus sur le site $N\mathbf{u}(x_i)$, on obtient le taux de transition annoncé. On lit alors sur les taux de transition que chaque individu donne naissance à un taux constant, meurt d'autant plus probablement que son site est peuplé et se déplace plus fréquemment lorsqu'il y a plus d'individus de l'autre espèce sur le même site. Le scaling en M^2 de la marche aléatoire est un scaling diffusif classique.

Pour que cela définisse $(\mathbf{U}^{M,N}(t), \mathbf{V}^{M,N}(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, il faut vérifier que les temps de transition du système ne s'accumulent pas. D'après les remarques faites à la section précédente, cela revient à demander que les temps de transition n'explodent pas, ce qui, à M et N fixés, revient à demander que $(\mathbf{U}^{M,N}(t), \mathbf{V}^{M,N}(t))$ n'explode pas, ce qui est assuré par la proposition suivante :

Proposition 2.3. *Soit (T_n) la suite des temps de saut successifs de (\mathbf{U}, \mathbf{V}) et $T^* = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$. On note S_i la borne supérieure de $b_i - d_i$. Alors $T^* = +\infty$ p.s. et on a l'estimation suivante :*

$$\mathbb{E} \|\mathbf{U}^{M,N}(t)\|_1 \leq e^{r_1 t} \mathbb{E} \|\mathbf{U}^{M,N}(0)\|_1, \quad \mathbb{E} \|\mathbf{V}^{M,N}(t)\|_1 \leq e^{r_2 t} \mathbb{E} \|\mathbf{V}^{M,N}(0)\|_1, \quad (2)$$

où $\|\mathbf{u}\|_1 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |\mathbf{u}(x_i)|$ désigne la masse totale de \mathbf{u} .

Preuve heuristique. Le taux de naissance global de l'espèce 1, correspondant au saut $\|\mathbf{u}\|_1 \rightarrow \|\mathbf{u}\|_1 + \frac{1}{N}$, est obtenu en sommant les taux de naissance sur chaque site et vaut donc $N \|\mathbf{u}\|_1 r_1$. Considérons \mathbf{u}^M un analogue déterministe et continûment dérivable en temps de $\mathbf{U}^{M,N}$. Alors on aurait

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^M(t)\|_1 = \frac{1}{N} N \|\mathbf{u}^M(t)\|_1 r_1 - (\text{termes de mort}) \leq r_1 \|\mathbf{u}^M(t)\|_1.$$

Le lemme de Grönwall permettrait alors de conclure que \mathbf{u}^M satisfait l'estimation demandée sur $\mathbf{U}^{M,N}$, ce qui montre que $\mathbf{U}^{M,N}$ satisfait cette estimation. \square

2.3 Décomposition en semi-martingale

On aimerait que le processus $(\mathbf{U}^{M,N}, \mathbf{V}^{M,N})$ ait un comportement proche de celui des solutions de (1), qui peut être discrétisé pour obtenir le problème de Cauchy suivant sur $\mathbb{R}^{\mathbb{T}^M} \times \mathbb{R}^{\mathbb{T}^M}$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{u}^M = \Delta_M((d_1 + a_1 \mathbf{v}^M) \mathbf{u}^M) + \mathbf{u}^M(r_1 - s_{11} \mathbf{u}^M - s_{12} \mathbf{v}^M) \\ \frac{d}{dt} \mathbf{v}^M = \Delta_M((d_2 + a_2 \mathbf{u}^M) \mathbf{v}^M) + \mathbf{v}^M(r_2 - s_{21} \mathbf{u}^M - s_{22} \mathbf{v}^M) \\ (\mathbf{u}^M(0), \mathbf{v}^M(0)) = (\mathbf{u}_0^M, \mathbf{v}_0^M) \end{cases}, \quad (3)$$

où $\Delta_M \mathbf{u}(x) = M^2(\mathbf{u}(x + \frac{1}{M}) + \mathbf{u}(x - \frac{1}{M}) - 2\mathbf{u}(x))$. Pour assurer la simplicité des expressions, on ignore les termes de mort. Il serait souhaitable que le processus stochastique évolue en moyenne de la même manière que la solution de l'équation différentielle, avec des oscillations aléatoires en plus. Pour vérifier cela, on estime avec un raisonnement non rigoureux l'espérance de l'accroissement $d\mathbf{U}^{M,N}$ pendant la durée dt , connaissant l'état présent $(\mathbf{U}^{M,N}, \mathbf{V}^{M,N})$ du système. La probabilité d'apparition d'une transition θ de l'espèce 1, de taux ν , pendant dt est νdt donc, avec les taux de transition donnés précédemment (et en ignorant les transitions correspondant à une mort),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[d\mathbf{U}^{M,N} | (\mathbf{U}^{M,N}, \mathbf{V}^{M,N})] &= \sum_{i=1}^M N \mathbf{U}^{M,N}(x_i) \left(r_1 \frac{1}{N} \mathbf{e}_i + M^2(d_1 + a_1 \mathbf{V}^{M,N}(x_i)) \frac{1}{N} (\mathbf{e}_{i+1} - \mathbf{e}_i) \right. \\ &\quad \left. + M^2(d_1 + a_1 \mathbf{V}^{M,N}(x_i)) \frac{1}{N} (\mathbf{e}_{i-1} - \mathbf{e}_i) \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^M \mathbf{U}^{M,N}(x_i) \left(r_1 \mathbf{e}_i + M^2(d_1 + a_1 \mathbf{V}^{M,N}(x_i)) (\mathbf{e}_{i+1} + \mathbf{e}_{i-1} - 2\mathbf{e}_i) \right) dt \\ &= (r_1 \mathbf{U}^{M,N} + \Delta_M((d_1 + a_1 \mathbf{V}^{M,N}) \mathbf{U}^{M,N})) dt. \end{aligned}$$

Les variations prévisibles de \mathbf{U} sont donc contenues par le processus

$$\mathbf{A}^{M,N}(t) := \mathbf{U}_0^{M,N} + \int_0^t r_1 \mathbf{U}^{M,N}(s) + \Delta_M((d_1 + a_1 \mathbf{V}^{M,N}(s)) \mathbf{U}^{M,N}(s)) ds,$$

qui rappelle l'équation (3), et le processus $\mathcal{M}^{M,N} := \mathbf{U}^{M,N} - \mathbf{A}^{M,N}$ contient les oscillations stochastiques de $\mathbf{U}^{M,N}$; c'est une martingale. La décomposition $\mathbf{U}^{M,N} = \mathbf{A}^{M,N} + \mathcal{M}^{M,N}$ est appelée *décomposition en semi-martingale* de $\mathbf{U}^{M,N}$. Le calcul précédent peut-être rendu rigoureux. Par exemple si le processus est défini à l'aide de mesures aléatoires de Poisson comme dans [3], la compensation des mesures de Poisson (voir par exemple la section II-3 de [8]) donne un méthode rigoureuse pour obtenir la décomposition en semi-martingale.

$\mathbf{U}^{M,N}$ vérifie donc l'équation suivante, proche de la formulation intégrale de (3) (sans termes de mort) :

$$\mathbf{U}^{M,N}(t) := \mathbf{U}_0^{M,N} + \int_0^t \Delta_M((d_1 + a_1 \mathbf{V}^{M,N}(s)) \mathbf{U}^{M,N}(s)) + r_1 \mathbf{U}^{M,N}(s) ds + \mathcal{M}^{M,N}(t). \quad (4)$$

Pour montrer que $(\mathbf{U}^{M,N}, \mathbf{V}^{M,N})$ est proche des solutions de (3) puis de celles de l'EDP limite, il faudra montrer que le terme martingale $\mathcal{M}^{M,N}(t)$ est négligeable, ce qui motive la recherche de bornes sur $\mathcal{M}^{M,N}$ et $\mathbf{U}^{M,N}$.

2.4 Bornes sur les moments

Une première borne sur les moments d'ordre 1 a été donnée en Proposition 2.3 pour justifier que $(\mathbf{U}^{M,N}(t), \mathbf{V}^{M,N}(t))$ est bien défini pour tout temps sous l'hypothèse que $\mathbb{E} \left\| \mathbf{U}_0^{M,N} + \mathbf{V}_0^{M,N} \right\|_1 < \infty$. On fait cette hypothèse dans la suite. Grâce aux termes de mort, il est possible de démontrer qu'on peut même borner le moment $\exp(c \left\| \mathbf{U}^{M,N} \right\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{T}_M)}^2)$ pour un $c > 0$, où \mathbb{T}_M est muni de la mesure uniforme (Corollaire 3.6 de [2])

Expliquons l'origine d'une telle borne dans le cas simplifié d'un processus (U_t) à valeurs dans \mathbb{N} pour lequel la transition de naissance $U \rightarrow U + 1$ a lieu au taux rU et la mort $U \rightarrow U - 1$ a lieu au taux sU^2 . Pour simplifier, supposons U_0 déterministe. Il suffit de montrer

Proposition 2.4. *Soit $T > 0$. Il existe deux constantes K_0 et $c > 0$ dépendant uniquement de U_0 et T telles que pour tout $K \geq K_0$,*

$$\mathbb{P}(\|U\|_{L^2([0,T])}^2 > K) = \mathbb{P}\left(\int_0^T U_t^2 dt > K\right) \leq e^{-cK}.$$

Preuve heuristique. La quantité à borner $s \int_0^T U_t^2 dt$ n'est autre que l'intégrale du taux de mortalité sur $[0, T]$, qui avec une grande probabilité doit être proche de $N_D(T)$, le nombre de morts entre 0 et T , si on admet une généralisation de la Proposition 2.2 où l'on ne compte que les morts au lieu de compter toutes les transitions. On cherche donc à estimer $N_D(T)$. Cette quantité doit être inférieure à $U_0 + N_B(T)$ où $N_B(T)$ est le nombre de naissances entre 0 et T . En effet, pour mourir il faut d'abord être né. Mais $N_B(T)$ est à son tour proche de l'intégrale du taux de naissance sur un événement de grande probabilité et on a donc

$$s \int_0^T U_t^2 dt \sim N_D(T) \leq U_0 + N_B(T) \lesssim U_0 + r \int_0^T U_t dt \leq U_0 + N_B(T) \lesssim U_0 + rT^{1/2} \left(\int_0^T U_t^2 dt\right)^{1/2},$$

où la dernière inégalité est l'inégalité de Hölder. On a une inégalité de la forme $x \leq a + b\sqrt{x}$, qui implique $x \leq 2a + b^2$, donc $\int_0^T U_t^2 dt$ a été majorée sur un événement de grande probabilité \square

Notons que la preuve repose fortement sur le fait que le taux de naissance soit négligeable devant le taux de mort en grande population. On ne peut pas espérer obtenir de tels moments sans cette propriété. Par exemple, si (U_t) est le processus de Poisson, qui a pour seule transition la naissance $U \rightarrow U + 1$ à taux constant 1, alors $U(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre t et admet donc des moments exponentiels, c'est-à-dire $\mathbb{E}[e^{cU(t)}] < \infty$ pour tout $c > 0$; mais $\mathbb{E}[e^{cU(t)^\alpha}] = \infty$ pour tous $c > 0$ et $\alpha > 1$.

Cette borne sur un moment sur-exponentiel de $(\mathbf{U}^{M,N}, \mathbf{V}^{M,N})$ permet de borner tous les moments suffisants pour assurer que $\mathcal{M}^{M,N}$ est une martingale admettant des moments ordinaires de tout ordre. Il est possible d'estimer plus finement l'ordre de grandeur de la martingale en la voyant comme un terme de fluctuation de $\mathbf{U}^{M,N}$ autour de \mathbf{u}^M et en appliquant l'heuristique suivante :

$$\text{Taille de la fluctuation} = \sqrt{\text{Nombre de pas de la fluctuation} \times \text{Taille d'un pas de la fluctuation}} \quad (5)$$

$$= \sqrt{\text{Temps} \times \text{Fréquence des pas}} \times \text{Taille d'un pas}. \quad (6)$$

La deuxième égalité est claire, la première correspond au théorème central limite. En effet, si $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille i.i.d. de variables aléatoires centrées, avec X_i d'ordre de grandeur caractéristique (écart-type) σ , alors le théorème central limite indique que $\sum_{i=1}^n X_i$ est de l'ordre de $\sqrt{n}\sigma$.

Appliquons cette estimation à la martingale $\mathcal{M}^{M,N}$. La taille caractéristique des pas de fluctuation correspond à la taille des sauts de $\mathbf{U}^{M,N}$, d'ordre $\|\frac{1}{N}\mathbf{e}_i\|_1 = \frac{1}{MN}$. La fréquence est donnée par la fréquence des transitions de $\mathbf{U}^{M,N}$, qui pour M suffisamment grand est dominée par les transitions de type déplacement, dont le taux total est

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M NM^2 \mathbf{U}^{M,N}(x_i)(d_1 + \mathbf{V}^{M,N}(x_i)) &\leq NM^2 \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^M \mathbf{U}^{M,N}(x_j) \right) (d_1 + \mathbf{V}^{M,N}(x_i)) \\ &= NM^4 \|\mathbf{U}^{M,N}\|_1 (d_1 + \|\mathbf{V}^{M,N}\|_1). \end{aligned}$$

On retient l'ordre de grandeur NM^4 . Alors on s'attend à ce que $\mathcal{M}^{M,N}$ soit d'ordre $\sqrt{NM^4T}/NM = M\sqrt{T}/\sqrt{N}$, ce qui correspond à la Proposition 3.2 de [2] :

Proposition 2.5. *Le processus $\mathcal{M}^{M,N}$ est une martingale de carré intégrable et il existe $c \geq 0$ tel que pour tout $T \geq 0$,*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq T} \|\mathcal{M}^{M,N}(t)\|_{-1}^2 \right] \lesssim T e^{cT} \frac{M^2}{N},$$

où $\|\cdot\|_{-1}$ est un analogue discret de la norme de l'espace de Sobolev $H^{-1}(\mathbb{T})$

C'est un premier pas dans notre programme de dérivation de (1). Si on fait tendre M et N vers l'infini, sous la condition $M^2 = o(N)$ la martingale est petite. Il faut maintenant s'assurer que la petitesse de la perturbation dans (4) est transformée par les estimations de stabilité sur les équations déterministes (3) et (1) en petitesse de l'écart entre $\mathbf{U}^{M,N}$ et les solutions des équations déterministes.

3 Etude du problème de Cauchy parabolique

Dans cette section, pour toute distribution sur le tore $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$, on note $\hat{u} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ sa transformée de Fourier. Pour $r \in \mathbb{R}$, on note

$$H^r(\mathbb{T}) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}) \mid \|u\|_{H^r} := |\hat{u}(0)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |k|^{2s} |\hat{u}(k)|^2 < \infty \right\}$$

les espaces de Sobolev. Puisque la dérivation d'une fonction correspond à la multiplication par $2\pi ik$ de sa transformée de Fourier, pour $r \in \mathbb{N}$ $H^r(\mathbb{T})$ peut être vu comme l'ensemble des distributions dont les r premières dérivées sont dans $L^2(\mathbb{T})$. En particulier, $H^0(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$.

Soit $T > 0$. Par souci de simplicité, on ne s'intéressera qu'à l'étude du cas conservatif sur $Q_T := [0, T] \times \mathbb{T}$

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta((d_1 + a_1 v)u) = \Delta f, \\ \partial_t v - \Delta((d_2 + a_2 u)v) = \Delta g, \\ (u, v)(0, \cdot) = (u_0, v_0). \end{cases} \quad (7)$$

En lisant la structure de ce problème, on voit que l'étude du problème suivant sera importante :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta(\mu u) = \Delta f, \\ u(0, \cdot) = u_0. \end{cases} \quad (8)$$

3.1 Estimations d'énergie

Commençons par une estimation dans le cas simple de l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = \Delta f, \\ u(0, \cdot) = u_0. \end{cases} \quad (9)$$

Proposition 3.1. *Soient u_0 et f des fonctions lisses et $r \in \mathbb{R}$. Soit u une solution lisse de (9) sur Q_T . Alors pour tout $t \in [0, T]$,*

$$\|u(t)\|_{H^r}^2 + \int_0^t \|u(s)\|_{H^{r+1}}^2 ds \leq \|u_0\|_{H^r}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{H^{r+1}}^2 ds.$$

Démonstration. Après transformation de Fourier en espace, l'équation devient

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(t, k) + |k|^2\hat{u}(t, k) = -|k|^2\hat{f}(t, k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Pour $k = 0$, on a simplement $\frac{d}{dt}\hat{u}(t, 0) = 0$ donc la moyenne de u est conservée : $\hat{u}(t, 0) = \hat{u}_0(0)$.
Pour $k \neq 0$, on multiplie par $|k|^{2r}\hat{u}(t, k)$ et intègre en temps pour obtenir

$$\frac{1}{2}|k|^{2r}\hat{u}(t, k)^2 - \frac{1}{2}|k|^{2r}\hat{u}(0, k)^2 + \int_0^t |k|^{2(r+1)}\hat{u}(s, k)^2 ds = \int_0^t |k|^{2(r+1)}\hat{f}(s, k)\hat{u}(s, k) ds.$$

Par l'inégalité d'Young,

$$\int_0^t |k|^{2(r+1)}\hat{f}(s, k)\hat{u}(s, k) ds \leq \frac{1}{2} \int_0^t |k|^{2(r+1)}\hat{f}(s, k)^2 ds + \int_0^t |k|^{2(r+1)}\hat{u}(s, k)^2 ds,$$

donc

$$|k|^{2r}\hat{u}(t, k)^2 + \int_0^t |k|^{2(r+1)}\hat{u}(s, k)^2 ds \leq |k|^{2r}\hat{u}_0(k)^2 + \int_0^t |k|^{2(r+1)}\hat{f}(s, k)^2 ds.$$

En sommant sur k on obtient l'estimation attendue. \square

Cette estimation, appelée *estimation d'énergie* permet de construire des solutions à (9) par une méthode de projection de $H^r(\mathbb{T})$ sur des sous-espaces de dimension finie, comme exposé par exemple en section 7.1.2 de [6]. Notons que la multiplication par $|k|^{2r}$ en Fourier correspond à l'application de l'opérateur $(-\Delta)^r$ sur \mathbb{T} .

Avec ce point de vue, il est possible dans le cas $r = -1$ de généraliser cette estimation aux solutions de (8). En effet, soit u une solution lisse de (8). Pour simplifier, supposons u_0 de moyenne nulle, de telle sorte que $(-\Delta)^{-1}[u(t)]$ soit bien défini pour tout $t \in [0, T]$. Alors en multipliant (8) par $(-\Delta)^{-1}u$ et en intégrant en espace-temps :

$$\frac{1}{2}\langle u(T), (-\Delta)^{-1}u(T) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} + \int_{Q_T} \Delta(\mu u)(-\Delta)^{-1}u = \frac{1}{2}\langle u_0, (-\Delta)^{-1}u_0 \rangle_{L^2(\mathbb{T})} + \int_{Q_T} \Delta f(-\Delta)^{-1}u.$$

On peut simplifier les Δ et les Δ^{-1} entre eux par une double intégration par parties. Par exemple, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\int_{\mathbb{T}} \Delta f(t)(-\Delta)^{-1}u(t) = \int_{\mathbb{T}} \nabla f(t) \cdot \nabla(-\Delta)^{-1}u(t) = \int_{\mathbb{T}} f(t)\Delta(-\Delta)^{-1}u(t) = \int_{\mathbb{T}} f(t)u(t).$$

De plus, l'égalité de Parseval permet de voir dans le domaine de Fourier que $\langle u(T), (-\Delta)^{-1}u(T) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \|u(T)\|_{H^{-1}(\mathbb{T})}^2$. On a donc

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|_{H^{-1}(\mathbb{T})}^2 + \int_{Q_T} \mu u^2 = \frac{1}{2}\|u(T)\|_{H^{-1}(\mathbb{T})}^2 + \int_{Q_T} f u,$$

et en appliquant l'inégalité de Young

$$\int_{Q_T} f u \leq \frac{1}{2} \int_{Q_T} \frac{f^2}{\mu} + \frac{1}{2} \int_{Q_T} \mu u^2$$

on obtient sous une hypothèse de positivité forte de μ une estimation d'énergie qui est un cas particulier du Lemme 1 de [3] :

Lemma 3.2. Soit $\mu \in L^\infty(Q_T)$ tel que $\alpha := \inf_{Q_T} \mu > 0$, $u_0 \in H^{-1}(\mathbb{T})$ et $f \in L^2(Q_T)$. Alors, il existe une unique solution faible $u \in L^2(Q_T)$ au problème (8). De plus, $u \in \mathcal{C}([0, T], H^{-1}(\mathbb{T}))$ et satisfait l'estimation de dualité

$$\|u(T)\|_{H^{-1}(\mathbb{T})}^2 + \int_{Q_T} \mu u^2 \leq \|u_0\|_{H^{-1}(\mathbb{T})}^2 + \left(\int_{\mathbb{T}} u_0 \right)^2 \int_{Q_T} \mu + \frac{1}{\alpha} \int_{Q_T} f^2.$$

3.2 Estimation de stabilité et convergence du système de particules

Soient (u, v) et (\bar{u}, \bar{v}) deux solutions bornées du problème (7) avec pour données initiales respectives (u_0, v_0) et (\bar{u}_0, \bar{v}_0) et termes source respectifs $(\Delta f, \Delta g)$ et $(\Delta \bar{f}, \Delta \bar{g})$. On souhaite estimer l'écart $(z, w) = (u - \bar{u}, v - \bar{v})$ entre les solutions en fonction de l'écart entre les données du problème. Pour cela, on commence par trouver les équations d'évolution de l'écart en prenant la différence entre les équations vérifiées par (u, v) et (\bar{u}, \bar{v}) :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta((d_1 + a_1 v)z) = a_1 \Delta(\bar{u}w) + \Delta(f - \bar{f}), \\ \partial_t v - \Delta((d_2 + a_2 u)w) = a_2 \Delta(\bar{v}z) + \Delta(g - \bar{g}), \\ (z, w)(0, \cdot) = (u_0 - \bar{u}_0, v_0 - \bar{v}_0). \end{cases} \quad (10)$$

Ces équations sont de la forme (8), on peut donc leur appliquer le Lemme 3.2. C'est ainsi qu'est obtenu le Théorème 1 de [3] :

Theorem 3.3. Sous la condition de petitesse

$$\|\bar{u}\|_{L^\infty(Q_T)} \|\bar{v}\|_{L^\infty(Q_T)} < \frac{d_1 d_2}{a_1 a_2}, \quad (11)$$

on a l'estimation de stabilité suivante :

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq T} \|z(t)\|_{H^{-1}}^2 + \sup_{t \leq T} \|w(t)\|_{H^{-1}}^2 + \|z\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|w\|_{L^2(Q_T)}^2 \\ \lesssim \|z(0)\|_{H^{-1}}^2 + \|w(0)\|_{H^{-1}}^2 + \|f - \bar{f}\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|g - \bar{g}\|_{L^2(Q_T)}^2. \end{aligned}$$

La constante derrière \lesssim dépend uniquement des paramètres a_i, d_i, T du problème et des normes $L^\infty(Q_T)$ de u, v, \bar{u}, \bar{v} .

Ici, la condition de petitesse apparaît car (10) permet seulement de contrôler z par w et w par z donc finalement z par z . Il faut donc que le coefficient devant le z du membre de droite de cette dernière inégalité soit plus petit que le coefficient devant le z du membre de gauche. Plus explicitement, en ignorant les termes dûs aux données initiales et aux termes source, le Lemme 3.2 contient les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} d_1 z^2 &\leq \frac{1}{d_1} \int_{Q_T} (a_1 \bar{u} w)^2 \leq \frac{a_1^2}{d_1} \|\bar{u}\|_{L^\infty(Q_T)}^2 \int_{Q_T} w^2, \\ \int_{Q_T} d_2 w^2 &\leq \frac{1}{d_2} \int_{Q_T} (a_2 \bar{v} z)^2 \leq \frac{a_2^2}{d_2} \|\bar{v}\|_{L^\infty(Q_T)}^2 \int_{Q_T} z^2, \end{aligned}$$

qu'on peut combiner en $d_1 \|z\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq \frac{a_1^2}{d_1} \|\bar{u}\|_{L^\infty(Q_T)}^2 \|\bar{v}\|_{L^\infty(Q_T)}^2 \frac{a_2}{d_2} \|z\|_{L^2(Q_T)}^2$, et on retrouve la condition de petitesse.

Retournons au problème de convergence du système de particules. Puisque la distribution de population $(\mathbf{U}^{M,N}, \mathbf{V}^{M,N})$ est définie sur le domaine semi-discret $[0, T] \times \mathbb{T}_M$, on effectue les estimations de stabilité sur celui-ci. La Proposition 8 de [3] donne un analogue discret du théorème de stabilité ci-dessus et assure que l'on puisse comparer $(\mathbf{U}^{M,N}, \mathbf{V}^{M,N})$ avec une discrétisation de toute solution suffisamment régulière (la régularité demandée est $L^2([0, T], H^3(\mathbb{T}))$) de (7). Soit (\bar{u}, \bar{v}) une solution $L^2([0, T], H^3(\mathbb{T}))$ de (7) avec terme source $f, g = 0$ nul et satisfaisant la condition de petitesse (11). En utilisant la décomposition en semi-martingale, on voit que $(\mathbf{U}^{M,N}, \mathbf{V}^{M,N})$ vérifie dans le cas conservatif le système

$$\begin{cases} d\mathbf{U}^{M,N} = \Delta_M((d_1 + a_1 \mathbf{V}^{M,N})\mathbf{U}^{M,N})dt + d\mathcal{M}^{M,N} \\ d\mathbf{V}^{M,N} = \Delta_M((d_2 + a_2 \mathbf{U}^{M,N})\mathbf{V}^{M,N})dt + d\mathcal{N}^{M,N} \\ (\mathbf{U}^{M,N}(0), \mathbf{V}^{M,N}(0)) = (\mathbf{U}_0^{M,N}, \mathbf{V}_0^{M,N}) \end{cases}, \quad (12)$$

où $\mathcal{M}^{M,N}$ et $\mathcal{N}^{M,N}$ sont des martingales. Les accroissements $d\mathcal{M}^{M,N}, d\mathcal{N}^{M,N}$ de ces martingales peuvent être vus comme des termes sources dans une équation du type (7). L'estimation de stabilité (Proposition 8 de [3]) donne une majoration du type

$$d_{Q_T}(\mathbf{U}^{M,N}, \bar{u})^2 \lesssim d_{\mathbb{T}}(\mathbf{U}_0^{M,N}, \bar{u}_0)^2 + \int_0^T \|d\mathcal{M}^{M,N}(t)\|_{-1}^2 dt,$$

où d_{Q_T}, d_T sont des distances permettant de comparer des objets discrets et continus, la première ressemblant à la distance $L^\infty([0, T], H^{-1}(\mathbb{T})) \cap L^2(Q_T)$ apparaissant dans le Théorème 3.3 et la deuxième à la distance $H^{-1}(\mathbb{T})$. L'intégrale de $\|d\mathcal{M}^{M,N}(t)\|_{-1}^2$ correspond à la variation quadratique, en norme $\|\cdot\|_{-1}$ de la martingale $\mathcal{M}^{M,N}$. Via l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy, les moments de cette variation quadratique peuvent être estimés à l'aide des moments de $\mathcal{M}^{M,N}$. Puisque la différence entre $\|\mathcal{M}^{M,N}(t)\|_{-1}^2$ et la variation quadratique ci-dessus est une martingale (Proposition II-6.2 de [5]), l'espérance est le moment le plus facile à évaluer :

$$\mathbb{E} \int_0^T \|d\mathcal{M}^{M,N}(t)\|_{-1}^2 dt = \mathbb{E}[\|\mathcal{M}^{M,N}(T)\|_{-1}^2] \leq T e^{cT} \frac{M^2}{N},$$

la dernière inégalité venant de la Proposition 2.5. On a donc

$$d_{Q_T}(\mathbf{U}^{M,N}, \bar{u})^2 \lesssim d_{\mathbb{T}}(\mathbf{U}_0^{M,N}, \bar{u}_0)^2 + \frac{M^2}{N}.$$

Le terme $d_{\mathbb{T}}(\mathbf{U}_0^{M,N}, \bar{u}_0)^2$ est uniquement dû à l'erreur causée par la discrétisation de \bar{u} et tend vers 0 lorsque $M, N \rightarrow \infty$. On donc la convergence $\mathbf{U}^{M,N} \rightarrow \bar{u}$ lorsque $M, N \rightarrow \infty$ avec $M^2 = o(N)$.

3.3 Construction de solutions régulières

Il reste à vérifier que l'hypothèse $\bar{u}, \bar{v} \in L_T^2 H^3 := L^2([0, T], H^3(\mathbb{T}))$ est réalisable en construisant des solutions de cette régularité. Pour conclure ce mémoire, on présente brièvement l'approche de Gallagher et Moussa dans [7], qui permet d'obtenir le caractère bien posé de problèmes paraboliques quasi-linéaires plus généraux, de la forme

$$\begin{cases} \partial_t U - \partial_x(A(U)\partial_x U) = F \\ U(0, \cdot) = U_0 \end{cases}, \quad (13)$$

où $U, F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $U_0 : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $A : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ est à valeurs matricielles. (7) peut se mettre sous cette forme pour $d = 2$:

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x((d_1 + a_1 v)\partial_x u + a_1 u \partial_x v) = \Delta f, \\ \partial_t v - \partial_x(a_2 v \partial_x u + (d_2 + a_2 u)\partial_x v) = \Delta g, \\ (u, v)(0, \cdot) = (u_0, v_0). \end{cases} \quad \text{donc } A(u, v) = \begin{pmatrix} d_1 + a_1 v & a_1 u \\ a_2 v & d_2 + a_2 u \end{pmatrix}. \quad (14)$$

La fait suivant indique que A doit vérifier de bonnes propriétés de positivité :

Proposition 3.4. *Pour $c \in \mathbb{R}$ on considère l'équation de la chaleur sur le tore \mathbb{T}*

$$\partial_t u - c \partial_x \partial_x u = 0, \quad u(0, \cdot) = u_0 \in L^2(\mathbb{T}).$$

Alors ce problème est bien posé dans $L^2(\mathbb{T})$ pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$ si et seulement si $c \geq 0$.

Une forme de telle condition de positivité est nécessaire dans toute équation parabolique, (13) n'y échappe pas et le cadre retenu pour cette équation est le suivant :

Definition 3.5. *Une matrice $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ satisfait la condition de Petrovskii et on note $B \in \mathcal{P}$ si pour toute valeur propre $\lambda \in \text{Sp } B$, on a $\text{Re } \lambda > 0$.*

On peut montrer que pour $u, v \geq 0$, $A(u, v)$ satisfait la condition de Petrovskii. Sous cette condition de positivité, le Théorème 1 de [7] donne à la fois le caractère bien posé du problème et une estimation de stabilité :

Theorem 3.6. *Soit $A : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{P}$ lisse et $s > d/2$. Pour tout $(U_0, F) \in H^s(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{R}_+, H^{s-1}(\mathbb{T}))$, il existe $T > 0$ et un unique $U \in L_T^2 H^{s+1} \cap L_T^\infty H^s$ solution du problème (13) sur Q_T . De plus, si $(U_0, F), (\bar{U}_0, \bar{F}) \in H^s(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{R}_+, H^{s-1}(\mathbb{T}))$ et U, \bar{U} sont les solutions associées, définies jusqu'au temps T , alors on a l'estimation de stabilité*

$$\|U - \bar{U}\|_{L_T^\infty H^s}^2 + \|U - \bar{U}\|_{L_T^2 H^{s+1}}^2 \lesssim \|U_0 - \bar{U}_0\|_{H^s(\mathbb{T})}^2 + \|F - \bar{F}\|_{L_T^2 H^{s-1}}^2,$$

où la constante derrière \lesssim dépend uniquement de normes de $U_0, \bar{U}_0, F, \bar{F}$.

L'hypothèse $s > d/2$ correspond au cas régulier des espaces de Sobolev. En effet, pour un tel s , $H^s(\mathbb{T})$ s'injecte dans un espace de fonctions Höldériennes $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$. C'est un cas particulier des injections de Sobolev, décrites par exemple dans [6], Chapitre 5, Théorème 6. Pour ce niveau de régularité, $H^s(\mathbb{T})$ est une algèbre; c'est le cadre adapté pour considérer la non-linéarité de type produit $A(U)\partial_x U$. On peut montrer que la solution U ainsi obtenue est en fait $\mathcal{C}^\alpha(Q_T)$ pour un $\alpha > 0$.

Comme souvent avec les problèmes de Cauchy paraboliques, l'estimation de stabilité dans le cas linéaire permet d'obtenir existence, unicité et estimation de stabilité pour les solutions de (13) à l'aide d'une méthode de point fixe qu'on ne détaille pas ici. Intéressons-nous donc au cas linéaire homogène :

$$\begin{cases} \partial_t U - \partial_x(B\partial_x U) = 0 \\ U(0, \cdot) = U_0 \end{cases}, \quad (15)$$

où $B : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{P}$. Si B est constante, on peut directement obtenir une estimation d'énergie en généralisant la méthode utilisée en Section 3.1 au cas vectoriel. En effet, puisque $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$

satisfait la condition de Petrovskii, on peut voir qu'il existe un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_B$ sur \mathbb{R}^d tel que $(X, BX)_B \geq \alpha|X|^2$ pour un $\alpha > 0$, où $|\cdot|$ est la norme euclidienne usuelle. Alors pour tout $t \geq 0$, en prenant le produit scalaire de (15) avec U , en intégrant en espace puis en intégrant la parties,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}} (U(t), U(t))_B + \int_T (\partial_x U(t), B \partial_x U(t))_B = 0.$$

En intégrant sur en temps sur $[0, T]$,

$$\frac{1}{2} \int_T (U(T), U(T))_B + \alpha \int_{Q_T} |\partial_x U|^2 \leq \frac{1}{2} \int_T (U_0, U_0)_B.$$

Si on ajoute une dépendance en temps à B , les choses se compliquent car le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{B(t)}$ dépend du temps et il n'est plus vrai que $(\partial_t U(t), U(t))_{B(t)} = \frac{1}{2} \partial_t (U(t), U(t))_{B(t)}$. Pour remédier à cela, on approche B par une fonction constante par morceaux \tilde{B} , ce qui permet de travailler avec un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\tilde{B}(t)}$ gelé sur des intervalles de temps $[t_i, t_{i+1}[$. L'estimation d'énergie pour le système avec \tilde{B} peut alors être obtenue en appliquant le cas constant sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, et en chaînant les inégalités ainsi obtenues. Si \tilde{B} est suffisamment proche de B , le système avec B peut être vu comme une petite perturbation du système avec \tilde{B} et hérite alors de l'estimation d'énergie pour ce dernier :

$$\partial_t U - \partial_x (B \partial_x U) = 0 \iff \partial_t U - \partial_x (\tilde{B} \partial_x U) = \partial_x ((B - \tilde{B}) \partial_x U).$$

Pour ensuite ajouter une dépendance en espace à B , on utilise encore un procédé de gel de la matrice B , en approchant $B(t)$ par une fonction constante par morceaux en espace pour tout t . Cette dernière est plus complexe et demande que B soit hôlderienne sur Q_T , ce qui est une hypothèse raisonnable car dans le cas non linéaire qui nous intéresse, on s'attend à $U \in C^\alpha(\mathbb{T})$ et $A \in C^\infty(\mathbb{T})$.

Références

- [1] Heshan ARAVINDA, Arnaud MARSIGLIETTI et James MELBOURNE. *Concentration Inequalities for Ultra Log-Concave Distributions*. 2021. arXiv : [2104.05054](https://arxiv.org/abs/2104.05054) [math.PR]. URL : <https://arxiv.org/abs/2104.05054>.
- [2] Vincent BANSAYE, Alexandre BERTOLINO et Ayman MOUSSA. "Stability of non-conservative cross diffusion model and approximation by stochastic particle systems". working paper or preprint. Mars 2025. URL : <https://hal.science/hal-04975578>.
- [3] Vincent BANSAYE, Ayman MOUSSA et Felipe MUÑOZ-HERNÁNDEZ. "Stability of a cross-diffusion system and approximation by repulsive random walks : A duality approach". In : *Journal of the European Mathematical Society* (nov. 2024). ISSN : 1435-9863. DOI : [10.4171/jems/1540](https://doi.org/10.4171/jems/1540). URL : <http://dx.doi.org/10.4171/JEMS/1540>.
- [4] Esther S. DAUS, Laurent DESVILLETES et Helge DIETERT. "About the entropic structure of detailed balanced multi-species cross-diffusion equations". In : *Journal of Differential Equations* 266.7 (mars 2019), p. 3861-3882. DOI : [10.1016/j.jde.2018.09.020](https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.09.020). URL : <https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.09.020>.
- [5] S.N. ETHIER et T.G. KURTZ. *Markov processes, Characterization and Convergence*. John Wiley & Sons, New York., 1986.

- [6] Lawrence C. EVANS. *Partial differential equations / Lawrence C. Evans,...* eng. 2nd edition [updated, new chapter 12, added 80 exercises]. Graduate studies in mathematics. Providence (R.I.) : American Mathematical Society, 2010. ISBN : 978-0-8218-4974-3.
- [7] Isabelle GALLAGHER et Ayman MOUSSA. *The Cauchy problem for quasi-linear parabolic systems revisited*. 2024. arXiv : [2407.08226](https://arxiv.org/abs/2407.08226) [math.AP]. URL : <https://arxiv.org/abs/2407.08226>.
- [8] Nobuyuki. IKEDA et Shinzo WATANABE. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. eng. North-Holland mathematical library ; volume 24. Amsterdam ; North-Holland Publishing Company, 1981. ISBN : 0-08-096012-X.
- [9] Nanako SHIGESADA, Kohkichi KAWASAKI et Ei TERAMOTO. “Spatial segregation of interacting species”. In : *Journal of Theoretical Biology* 79.1 (1979), p. 83-99. ISSN : 0022-5193. DOI : [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(79\)90258-3](https://doi.org/10.1016/0022-5193(79)90258-3). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022519379902583>.