École Normale Supérieure
12 Décembre 2017

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$11 Corrigé

Exercice 1 : questions diverses

1. L'application f est injective : si $x \neq y$, alors $||f(x) - f(y)|| \geq \alpha ||x - y|| > 0$.
Montrons que $df(x)$ est injective pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \neq 0$:

$$df(x).h = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

Pour tout $t \neq 0$, $\left|\left|\frac{f(x+th)-f(x)}{t}\right|\right| \geq \alpha ||h||$. Donc $||df(x).h|| \geq \alpha ||h||$. En particulier, $df(x).h \neq 0$.
Pour tout x, $df(x)$ est donc inversible : c'est une application linéaire injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

On en déduit que l'image de f est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est inversible donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe V et W des ouverts de $\mathbb{R}^n$, voisinages respectifs de x et $f(x)$, tels que $f : V \to W$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. En particulier, $W \subset f(\mathbb{R}^n)$. Cela implique que tout point $f(x) \in f(\mathbb{R}^n)$ admet un voisinage W qui est inclus dans $f(\mathbb{R}^n)$. Donc $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert.

Montrons que l'image de f est aussi fermée dans $\mathbb{R}^n$.
Puisqu'on est dans un espace métrique, il suffit de montrer qu'une suite de points de $f(\mathbb{R}^n)$ qui converge dans $\mathbb{R}^n$ a en fait sa limite dans $f(\mathbb{R}^n)$. Soit donc $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $f(\mathbb{R}^n)$, dont on note y la limite.
Pour tous n, m, $||x_n - x_m|| \leq \frac{1}{\alpha} ||f(x_n) - f(x_m)||$.
La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy (car $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ l'est). Elle converge alors dans $\mathbb{R}^n$ vers une limite x_∞. Puisque f est continue, on doit avoir $y = f(x_\infty)$. Donc $y \in f(\mathbb{R}^n)$.

Puisque $\mathbb{R}^n$ est connexe et puisque $f(\mathbb{R}^n)$ est ouverte est fermée, $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ donc f est surjective.
Comme on a aussi vu que f était injective, f est bijective. D'après le théorème d'inversion locale, la réciproque de f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de chaque point. Donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. a) On a $f(x) = \frac{x}{||x||^2}$ qui est donc une fraction rationnelle en les coordonnées de x. Elle est

doc différentiable. Effectuons un développement limité :

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{x+h}{\|x+h\|^2} \\ &= \frac{x+h}{\|x\|^2 + 2x\cdot h + o(h)} \\ &= \frac{x+h}{\|x\|^2}(1 - 2\frac{x\cdot h}{\|x\|^2} + o(h)) \\ &= f(x) + \frac{1}{\|x\|^2}\left(h - 2\frac{x\cdot h}{\|x\|^2}x\right) + o(h) \end{aligned}$$

d'où la différentielle.
b) La différentielle en x est la composée d'une homothétie et de la réflexion orthogonale par rapport à x.
3. a) On va montrer que $\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_n^{++}$ est fermé.
Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_n^{++}$ convergeant vers une limite M_∞. Montrons que $M_\infty \in \mathcal{S}_n - \mathcal{S}_n^{++}$.
Pour tout k, il existe $u_k \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tel que $\langle u_k, M_k u_k\rangle \leq 0$. On peut choisir un tel u_k de sorte que $||u_k|| = 1$.
Puisque la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ est compacte, on peut supposer, quitte à extraire, que u_k converge vers une limite $u_\infty \neq 0$. Alors :

$$\langle u_\infty, M_\infty u_\infty\rangle \leq 0$$

Donc $M_\infty \in \mathcal{S}_n - \mathcal{S}_n^{++}$.
b) Soit $\phi : \mathcal{S}_n^{++} \to \mathcal{S}_n^{++}$ l'application telle que $\phi(A) = A^2$.
D'après le rappel, ϕ est une bijection.
L'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (car toutes ses coordonnées sont polynomiales en les coefficients de A). De plus, pour toutes $A \in \mathcal{S}_n^{++}, H \in \mathcal{S}_n$:

$$d\phi(A).H = AH + HA$$

Pour toute A, $d\phi(A)$ est injective. En effet, si $H \neq 0$, puisque H est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (car symétrique) en non-nulle, il existe $x \neq 0$ et $\alpha \neq 0$ tels que $Hx = \alpha x$. On a alors $\langle x, (AH + HA)x\rangle = \langle x, A(\alpha x)\rangle + \langle Hx, Ax\rangle = 2\alpha\langle x, Ax\rangle \neq 0$.
Donc $d\phi(A)$ est inversible pour toute A et ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. D'après le théorème d'inversion locale, son inverse, $\sqrt{.}$, est donc aussi $\mathcal{C}^\infty$.
4. a) Soient $r_1, ..., r_n$ les racines de P_0. Posons $\phi : \mathbb{R}^n[X] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$\phi(P, x_1, ..., x_n) = (P(x_1), ..., P(x_n))$$

Pour tout P, la différentielle de $\phi(P, .)$ vaut, en tout $(x_1, ..., x_n)$:

$$d\phi(P, .)(x_1, ..., x_n).(y_1, ..., y_n) = (P'(x_1)y_1, ..., P'(x_n)y_n)$$

Elle est inversible si et seulement si $P'(x_i) \neq 0$ pour tout i.
Puisque P_0 est à racines simples, $P_0'(r_i) \neq 0$ pour tout i. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de $(P_0, r_1, ..., r_n)$. D'après ce théorème, il existe un voisinage V de P_0, un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de $(r_1, ..., r_n)$ et une application de classe $\Lambda : V \to U$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$\forall P \in V, \quad \phi(P, x_1, ..., x_n) = 0 \text{ ssi } (x_1, ..., x_n) = \Lambda(P)$$

Notons $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les coordonnées de Λ. Ce sont des applications $\mathcal{C}^\infty$.
Pour tout $P \in V$, $\phi(P, \lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)) = 0$. Donc $\lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)$ sont des racines de P. Lorsque P tend vers P_0, $\lambda_i(P)$ tend vers r_i pour tout i (car $\Lambda(P_0) = (r_1, ..., r_n)$). Donc, pour P assez proche de P_0, les $\lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)$ sont des réels deux à deux distincts, ce qui implique que P a n racines distinctes, qui sont $\lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)$.
b) On garde les notations de la sous-question précédente.
Pour tout P :

$$\phi(P, \lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)) = 0$$

La différentielle de ϕ vaut :

$$d\phi(P, x_1, ..., x_n).(Q, y_1, ..., y_n) = (Q(x_1) + P'(x_1)y_1, ..., Q(x_n) + P'(x_n)y_n)$$

La différentielle de $g : P \to \phi(P, \lambda_1(P), ..., \lambda_n(P))$ vaut donc :

$$\begin{aligned} dg(P).Q &= d\phi(P, \lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)).(Q, d\lambda_1(P).Q, ..., d\lambda_n(P).Q) \\ &= (Q(\lambda_1(P)) + P'(\lambda_1(P))d\lambda_1(P).Q, ..., Q(\lambda_n(P)) + P'(\lambda_n(P))d\lambda_n(P).Q) \end{aligned}$$

Puisque g est identiquement nulle :

$$\forall P, Q, i, \quad d\lambda_i(P).Q = -\frac{Q(\lambda_i(P))}{P'(\lambda_i(P))}$$

Exercice 2 : Matrice jacobienne et symétrie

1. Si f est une fonction affine d'application linéaire antisymétrique, il est clair que sa jacobienne est antisymétrique. Réciproquement, soit f une application $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même telle que la jacobienne soit antisymétrique. On note $f_{ijk} := \partial_j \partial_k f_i$. L'hypothèse signifie que $f_\bullet$ est antisymétrique i et k, d'autre part le théorème de Schwarz affirme que $f_\bullet$ est symétrique en j et k, on en déduit que f est nulle, c'est à dire $d^2 f = 0$. La différentielle de f est donc constante, donc antisymétrique et f est affine.

2. C'est un cas de ce qu'on appelle le lemme de Poincaré qui affirme dans ce cas qu'une 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ est exacte (de la forme $d\varphi$ si et seulement si elle est fermée (sa différentielle extérieure est nulle, c'est à dire sa différentielle est symétrique).

Soit φ une application $\mathcal{C}^2$ et notons $f_i(x) := \partial_i \varphi(x)$, alors d'après Schwarz :

$$\partial_i f_j = \partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi = \partial_j f_i$$

et on a le résultat voulu. Réciproquement, soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ dont la différentielle est symétrique. Si une telle fonction φ existe, on doit nécessairement avoir en appliquant la formule de Taylor

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum \int_0^1 x_i \partial_i \varphi(tx) \mathrm{d}t = \varphi(0) + \sum x_i \int_0^1 f_i(tx) \mathrm{d}t.$$

On définit donc φ de la sorte et on vérifie qu'elle convient en dérivant sous le signe intégral :

$$\begin{aligned}
\partial_j \varphi(x) &= \int_0^1 \left(f_j(tx) + \sum_i x_i \partial_j f_i(tx) t \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(f_j(tx) + \sum_i x_i \partial_i f_j(tx) t \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (t f_j(tx)) \mathrm{d}t \\
&= f_j(x).
\end{aligned}$$

Exercice 3 : théorème des fonctions implicites

On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points (x, y) vérifiant l'équation

$$\sin(y) + y + e^x = 1.$$

Montrer qu'au voisinage de l'origine, y s'écrit comme une fonction de x de classe $\mathcal{C}^\infty$; donner un développement limité à l'ordre 3 de cette fonction.

Exercice 4 : sur la Hessienne d'une fonction

Pour alléger les notations, si f est une application $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$, on note $f = (f_1, \ldots, f_n)$ et $\partial_i f_j$ désigne la i-ème dérivée partielle de $f_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

1. On calcule :

$$\partial_i (f \circ \phi)(x) = \sum_{k=1}^n \partial_k f(\phi(x)) \partial_i \phi_k(x)$$

puis

$$\partial_{ji}^2 (f \circ \phi)(x) = \sum_{k=1}^n \Big(\sum_{l=1}^n \partial_{lk}^2 f(\phi(x)) \partial_j \phi_l(x) \partial_i \phi_k(x) \Big) + \partial_k f(\phi(x)) \partial_{ji}^2 \phi_k(x).$$

Le deuxième terme n'a pas une réécriture matricielle aisée. En revanche, le premier a l'interprétation suivante : on note $J(\phi)(x)$ la matrice jacobienne de ϕ en x. Alors, les Hessiennes vérifient la relation suivante :

$$H(f \circ \phi)(x) = (J(\phi)(x))^T H(f)(\phi(x)) J(\phi)(x) + \text{ autre terme}.$$

2. Si x est un point critique de f, toutes les dérivées partielles de f en x sont nulles. Donc le terme complémentaire dans la formule ci-dessus est nul et la relation indique que les matrices $H(f \circ \phi)(\phi^{-1}(x))$ et $H(f)(x)$ sont congruentes, la matrice de passage étant la Jacobienne de

ϕ en $\phi^{-1}(x)$. Or, deux matrices symétriques réelles ont même signature si et seulement si elles sont congruentes (cf. loi d'inertie de Sylvester).

3. Il n'y a aucune relation intéressante entre les deux Jacobiennes en un point non critique. Prenons l'exemple suivant, où $n = 1$. On a la formule suivante :

$$(f \circ \phi)''(x) = f''(\phi(x))\phi'(x)^2 + f'(\phi(x))\phi''(x).$$

On doit comparer le signe de $(f \circ \phi)''(x)$ et celui de $f''(\phi(x))$. A cause du terme complémentaire, on ne peut rien dire en général. Par exemple, si f est une application affine non constante, on a $f''(\phi(x))$ mais $(f \circ \phi)''(x)$ est nul si et seulement si $\phi''(x)$ est nul, ce qui n'est pas le cas en général.

Exercice 5 : un théorème de Whitney

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n - F$ quelconque. On fixe $\epsilon(x) > 0$ tel que $B(x, \epsilon(x)) \subset \mathbb{R}^n - F$.
Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $\phi(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $\phi(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ (voir exercice précédent), telle que $\phi(x) > 0$ si et seulement si $x > 0$.
Posons, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $g_x(y) = \phi(\epsilon(x)^2 - ||y - x||^2)$.
La fonction g_x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (car composée de fonction $\mathcal{C}^\infty$) et $\{y \in \mathbb{R}^n \text{ tq } g_x(y) = 0\} = \mathbb{R}^n - B(x, \epsilon(x))$.
Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } ||x|| \leq m \text{ et } d(x, F) \geq 1/m\}$. Cet ensemble est fermé et inclus dans $\mathbb{R}^n - F$.
Pour tout m, G_m est compact (car c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$) donc il existe un nombre fini d'éléments, $x_1^{(m)}, ..., x_{N_m}^{(m)}$, tels que :

$$G_m \subset \bigcup_{k \leq N_m} B(x_k^{(m)}, \epsilon(x_k^{(m)}))$$

Comme $\mathbb{R}^n - F = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}^*} G_m$, on peut prendre comme boules $(B_i)_{i \in I}$ l'ensemble des $B(x_k^{(m)}, \epsilon(x_k^{(m)}))$, pour toutes les valeurs de k et m, et comme fonctions $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ les $g_{x_k^{(m)}}$ associées.

2. Quitte à les élever au carré, on peut supposer que les fonctions de la question précédente sont à valeurs positives.
Pour tout i, on note $M_i = \sup\limits_{j \leq i} ||f_i^{(j)}||_\infty$.
On pose $f = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i M_i} f_i$.
La série qui définit f converge normalement, ainsi que, pour tout j, la série $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i M_i} f_i^{(j)}$. En effet, $\left|\left|\frac{1}{2^i M_i} f_i^{(j)}\right|\right|_\infty \leq 2^{-i}$ pour tout $i \geq j$.
On en déduit que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour tout $x \in F$, $f(x) = 0$. En effet, $f_i(x) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, car $x \notin B_i$ si $x \in F$.
Pour tout $x \notin F$, il existe i tel que $x \in B_i$ donc $f(x) \geq \frac{1}{2^i M_i} f_i(x) > 0$.

Exercice 6 : Théorème de la boule chevelue

On va démontrer le théorème dit de la boule chevelue : toute application continue $\alpha : S^{2p} \to \mathbb{R}^{2p+1}$ vérifiant $\alpha(x) \cdot x = 0$ s'annule en au moins un point.

1. Commencer par constater que le théorème est faux pour les sphères de dimension impaire et qu'il existe bien dans ce cas un champ de vecteur tangents qui ne s'annule pas.

2. On revient au cas que l'on veut montrer et on suppose par l'absurde qu'il existe un champ de vecteurs α qui ne s'annule pas. a) Montrer que l'on peut étendre α en u définie sur la couronne $\mathcal{O}(a,b) := \{a \leq \|x\| \leq b\}$ par $u(x) := \|x\|\alpha\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$.
b) Montrer que l'on peut toujours supposer ce que l'on suppose dans la question précédente mais avec des applications $\mathcal{C}^1$.

3. On se donne dans cette question un champ de vecteur v $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas et définit sur la couronne $\mathcal{O}(a,b)$. a) Montrer que pour t assez petit l'application $f_t(x) := x + tv(x)$ est injective. (penser au théorème des accroissements finis pour v)
b) Montrer que sa différentielle est bijective. (penser à l'inversion locale)
c) Montrer que le volume de son image $f_t(\mathcal{O}(a,b))$ est un polynôme en t.

4. On considère maintenant le champ de vecteur donné par la seconde question. Montrer que l'application $f_t(x) := x + tu(x)$ réalise un difféomorphisme de la couronne $\mathcal{O}(a,b)$ sur $\sqrt{1+t^2}\mathcal{O}(a,b)$ et conclure.

Exercice 7 🏠✐✐ : lemme de Morse

1. a) Si on identifie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$, chacune des coordonnées de ϕ est une application polynomiale. L'application ϕ est donc $\mathcal{C}^\infty$.
$\phi(\mathrm{Id} + H) = A_0 + {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0H = \phi(\mathrm{Id}) + {}^tHA_0 + A_0H + o(H)$
La différentielle de ϕ en Id vaut donc $d\phi(\mathrm{Id}).H = {}^tHA_0 + A_0H$.
b) Pour toute $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $d\phi(\mathrm{Id}).(A_0^{-1}S/2) = S$ donc $d\phi(\mathrm{Id})$ est surjective.
c) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $\frac{n(n+1)}{2} = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, qui soit un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, d\phi(Id)$. Alors $d\phi(Id)$ réalise une bijection de V vers $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Posons $\phi_0(x) = \phi(Id + x)$ pour tout $x \in V$. Comme $d\phi_0(0) = d\phi(Id)_{|V}$ est une bijection, ϕ_0 est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local (entre un voisinage de 0 dans V et un voisinage de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$), d'après le théorème d'inversion locale.
Posons $P(A) = Id + \phi_0^{-1}(A)$. Alors $P(A_0) = Id + \phi_0^{-1}(A_0) = Id$.
De plus, pour toute A assez proche de A_0 :

$$^tP(A)A_0P(A) = \phi(P(A)) = \phi_0(\phi_0^{-1}(A)) = A$$

2. a) D'après la formule de Taylor, pour tout $x \in U$, si le segment $[0;x]$ est inclus dans U (ce qui est vrai sur un voisinage V assez petit de 0) :

$$f(x) = f(0) + df(0).x + \frac{1}{2}\int_0^1 d^{(2)}f(tx).(x,x)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 d^{(2)}f(tx).(x,x)dt$$

Pour tout $y \in U$, on note $M(y) = (M_{i,j}(y))_{i,j\leq n}$ la matrice qui représente la forme bilinéaire symétrique $d^{(2)}f(y)$ dans la base canonique. Avec cette notation :

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sum_{i,j} M_{i,j}(tx)x_ix_j\right)dt = \sum_{i,j}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 M_{i,j}(tx)dt\right)x_ix_j$$

Posons, pour tous $i,j \leq n$, $a_{i,j}(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 M_{i,j}(tx)dt$. Puisque $M_{i,j}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ pour tous i,j, l'application $a_{i,j}$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ (on peut différencier sous le signe intégrale).
b) Avec les définitions de la question précédente, $A(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j\leq n}$ est une matrice symétrique pour tout $x \in V$ (et si on avait définis autrement les $a_{i,j}$, on pourrait remplacer $a_{i,j}$ par $\frac{a_{i,j}+a_{j,i}}{2}$ et la matrice serait symétrique).
De plus, par continuité des $a_{i,j}$ en 0, on a $f(x) = {}^t xA(0)x + o(||x||^2)$ lorsque $x \to 0$. Donc $A(0)$ est la matrice associée à la forme bilinéaire $d^{(2)}f(0)$ dans la base canonique.
D'après la première question, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $A(0)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $P : \mathcal{V} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $P(A(0)) = \mathrm{Id}$ et, pour tout $A \in \mathcal{V}, A = {}^tP(A)A(0)P(A)$.
Quitte à diminuer la taille de V, on peut supposer que $A(x) \in \mathcal{V}$ pour tout $x \in V$. On a alors, pour tout $x \in V$:

$$f(x) = {}^t xA(x)x = {}^t x^t P(A(x))A(0)P(A(x))x$$

Puisque $A(0)$ est de signature $(p, n-p)$, il existe $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A(0) = {}^tG \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & \dots & & -1 \end{pmatrix} G$$

En notant D la matrice diagonale de l'équation précédente, on a, pour tout $x \in V$:

$$f(x) = {}^t(GP(A(x))x)D(GP(A(x))x)$$

Posons $\psi(x) = GP(A(x))x$. On a $d\psi(0) = GP(A(0))$ (car $\psi(x) = (GP(A(0)) + o(1))x = GP(A(0))x + o(||x||)$ quand $x \to 0$) donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe deux voisinages V_1, V_2 de 0 tels que ψ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V_1 sur V_2.
Si on pose $\phi = \psi^{-1}$, on a :

$$f(\phi(x)) = {}^t(\psi(\phi(x)))D(\psi(\phi(x))) = {}^txDx = x_1^1 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$$

Exercice 8 : formes normales

1. a) L'application $df(0)$ est linéaire et injective, de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$, donc $n \leq m$.
b) $(df(0).e_1, \dots, df(0).e_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^m$, puisque $df(0)$ est injective. Il existe donc une application linéaire bijective $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ telle que $L(df(0).e_i) = e_i$ pour tout $i \leq n$.
Quitte à remplacer f par $L \circ f$, on peut alors supposer que $df(0).e_i = e_i$ pour tout $i \leq n$.
Posons, pour tout $(x_1, \dots, x_m)$ assez proche de 0 :

$$\Gamma(x_1, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_m)$$

L'application Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $i \leq m$:

$$d\Gamma(0).e_i = e_i$$

La différentielle $d\Gamma(0)$ est donc inversible. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale : il existe un voisinage W_0 de 0 et un voisinage V_0 de 0 tels que Γ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de W_0 vers V_0.
Notons $\phi : V_0 \to W_0$ la réciproque de Γ. C'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
Pour tout $(x_1, ..., x_n)$ suffisamment proche de 0 pour que $(x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) \in W_0$:

$$\phi \circ f(x_1, ..., x_n) = \phi \circ \Gamma(x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0)$$

2. a) L'application $df(0)$ est une surjection linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$. Donc $n \geq m$.
b) Comme à la question 1.b), quitte à remplacer f par $f \circ \tilde{A}$, où A est affine, on peut supposer que $df(0).e_i = e_i$ si $i \leq m$ et $df(0).e_i = 0$ si $i > m$. On pose, pour tout $(x_1, ..., x_n)$ assez proche de 0 :

$$\Gamma(x_1, ..., x_n) = (f(x_1, ..., x_n), x_{m+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Comme $d\Gamma(0).e_i = e_i$ pour tout i, $d\Gamma(0)$ est inversible et, par le théorème d'inversion locale, il existe $U_0, U_1 \subset \mathbb{R}^n$, des voisinages de 0 tels que Γ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U_1 vers U_0.
Soit $\psi : U_0 \to U_1$ la réciproque de Γ. Notons $\psi_1, ..., \psi_n$ les applications coordonnées de ψ. Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in U_0$:

$$(f \circ \psi(x_1, ..., x_n), \psi_{m+1}(x), ..., \psi_n(x)) = \Gamma \circ \psi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n)$$

donc $f \circ \psi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_m)$.

Exercice 9 ⁄⁄⁄ : théorème du rang constant

1. a) Puisque r est un maximum local de $\operatorname{rang} df$, $\operatorname{rang} df(x) \leq r$ pour tout x assez proche de 0. Montrons l'inégalité inverse.
Puisque son rang est r, la matrice jacobienne $J_f(0)$ admet une sous-matrice carrée inversible de taille $r \times r$. Comme le déterminant est une application continue, la sous-matrice de $J_f(x)$ située à la même position est également inversible pour tout x assez proche de 0, ce qui implique :

$$\operatorname{rang} df(x) = \operatorname{rang} J_f(0) \geq r$$

b) Quitte à composer f par un isomorphisme linéaire bien choisi, A, on peut supposer que $\operatorname{Im} df(0) = \operatorname{Vect}\{e_1, ..., e_r\}$.
Soit $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ la projection sur les r premières coordonnées.
L'application $\pi \circ f$ est différentiable, de différentielle en 0 $d(\pi \circ f)(0) = \pi \circ df(0)$. Son image est $\pi(\operatorname{Im} df(0)) = \mathbb{R}^r$. La différentielle est donc surjective.
D'après la question 2. de l'exercice 2, il existe U_1, U_2 deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\psi : U_1 \to U_2$ tels que, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in U_1$:

$$\pi \circ f \circ \psi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_r)$$

Si on note $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_m$ les $m - r$ dernières coordonnées de f, on a alors, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in U_1$:

$$f \circ \psi(x_1, ..., x_n) = (\pi \circ f \circ \psi(x_1, ..., x_n), \lambda_{r+1}(x), ..., \lambda_m(x)) = (x_1, ..., x_r, \lambda_{r+1}(x), ..., \lambda_m(x))$$

c) D'après la question a), quitte à prendre U_1 et U_2 plus petits, on peut supposer que rang $df = r$ sur U_2. On fait cette hypothèse à partir de maintenant.
Pour tout $x \in U_1$, la différentielle de $A \circ f \circ \psi$ en x vaut $A \circ df(\psi(x)) \circ d\psi(x)$. Comme A et $d\psi$ sont inversibles, le rang de cette différentielle est le même que celui de $df(\psi(x))$, c'est-à-dire r.
La jacobienne en x de $A \circ f \circ \psi$ vaut, d'après l'égalité de la question b) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \lambda_{r+1}}{\partial x_1}(x) & \dots & & \frac{\partial \lambda_{r+1}}{\partial x_{r+1}}(x) & \dots & \frac{\partial \lambda_{r+1}}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_m}{\partial x_1}(x) & \dots & & \frac{\partial \lambda_m}{\partial x_{r+1}}(x) & \dots & \frac{\partial \lambda_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Pour que cette matrice soit de rang r, il faut qu'on ait $\left(\frac{\partial \lambda_i(x)}{\partial x_j}\right)_{i \geq r+1, j \geq r+1} = 0$.
Quitte à réduire encore un peu U_1 et U_2, de façon à ce que U_1 soit de la forme $U_1^{(1)} \times U_1^{(2)}$ avec $U_1^{(1)} \subset \mathbb{R}^r$ et $U_1^{(2)} \subset \mathbb{R}^{n-r}$ connexe par arcs, on a alors, pour tout k et tout $x = (x_1, ..., x_n) \in U_1$:

$$\lambda_k(x_1, ..., x_n) = \lambda_k(x_1, ..., x_r, 0, ..., 0)$$

(car les dérivées partielles de λ_k selon $x_{r+1}, ..., x_n$ sont nulles.)
d) Soit g l'application définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^r$ telle que :

$$g(x_1, ..., x_r) = (x_1, ..., x_r, \lambda_{r+1}(x_1, ..., x_r, 0, ..., 0), ..., \lambda_m(x_1, ..., x_r, 0, ..., 0))$$

Cette application est différentiable, de différentielle injective en 0 : en effet, si on note π la projection sur les r premières coordonnées, $\pi \circ g = Id$ donc $\pi \circ dg(0) = Id$, ce qui impose à $dg(0)$ d'être injective.
D'après la question 1. de l'exercice 2, il existe donc V_A, V_0' deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^m$ et $\tilde{\phi} : V_A \to V_0'$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tels que, pour tout $(x_1, ..., x_n)$ assez proche de 0 :

$$\tilde{\phi} \circ g(x_1, ..., x_r) = (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0)$$

On pose $\phi = \tilde{\phi} \circ A$ et $V_0 = A^{-1}(V_A)$. Alors $\phi : V_0 \to V_0'$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et, pour tout $(x_1, ..., x_n)$ dans U_0 (quitte à réduire encore un peu U_0) :

$$\begin{aligned} \phi \circ f \circ \psi(x_1, ..., x_n) &= \tilde{\phi} \circ A \circ f \circ \psi(x_1, ..., x_n) \\ &= \tilde{\phi}(x_1, ..., x_r, \lambda_{r+1}(x_1, ..., x_n), \lambda_m(x_1, ..., x_n)) \\ &= \tilde{\phi}(x_1, ..., x_r, \lambda_{r+1}(x_1, ..., x_r, 0, ..., 0), \lambda_m(x_1, ..., x_r, 0, ..., 0)) \\ &= \tilde{\phi} \circ g(x_1, ..., x_r) \\ &= (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0) \end{aligned}$$

2. a) On peut prendre $\phi(a, b) = (a, b)$ et $\psi(a, b) = (a, b - a^2)$.

b) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $df(x, y).(h, l) = (h, 2yl)$. On a donc $\text{rang}(df(x, y)) = 2$ si $y \neq 0$ et $\text{rang}(df(x, y)) = 1$ si $y = 0$.
Supposons qu'il existe ψ, ϕ des difféomorphismes au voisinage de $(0, 0)$ tels que $\psi \circ f \circ \phi(a, b) = (a, 0)$ pour tous (a, b) assez proches de $(0, 0)$. Puisque l'application $(a, b) \to (a, 0)$ a une différentielle de rang 1 en tout point, f doit aussi avoir une différentielle de rang 1 en tout point assez proche de 0. Or on a vu que ce n'était pas le cas.
c) Soit $U = \{x \in V \text{ tq rang}(df) \text{ admet un maximum local en } x\}$.

Lemme 9.1 *U est dense dans V.*

Soit W un ouvert de V quelconque. L'application $x \to \text{rang}(df(x))$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur W. Elle admet donc un maximum sur W. Si x_0 est un point où le maximum est atteint, $x_0 \in U$.

Lemme 9.2 *U est ouvert et df est de rang localement constant sur U.*

Même démonstration qu'en 1.a).
Montrons maintenant que, sur U, df est injective. Soit $x \in U$ quelconque.
Puisque df est de rang localement constant au voisinage de x, il existe (d'après le théorème de la question 1.d)), des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes ϕ et ψ, définis au voisinage de 0 et $f(x)$, tels que $\phi(0) = x, \psi(f(x)) = 0$ et, pour tout $y = (y_1, ..., y_n)$ assez proche de x :

$$\psi \circ f \circ \phi(y_1, ..., y_n) = (y_1, ..., y_r, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$$

où r est le rang de $df(x)$.
On a nécessairement $r = n$, sinon f n'est pas injective : $f \circ \phi(0, ..., 0, t) = f \circ \phi(0)$ pour tout t assez petit (et pourtant $\phi(0, ..., 0, t) \neq \phi(0)$ car ϕ est injective).
Donc $df(x)$ est une application de rang n de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$. Cela implique que $df(x)$ est injective et que $m \geq n$.