Td n° 11 d'Analyse fonctionnelle

Espaces de Hilbert et opérateurs compacts

Séance du 17 Mai 2013

Exercice 1. *Convergence faible dans un Hilbert*

Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\geq 1}$ une base hilbertienne.

1. Montrer qu'une suite bornée (x_n) converge faiblement si et seulement si pour tout p, $(e_p|x_n)$ admet une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $n \to \infty$. En déduire que $e_n \rightharpoonup 0$.

2. Quelle est l'adhérence faible de la sphère unité $\mathbb{S} = \{x \in H | \|x\| = 1\}$?

3. On considère $F = \{e_m + me_n | m, n \geq 1\}$. 0 est-il dans l'adhérence séquentielle faible de F ? Et dans l'adhérence séquentielle faible de l'adhérence séquentielle faible de F ? Qu'en conclure ?

⋆

Exercice 2. *Opérateurs compacts*

1. Soient E et F des Banach. Montrer qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini est compact, et que la limite d'opérateurs de rang fini est compacte.

2. Si F est un Hilbert, montrer tout $T \in \mathcal{K}(E, F)$ est limite d'opérateurs de rang fini.

3. Soit E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est réfléxif. Montrer que T est compact si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de E convergeant faiblement vers un certain x, la suite $(Tx_n)_n$ converge fortement vers Tx.

4. On considère la multiplication par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $M_a\ : \ell^2 \to \ell^2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que M_a est continue si et seulement si $(a_n) \in \ell^\infty$. Montrer que M_a est compacte si et seulement si $a_n \to 0$.

⋆

Exercice 3. *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne (e_n) de H telle que $\sum_n \|Te_n\|^2 < \infty$.

1. Soit (f_p) une base hilbertienne de H. Montrer que

$$\sum_p \|T^* f_p\|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2.$$

En déduire que pour toute base hibertienne $(\tilde{e}_m)$ de H,

$$\sum_m \|T\tilde{e}_m\|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2.$$

On note cette quantité $\|T\|^2_{HS}$.

2. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est compact. Que dire de la réciproque ?

3. On suppose que $H = L^2(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $L^2(\Omega \times \Omega)$. On définit

$$(T_K f)(x) = \int K(x, y) f(y) dy.$$

Montrer que pour toute base hilbertienne (e_n) de $L^2(\Omega)$ on a

$$\|K\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)} = \sum_n \|T_K e_n\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

4. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\Omega)$ s'écrit de manière unique sous la forme T_K.

⋆

Exercice 4. *Réciproque et application du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov*

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $p \in [1, \infty[$ et $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$. Si $f \in L^p(\Omega)$, on étend implicitement f à $\mathbb{R}^d$ en posant $f(x) = 0$ pour $x \notin \Omega$. On peut alors considérer pour $h \in \mathbb{R}^d$:

$$(\tau_h f)(x) = f(x+h).$$

On suppose que $\mathcal{F}$ est relativement compacte.

1. Montrer que pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ quand $|h| \to 0$.

2. Conclure : montrer que $\mathcal{F}$ est bornée et vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall f \in \mathcal{F},\ \forall h \in B(0,\delta), \quad \|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Application (du sens direct).

3. Soit $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, montrer que l'opérateur $T : f \in L^p(\mathbb{R}^d) \to f * g1_\omega \in L^p(\omega)$ est compact.

⋆