Td n° 11 d'Analyse fonctionnelle

Opérateurs non bornés

Séance du 16 mai 2014

Exercice 1. *Opérateurs auto-adjoints et essentiellement auto-adjoints*

Soit A symétrique de domaine dense, qui vérifie $< \phi, A\phi > \geq 0$ pour $\phi \in D(A)$.

1. Montrer que $||(A+I)\phi||^2 \geq ||\phi||^2 + ||A\phi||^2$.

2. Si A est fermé, montrer que Im(A+I) est fermé

3. Montrer que A est auto-adjoint ssi A est fermé et l'équation $A^*\phi = -\phi$ n'a pas de solution non triviale.

4. Application : on considère l'opérateur $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ défini sur $D(A) = C_c^\infty(\mathbb{R})$. Quel est son adjoint sur $L^2(\mathbb{R})$? A est-il essentiellement auto-adjoint ?

⋆

Exercice 2. *Semi-groupe adjoint*

1. Soit H un espace de Hilbert. On fait l'identification $H = H'$. Soit $T = \{T(t),\ t \geq 0\}$ tel que $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$ et $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. On pose $f_t = \frac{1}{t}\int_0^t T(s) f ds$. Montrer que $\|T(h)f_t - f_t\| \to 0$ quand $h \to 0$.

2. On suppose que pour tout $f, g \in H$, l'application $t \mapsto < T(t)f, g >$ est continue. Montrer que T est un semi-groupe.

3. Soit $A : D(A) \to H$ un opérateur générant un semi-groupe T sur H. Montrer que $T^* = \{T(t)^*, t \geq 0\}$ est un semi-groupe. On note B son génénérateur infinitésimal.

4. Montrer que $B = A^*$.

⋆

Exercice 3. *Extensions auto-adjointes*

1. Montrer que l'opérateur

$$\begin{aligned} T : \{\phi \in H^1([0,1]), \phi(0) = \phi(1) = 0\} &\to L^2 \\ u &\mapsto i\frac{du}{dx} \end{aligned}$$

est symétrique. Quel est son adjoint T^* ?

2. Soit S une extension auto-adjointe de T. Montrer que

$$\forall \phi \in D(s),\ |\phi(0)|^2 = |\phi(1)|^2.$$

3. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{U}(1)$ tel que pour tout $\phi \in D(S)$, $\phi(1) = \alpha\phi(0)$.

4. Conclure : quelles sont exactement les extensions auto-adjointes de T ?

⋆

Exercice 4. *Théorème de Bôchner*

Rappel On dit que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est semi-définie positive si pour tout $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{R}^d$ et tout $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(\xi_j - \xi_k) z_j \bar{z_k} \geq 0,$$

et $f(-\xi) = \bar{f(\xi)}$.

1. Soit μ une mesure finie positive. Montrer que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(\xi) = \int e^{ix.\xi} \mu(dx)$$

est semi-défine positive, continue, et satisfait $\mu(\mathbb{R}^d) = f(0)$.

2. Réciproquement, on considère une fonction f semi-définie positive continue. On suppose $f(0) = 1$. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a $|f(y)| \leq 1$.

3. On considère la forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$l(\phi) = \int \hat{\phi}(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Montrer que pour tout $\psi \in \mathcal{S}$ strictement positive, $l(\psi) > 0$.

4. On introduit la fonction $K_\lambda(x) = \prod_{n=1}^{d} \frac{1}{(1+\lambda x_n^4)}$. Soit $\phi \in \mathcal{S}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que pour λ assez petit,

$$\phi(x) \leq (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) K_\lambda(x).$$

5. En déduire

$$l(\phi) \leq (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) \int \hat{K}_\lambda(\xi) f(\xi).$$

6. Montrer que $|l(\phi)| \leq \|\phi\|_{L^\infty}$ et conclure.

⋆

Exercice 5. *Théorème spectral*

Rappel Le spectre $\sigma(T)$ est le complèmentaire de l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $T - \lambda : D(T) \to H$ est bijective d'inverse borné.

1. Montrer la caractérisation suivante du spectre d'un opérateur auto-adjoint : $\lambda \in \sigma(T)$ si et seulement si il existe une suite $x_n \in D(T)$ telle que $\|x_n\| = 1$ et $\|(T - \lambda)x_n\| \to 0$.

2. Soit F une fonction réelle mesurable bornée définie sur l'espace mesuré fini $(X, d\mu)$. On considère l'opérateur de multiplication

$$\begin{aligned} T_F : D(T_F) = \{\phi \in L^2(X, d\mu),\ F\phi \in L^2\} &\to L^2(X, d\mu) \\ \phi &\mapsto F\phi \end{aligned}$$

Montrer que le spectre de F correspond à l'image essentielle de F, c'est à dire

$$\{\lambda, \forall \varepsilon,\ \mu(\{\lambda - \varepsilon < F < \lambda + \varepsilon\}) > 0\}.$$

3. Soit A un opérateur autoadjoint. Soit S le semi-groupe engendré par iA. On suppose $H = \overline{\mathrm{Vect}(S(t)\phi)_{t \in \mathbb{R}}}$. Montrer que $\sigma(A) = supp(\mu_\phi)$.

⋆