Analyse fonctionnelle
TD n° 11

Distributions

Séance du 24 avril 2017

Exercice 1. *Échauffement*
On pose $f(x) = |\sin(x)|$, $x \in \mathbb{R}$. Calculer f'' au sens des distributions.

⋆

Exercice 2. *Quelques exemples de distributions*

1. Montrer que $u : \phi \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{(j)}(j)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre infini.

2. Montrer que la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$, mais ne se prolonge pas à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Montrer qu'une distribution positive $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (*i.e.* telle que pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ positive, $\langle u, \phi \rangle \geq 0$) s'identifie à une mesure de Radon.

⋆

Exercice 3. *Distributions dont le support est un point*
Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tel que $\operatorname{supp} u = \{0\}$. Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive, telle que $\psi = \mathbb{1}$ sur un voisinage de $\overline{B(0,1)}$ et $\operatorname{supp} \psi \in B(0,2)$. On pose $\psi_r(x) := \psi(x/r)$ pour $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Rappeler pourquoi u est d'ordre fini, que l'on notera $m \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $\forall r > 0$, $\psi_r u = u$.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, telle que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$, on ait $(D^\alpha \varphi)(0) = 0$. Montrer que $\|\psi_r \varphi\|_{\mathcal{C}^m} \to 0$ quand $r \to 0$.

Indication : On pourra montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage K de 0, tel que pour tout $x \in K$, et tout multi-indice β tel que $|\beta| \leq m$, $|(D^\beta \varphi)(x)| \leq \varepsilon (n|x|)^{m-|\beta|}$.

4. En déduire que $\langle u, \varphi \rangle = 0$.

5. Montrer qu'il existe des nombres complexes a_β tels que $u = \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta \delta_0^{(\beta)}$.

⋆

Exercice 4. *Valeur principale de $1/x$*
On définit la valeur principale de $1/x$, notée $\operatorname{vp}(\frac{1}{x})$, de la manière suivante :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \left\langle \operatorname{vp}(\tfrac{1}{x}), \phi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right).$$

1. Grâce à un développement de Taylor, montrer que la limite existe, et que la formule définit bien une distribution. Quel est son ordre ?

2. Montrer que $x \cdot \operatorname{vp}(\frac{1}{x}) = \mathbb{1}$.

3. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xu = \mathbb{1}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u = \operatorname{vp}(\frac{1}{x}) + c\delta_0$.

4. Montrer que $|x|^{\alpha-2}x \to \mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $\alpha \searrow 0$.

5.* Montrer que $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))$ est impaire au sens des distributions, c'est-à-dire que, en notant $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, on a $\langle \mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})), \check{\varphi}\rangle = -\langle \mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})), \varphi\rangle$. En déduire $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))$.

⋆

Exercice 5. *Support et ordre*

Soit u l'application linéaire définie, pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, par :

$$u(\phi) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^n \phi\left(\frac{1}{i}\right) - n\phi(0) - \log(n)\phi'(0) \right).$$

1. Montrer que $u(\phi)$ est bien définie, et que u est une distribution d'ordre au plus 2.

2. Quel est le support S de u ?

3. On considère une suite d'élément ϕ_k de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ satisfaisant (i) $\mathrm{supp}(\phi_k) \subseteq]\frac{1}{k+1}, 2[$, (ii) $0 \le \phi_k \le 1$, (iii) $\phi_k|_{[\frac{1}{k},1]} = 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$. À l'aide des ϕ_k, montrer qu'on ne peut obtenir aucune majoration du type

$$|u(\phi)| \le C \sum_{i=0}^{p} \sup_{x\in S} |\phi^{(i)}(x)|.$$

4. Quel est l'ordre de u ?

Indication : On pourra considérer des fonctions du type $\psi_k(x) := \psi(x) \int_0^x (\int_0^y \phi(kt)dt)dy$, où $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$ d'intégrale 1, et $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(]-1,2[)$ est telle que $\psi(x) = 1$ pour $x \in [0,1]$.

⋆

Exercice 6. *Polynômes d'Hermite*

Soit l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$.

1. Montrer que les polynômes forment un sous-espace vectoriel dense de H.

Indication : On pourra montrer que si $f \in H$ est orthogonal à l'espace engendré par les polynômes, la fonction holomorphe

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{zt-t^2}dt$$

est identiquement nulle, et vérifie $F(ix) = \mathcal{F}(fe^{-t^2})$.

On considère les polynômes de Hermite $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ et les fonctions de Hermite $\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$.

2. Montrer que H_n est un polynôme de degré n et qu'il est orthogonal (pour le produit hermitien de H) à l'espace engendré par les polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

3. Montrer que $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ et que $\frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$.

4. Montrer que $\left(\frac{d}{dx} + x\right)\psi_n = 2n\psi_{n-1}$ et que $\left(-\frac{d}{dx} + x\right)\psi_n = \psi_{n+1}$.

5. Montrer enfin que $\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)\psi_n = -(2n+1)\psi_n$.

6. Montrer que ψ_n est une fonction propre pour la transformée de Fourier.

Indication : On pourra calculer l'équation différentielle satisfaite par $\mathcal{F}(\psi_n)$.

⋆