Analyse fonctionnelle
TD n° 11

Opérateurs compacts

Séance du 14 mai 2018

Exercice 1. *Échauffement*

Sur l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$, on considère la multiplication par $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $M_a : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}),\ \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \{a_n u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer que M_a est continue si et seulement si $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Montrer que M_a est compacte si et seulement si $a_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

⋆

Exercice 2. *Un opérateur compact « renforce » la convergence*

Soient E et F deux espaces de Banach, et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est réflexif. Montrer que T est compact si et seulement si l'image par T de toute suite faiblement convergente de E est une suite fortement convergente de F.

⋆

Exercice 3. *Fonctions à support dans un même compact*

Soit K un compact de $\mathbb{R}$. On note $L^2_K(\mathbb{R})$ le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions à support dans K, que l'on munit de la norme induite.

1. Soit $u \in L^2_K(\mathbb{R})$. Montrer que la transformée de Fourier de u, notée $\hat{u}$, définit une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, qui est la restriction à la droite réelle d'une fonction entière.

2. Soit $\{u_n\}_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $L^2_K(\mathbb{R})$. On suppose que $u_n \rightharpoonup 0$ (pour la convergence faible). Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, $\widehat{u_n}(\xi) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

3. Montrer que la convergence précédente est en fait uniforme sur les compacts.

4. En déduire que la transformée de Fourier

$$\mathcal{F} : L^2_K(\mathbb{R}) \longrightarrow L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$$

est une application linéaire compacte.

⋆

Exercice 4. *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

Soit H un espace de Hilbert séparable, et $T \in \mathcal{L}(H)$.

Définition 1. *On dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne (e_n) de H telle que $\sum_n \|Te_n\|^2 < \infty$.*

1. Soit (f_p) une base hilbertienne de H. Montrer que

$$\sum_p \|T^* f_p\|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2.$$

En déduire que pour toute base hilbertienne $(\tilde{e}_m)$ de H, $\sum_m \|T\tilde{e}_m\|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2$. On note $\|T\|_{HS}^2$ cette quantité.

2. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est continu, de norme $\leq \|T\|_{HS}$.

3. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est compact. Que dire de la réciproque ?

Indication : Penser à l'exercice 1.

⋆

Exercice 5. *Opérateurs à noyaux*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega, \mathbb{R})$.

1. Soit $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de $L^2(\Omega \times \Omega)$. On définit

$$(T_K f)(x) = \int_\Omega K(x, y) f(y) dy.$$

Montrer que T_K est un opérateur de Hilbert-Schmidt, avec $\|T_K\|_{HS} = \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$.

2. Montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur $H = L^2(\Omega)$ s'écrit de manière unique sous la forme T_K.

3. En utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, montrer directement que T_K est limite en norme d'opérateurs de rang fini.

⋆

Exercice 6. *Théorème de Krein-Rutman*

Soit E un espace de Banach, et soit C un cône convexe de sommet 0 (*i.e.* pour tout x, $y \in C$ et λ, $\mu \geq 0, \lambda x + \mu y \in C$). On suppose de plus que C est fermé, d'intérieur non vide, et que $C \cap (-C) = \{0\}$.

Soit T un opérateur compact tel que $T(C \setminus \{0\}) \subset \mathring{C}$. On fixe $u \in \mathring{C}$.

1. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $Tu - ru \in C$.

2. On suppose qu'il existe $x \in C$ et λ tel que $T(x + u) = \lambda x$. Montrer que $\lambda \geq r$.

Indication : On pourra prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{\lambda}{r}\right)^n x - u \in C$.

3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in C$, $\|x + u\| \geq \alpha$. En déduire que l'application $\Phi : x \in C \mapsto T(\frac{x+u}{\|x+u\|})$ est continue, et appliquer le théorème du point fixe de Schauder[1] à Φ pour prouver qu'il existe $x \in C$ tel que $T(x + u) = \|x + u\|x$.

4. En reprenant les premières questions avec εu au lieu de u, et en faisant tendre ε vers 0, montrer qu'il existe $x_0 \in C \setminus \{0\}$ et $\mu_0 > 0$ tels que

$$T(x_0) = \mu_0 x_0.$$

5. Soit $x \in C \setminus \{0\}$ tel que $T(x) = \mu x$. Montrer que $\mu = \mu_0$ et $x \in \mathbb{R}x_0$.

Indication : On pourra montrer qu'il existe $b > 0$ tel que $(1-\beta)x_0 - \beta x \in C$ pour $0 \leq \beta \leq b$ et $(1 - \beta)x_0 - \beta x \notin C$ pour $b < \beta \leq 1$.

6. Soit $x \in E$ tel que $T(x) = \mu x$. Montrer que $\mu \leq \mu_0$.

7. Montrer que le théorème de Krein-Rutman est une généralisation du théorème de Perron-Frobenius : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice à coefficients strictement positifs ; alors M admet au moins une valeur propre, et le rayon spectral de M est une valeur propre simple de M, associée à un vecteur propre à coefficients strictement positifs.

⋆

1. En voici l'énoncé : soit $\tilde{C}$ un convexe fermé non-vide dans un espace vectoriel topologique séparé X. Toute application continue f de $\tilde{C}$ dans $\tilde{C}$ telle que $f(\tilde{C})$ soit relativement compact admet un point fixe.