Analyse fonctionnelle
TD n° 11

Transformation de Fourier - Espaces de Sobolev

Séance du 15 avril 2019

Exercice 1. *Échauffement : opérateurs différentiels*

1. Soit $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha X^\alpha$ un polynôme sur $\mathbb{R}^d$ non identiquement nul, $P(D)$ l'opérateur différentiel associé. Montrer que si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $P(D)T = 0$, alors $T = 0$.

2. Soit $p \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On s'intéresse maintenant à l'opérateur $P\varphi := \mathcal{F}^{-1}(p\widehat{\varphi})$ à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

a) Soit $a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On suppose que $\text{supp}(a * \varphi) \subset \text{supp}(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\text{supp}(a) \subset \{0\}$.

b) Montrer que si $\text{supp}(P\varphi) \subset \text{supp}(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors p est un polynôme et P un opérateur différentiel.

⋆

Exercice 2. *Petites questions sur $H^s(\mathbb{R}^d)$*

1. Vérifier que $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s < -\frac{d}{2}$.

2. Montrer que l'injection de $H^{s_1}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{s_2}(\mathbb{R}^d)$, pour $s_1 \geq s_2$, est continue.

3. Soit $\lambda > 0$. Montrer que l'opérateur différentiel $P = -\Delta + \lambda$ est un isomorphisme de $H^{s+2}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^d).$$

On pourra montrer que si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est d'ordre m, alors T appartient à $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s < -m - \frac{d}{2}$.

5. On suppose maintenant que $s \in]\frac{d}{2}, \frac{d}{2} + 1[$.

a) Montrer que pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et x, y, $\xi \in \mathbb{R}^d$, il existe une constante $C > 0$ (dépendant de d et α) telle que

$$|e^{ix\cdot\xi} - e^{iy\cdot\xi}| \leq C|x - y|^\alpha |\xi|^\alpha.$$

b) En déduire que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tout $\alpha \in]0, s - \frac{d}{2}[$, il existe $C(\alpha, d)$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C(\alpha, d)\|u\|_{H^s}.$$

c) En conclure que $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans l'ensemble $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ des fonctions α-höldériennes bornées.

⋆

Exercice 3. *Transformée de Fourier de la distribution diagonale*

On se propose de calculer la transformée de Fourier de la distribution tempérée sur $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

1. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2_{\xi,\eta})$. Montrer que

$$\langle \widehat{T}, \psi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon, \quad I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\xi^2}\widehat{\psi}(\xi,\xi)d\xi.$$

2. En exprimant $\widehat{\psi}(\xi,\xi)$, montrer que

$$I_\varepsilon = 2\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\psi(x, 2\sqrt{\varepsilon}z - x)dxdz.$$

3. En déduire $\widehat{T}$.

⋆

Exercice 4. *L'équation de Schrödinger*

On considère l'équation sur $\mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

1. On suppose $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Résoudre l'équation (1) dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$.
2. Justifier dans quel sens la transformée de Fourier de $e^{it|\xi|^2}$ est bien définie.
3. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$, on a $\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2}) = \frac{1}{(-4\alpha\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{\frac{|x|^2}{4\alpha}}$.
4. Montrer que cette égalité reste vraie, au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, pour α imaginaire pur.
5. En déduire qu'il existe une constante C (à déterminer) telle que pour $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ la solution $u(t,x)$ vérifie, pour $t > 0$ $\|u(t,.)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}}\|u_0\|_{L^1}$.

⋆

Exercice 5. *Un théorème dû à Hörmander*

Soit d un entier supérieur ou égal à 1. On rappelle que pour $h \in \mathbb{R}^d$ et $1 \leq p < \infty$, la translation $\tau_h : f \in L^p(\mathbb{R}^d) \mapsto f(\cdot - h) \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est une application linéaire continue.

1. Montrer que pour tout $1 \leq p < \infty$ et tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\tau_h f + f\|_{L^p} \xrightarrow{|h|\to+\infty} 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p}.$$

Indication : On pourra commencer par le cas où le support de f est compact.

2. Soient $1 \leq p, q < \infty$ avec $p > q$, et on considère une application linéaire T bornée de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans $L^q(\mathbb{R}^d)$, qui commute avec les translations τ_h pour tout $h \in \mathbb{R}^d$. En étudiant $T(\tau_h f + f)$, montrer que T est nulle.

3. On fixe une fonction test $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ non nulle. Montrer par l'absurde qu'il existe $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $w * f \notin L^1(\mathbb{R}^d)$.

⋆