Corrigé – TD 11

Dualité $\mathbb{L}^p$–$\mathbb{L}^q$, Dérivée des intégrales, Lois de variables aléatoires

Exercice 0 (Séquentielle compacité faible dans $\mathbb{L}^p$)**.**
Soient $p \in]1, \infty[$, q son exposant conjugué, $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue. Soit (f_n) une suite bornée de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (c'est-à-dire que la suite $(\|f_n\|_p)_{n\geq 1}$ est bornée).

1. Rappeler que $\mathbb{L}^q(\Omega)$ est séparable.
2. Soit D une partie dénombrable dense de $\mathbb{L}^q(\Omega)$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ telle que pour tout $h \in D$,
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} h d\lambda \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
3. Montrer que pour tout $g \in \mathbb{L}^q(\Omega)$,
$$\phi(g) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g d\lambda \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
4. En déduire qu'il existe $f \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ telle que l'on ait *convergence faible* dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ de la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ vers f, c'est-à-dire :
$$\forall g \in \mathbb{L}^q(\Omega), \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g d\lambda = \int_\Omega f g d\lambda.$$
5. Le résultat précédent subsiste-t-il pour $p = 1$?

Corrigé :

1. Rien à corriger.
2. Il s'agit d'un simple procédé diagonal : on commence par numéroter tous les fonctions de D : $h_1, h_2, \ldots$. Considérons h_1, par Hölder, la suite $\left(\int f_n h_1 d\lambda\right)_{n\geq 1}$ est bornée par $\|h_1\|_q \cdot \sup_n \|f_n\|_p$, donc comme il s'agit d'une suite de réels, on peut trouver une extractrice ψ_1 telle que $\int f_{\psi_1(n)} h_1 d\lambda$ converge. Ensuite en considérant la suite $\left(\int f_{\psi_1(n)} h_2 d\lambda\right)_{n\geq 1}$ on construit une extractrice ψ_2 telle que $\int f_{\psi_1\circ\psi_2(n)} h_2 d\lambda$ converge, et par récurrence on construit une suite d'extractrice $(\psi_k)_k$ qui vérifie que pour tout k
$$\int f_{\psi_1\circ\cdots\circ\psi_k(n)} h_k d\lambda \quad \text{converge quand } n \to \infty.$$
On définit $\varphi(n) = \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_n(n)$. Je laisse au lecteur le soin de vérifier que $\int f_{\varphi(n)} h_k d\lambda$ converge quand $n \to \infty$ pour tout k.

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à shen.lin@ens.fr, ou bien à passer au bureau V7.

3. Le plus simple pour montrer que la suite $(\int f_{\varphi(n)} g d\lambda)_{n\geq 1}$ converge est de montrer qu'elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, et soit h une fonction de D qui vérifie $\|g-h\|_q < \varepsilon$. Soient $n, m \geq 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int f_{\varphi(n)} g d\lambda - \int f_{\varphi(m)} g d\lambda\right| &\leq \left|\int f_{\varphi(n)}(g-h) d\lambda\right| + \left|\int f_{\varphi(m)}(g-h) d\lambda\right| \\ &\quad + \left|\int f_{\varphi(n)} h d\lambda - \int f_{\varphi(m)} h d\lambda\right|.\end{aligned}$$

   Par Hölder les deux premiers termes sont inférieurs à $\varepsilon(\sup_n \|f_n\|_p)$ et comme la suite $\int f_{\varphi(n)} h d\lambda$ converge (par la question précédente) elle est de Cauchy, donc il existe n_0 tel que si $n, m > n_0$,

$$\left|\int f_{\varphi(n)} g d\lambda - \int f_{\varphi(m)} g d\lambda\right| \leq (2 \sup \|f_n\|_p + 1)\varepsilon,$$

   ce qui montre que la suite est de Cauchy.

4. À la question précédente on a défini une fonction de $\mathbb{L}^q$ dans $\mathbb{R}$:

$$\phi(g) = \lim_{n\to\infty} \int f_{\varphi(n)} g d\lambda.$$

   Ici on veut utiliser le théorème de dualité entre $\mathbb{L}^p$ et $\mathbb{L}^q$: si λ est σ-finie et $p < \infty$ alors il y a bijection entre $\mathbb{L}^q(\lambda)$ et les formes linéaires continues sur $\mathbb{L}^p(\lambda)$ et cette bijection est $f \mapsto \Phi_f \colon g \mapsto \int f g d\lambda$. Donc pour répondre à la question il suffit de montrer que ϕ est une forme linéaire continue. La linéarité est facile à montrer et la continuité découle de Hölder : $\phi(g) \leq (\sup \|f_n\|_p)\|g\|_q$.

5. Non, le résultat n'est plus vrai pour $p = 1$: prenons la suite de fonction $f_n = \mathbf{1}_{[n,n+1]}$ qui est bien bornée dans $\mathbb{L}^1$, et supposons qu'il existe une extractrice φ et une fonction $f \in \mathbb{L}^1$ telle que pour toute fonction $g \in \mathbb{L}^\infty$, $\lim \int f_{\varphi(n)} g d\lambda = \int f g d\lambda$. Regardons des fonctions particulières :

   - la fonctions $g = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ montre que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 1$.
   - la suite de fonction $g_k = \mathbf{1}_{[k,k+1]}$ montre que $\int_k^{k+1} f d\lambda = 0$ pour tout k.

   Ces deux résultats sont contradictoires, ce qui conclut la preuve par l'absurde.

1 Dérivée des intégrales en dimension n

On note $B(x, r)$ la boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$ de rayon $r > 0$ et de centre x. On rappelle que λ_n désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.

> Pour les exercices de cette section, veuillez voir le polycopié de cours (Section 4.6) pour trouver les corrigés. Une autre référence est le livre classique de W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*.

Exercice 1 (Lemme de recouvrement de Vitali)**.** Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui peut s'écrire comme l'union d'une famille finie de boules $B(x_i, r_i), 1 \leq i \leq N$. Alors il existe un ensemble $S \subset \{1, \ldots, N\}$ non-vide tel que les boules $B(x_i, r_i), i \in S$ sont deux-à-deux disjointes, et

$$U \subset \bigcup_{i \in S} B(x_i, 3r_i)\,.$$

Exercice 2 (Fonctions maximales)**.** Soit $\mu\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ une mesure signée. Introduisons la *fonction maximale* $M\mu$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad M\mu(x) = \sup_{0<r<\infty} \frac{|\mu|(B(x,r))}{\lambda_n(B(x,r))}\,,$$

où $|\mu|$ est la mesure de la variation totale de μ.

1. Montrer que $M\mu$ est semi-continue inférieurement, et est donc mesurable.
2. (Inégalité maximale de Hardy–Littlewood) Pour tout $a > 0$, montrer que
$$\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n \colon M\mu(x) > a\}) \leq \frac{3^n|\mu|(\mathbb{R}^n)}{a}.$$
3. Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$, et soit μ la mesure signée définie par $\mu = f \cdot \lambda_n$. Vérifier que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad M\mu(x) = Mf(x) := \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{\lambda_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f| d\lambda_n\,.$$
La fonction $Mf\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ est également appelée *fonction maximale associée à* f. Que dit alors l'inégalité maximale de la question 2 ?
4. Montrer que si $Mf \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f = 0$ Lebesgue-presque partout.
5. ($\star$) Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$, a-t-on toujours Mf localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 3 (Points de Lebesgue)**.** Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle *point de Lebesgue* de f tout point $x \in \mathbb{R}^n$ pour lequel

$$\frac{1}{\lambda_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, d\lambda_n(y) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Prouver que Lebesgue-presque tout les points de $\mathbb{R}^n$ sont points de Lebesgue pour f.

2 Lois de variables aléatoires

Exercice 4. Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X = Y$ p.s. (c'est-à-dire $\mathbb{P}$ presque partout). Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
2. On suppose que X et Y ont la même loi.

(a) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

(b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

Corrigé :

1. Si $X = Y$ p.s. alors $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)]$ pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, ce qui montre que X et Y ont la même loi. La réciproque est fausse. Considérons une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Posons $Y = -X$. Alors Y est une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. En effet soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Alors
$$\mathbb{E}[g(Y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(-x) e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-x^2/2}\, dx.$$
Donc X et Y ont la même loi mais ne sont pas égales p.s.

2. (a) Pour toute fonction borélienne $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, la fonction $g \circ f$ est borélienne. Comme X et Y ont la même loi, on a
$$\mathbb{E}[g \circ f(X)] = \mathbb{E}[g \circ f(Y)],$$
ce qui montre que $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

   (b) On reprend les variables X et Y de la question 1. Soit $Z = X$. Alors $XZ = X^2$ et $YZ = -X^2$. La loi de X^2 est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ (différente de la mesure de Dirac δ_0) et la loi de $-X^2$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_-$ donc XZ et YZ n'ont pas la même loi.

Exercice 5 (Paradoxe de Bertrand)**.** On s'intéresse à la loi de la longueur d'une corde tirée "au hasard" sur un cercle de rayon 1. Formaliser et calculer cette loi dans les trois cas suivants :

1. On choisit les deux extrémités de la corde au hasard sur le cercle.

2. On choisit le centre de la corde au hasard sur le disque unité.

3. On choisit au hasard la direction du rayon orthogonal à la corde, puis le centre de la corde uniformément sur ce rayon.

Corrigé : Les deux premiers cas sont traités dans le polycopié de J.-F. Le Gall, section 8.1.4.

Exercice 6. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne $(X_1, \dots, X_n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de loi
$$\mathbf{1}_{[0,1]^n}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

1. Construire, à l'aide des événements $A_\sigma = \{X_{\sigma_1} < \dots < X_{\sigma_n}\}$ pour une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, n variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que
$$Y_1(\omega) \le \dots \le Y_n(\omega) \quad \text{et} \quad \{Y_1(\omega), \dots, Y_n(\omega)\} = \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$$
pour presque tout $\omega \in \Omega$.

2. Déterminer les lois des variables aléatoires $(Y_1, \ldots, Y_n)$ et $(Y_1/Y_2, \ldots, Y_{n-1}/Y_n)$.

Corrigé :

1. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On peut définir pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$Y_i(\omega) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} X_{\sigma_i}(\omega) \mathbf{1}_{\{X_{\sigma_1}(\omega) < \ldots < X_{\sigma_n}(\omega)\}}.$$

En effet, la mesure de Lebesgue des hyperplans de $\mathbb{R}^n$ où deux coordonnées sont égales est nulle. Ainsi, les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont bien définies.

2. Soit $f \colon [0,1]^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(Y_1, \ldots, Y_n)) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \int_{\{0 \leq x_{\sigma_1} < \ldots < x_{\sigma_n} \leq 1\}} f(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}) \, dx_1 \ldots dx_n \\
&= n! \int_{\{0 \leq x_1 < \ldots < x_n \leq 1\}} f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n.
\end{aligned}$$

La loi de $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est donc

$$n! \, \mathbf{1}_{\{0 \leq x_1 < \ldots < x_n \leq 1\}} \, dx_1 \ldots dx_n.$$

Soit maintenant $g \colon \,]0,1[^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a

$$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{Y_1}{Y_2}, \ldots, \frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right)\right) = n! \int_{\{0 < x_1 < \ldots < x_n < 1\}} g\left(\frac{x_1}{x_2}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) \, dx_1 \ldots dx_n.$$

Et $\phi \colon (x_1, \ldots, x_n) \in \{0 < x_1 < \ldots < x_n < 1\} \mapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, x_n\right) \in \,]0,1[^n$ est un C^1-difféomorphisme de jacobien égal à $(x_2 \ldots x_n)^{-1}$. Ainsi, d'après la formule de changements de variables puis le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(g\left(\frac{Y_1}{Y_2}, \ldots, \frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right)\right) &= n! \int_{]0,1[^n} g(u_1, \ldots, u_{n-1}) u_2 u_3^2 \ldots u_{n-1}^{n-2} u_n^{n-1} \, du_1 \ldots du_n \\
&= (n-1)! \int_{]0,1[^{n-1}} g(u_1, \ldots, u_{n-1}) u_2 u_3^2 \ldots u_{n-1}^{n-2} \, du_1 \ldots du_{n-1}.
\end{aligned}$$

Donc la loi de $(Y_1/Y_2, \ldots, Y_{n-1}/Y_n)$ est

$$(n-1)! \, u_2 u_3^2 \ldots u_{n-1}^{n-2} \, \mathbf{1}_{]0,1[^{n-1}}(u_1, \ldots, u_{n-1}) \, du_1 \ldots du_{n-1}.$$

Remarque : les variables $Y_1/Y_2, \ldots, Y_{n-1}/Y_n$ sont indépendantes, et chaque Y_i/Y_{i+1} est de loi $iy^{i-1} \mathbf{1}_{]0,1[}(y) dy$.