PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 11
MOUVEMENT BROWNIEN

Dans tous les exercices, $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien réel standard partant de 0 défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Invariance par isométrie)**.**
Démontrer la propriété d'invariance du mouvement brownien par isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^d$. Un isométrie vectorielle est une fonction $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telle que $\psi(0) = 0$ et $\|\psi(u) - \psi(v)\| = \|u - v\|$ ($\|.\|$ est la norme euclidienne).

Exercice 2 (Non dérivabilité du mouvement brownien)**.**
Montrer que

$$\liminf_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty \text{ et } \limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty.$$

En déduire que pour tout $s > 0$, presque sûrement le mouvement brownien n'est pas dérivable à droite en s.

Correctyion : Ces deux premiers résultats ont été vus en cours.

Exercice 3 (Convergence en loi)**.**
On pose $S_1 = \sup_{t\in[0,1]} B_t$. Montrer que la convergence suivante a lieu en loi :

$$\left(\int_0^t e^{B_s} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} e^{S_1}.$$

Correction : On remarque tout d'abord que, d'après la propriété de changement d'échelle du mouvement brownien,

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{B_s} ds &\overset{\text{loi}}{=} \int_0^t e^{\sqrt{t}B_{s/t}} ds.\\ &\overset{\text{loi}}{=} t\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s} ds.\end{aligned}$$

Or $t^{1/\sqrt{t}} \to 1$ quand $t \to \infty$. Il suffit donc de montrer la convergence en loi suivante:

$$\left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} e^{S_1}.$$

On va en fait montrer une convergence p.s. On remarque que

$$\left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \leq \left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}S_1} ds\right)^{1/\sqrt{t}} = e^{S_1}.$$

Il existe A un ensemble mesurable de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in A$, $t \mapsto B_t(\omega)$ est continu. Soit $\omega \in A$. On note $T(\omega) \in [0,1]$ tel que $B_{T(\omega)}(\omega) = S_1(\omega)$ (existe car $B(\omega)$ continu et

$[0, 1]$ compact). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta(\omega) > 0$ tel que $|B_t(\omega) - B_{T(\omega)}(\omega)| \leq \varepsilon$ pour $|t - T(\omega)| \leq \delta(\omega)$ (uniforme continuité sur les compacts). Ainsi,

$$\left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s(\omega)} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \geq (\delta(\omega))^{1/\sqrt{t}} e^{S_1(\omega)-\varepsilon}.$$

Donc,

$$\liminf_{t\to\infty} \left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s(\omega)} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \geq e^{S_1(\omega)-\varepsilon}.$$

On a montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, p.s.,

$$\liminf_{t\to\infty} \left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \geq e^{S_1-\varepsilon}.$$

En considérant une suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ (pour inverser le p.s. et le $\forall \varepsilon_k$), on en déduit que p.s.,

$$\liminf_{t\to\infty} \left(\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \geq e^{S_1}$$

ce qui implique la limite p.s. désirée.

Exercice 4 (Maxima locaux du mouvement brownien)**.**
Soient p, q, r, $s \in \mathbb{Q}_+$ tels que $p < q < r < s$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{p\leq t\leq q} B_t = \sup_{r\leq t\leq s} B_t\right) = 0.$$

En déduire que p.s. les maxima locaux de la fonction $t \longmapsto B_t$ sont distincts.

Correction : Nous allons utiliser la propriété que pour $s > 0$, le processus $B_t^{(s)} = B_{s+t} - B_s$ est un mouvement brownien indépendant de f_s. Ainsi les quatre tribus suivantes sont indépendantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{0,p} &= \sigma\left(B_t\ ,\ 0 \leq t \leq p\right) \\
\mathcal{F}_{p,q} &= \sigma\left(B_t - B_p\ ,\ p \leq t \leq q\right) \\
\mathcal{F}_{q,r} &= \sigma\left(B_t - B_q\ ,\ q \leq t \leq r\right) \\
\mathcal{F}_{r,s} &= \sigma\left(B_t - B_r\ ,\ r \leq t \leq s\right)
\end{aligned}$$

Décomposons maintenant l'évènement qui nous intéresse selon ces tribus :

$$\begin{aligned}
\sup_{p\leq t\leq q} B_t &= \sup_{r\leq t\leq s} B_t \\
B_p + \sup_{p\leq t\leq q}(B_t - B_p) &= B_p + (B_q - B_p) + (B_r - B_q) + \sup_{r\leq t\leq s}(B_t - B_r) \\
(B_r - B_q) &= \left[\sup_{p\leq t\leq q}(B_t - B_p) - (B_q - B_p)\right] - \sup_{r\leq t\leq s}(B_t - B_r)
\end{aligned}$$

Le terme de gauche est une variable gaussienne $\mathcal{F}_{q,r}-$mesurable, et le terme de droite est la somme d'une v.a. $\mathcal{F}_{p,q}$ mesurable et d'une v.a. $\mathcal{F}_{r,s}$ mesurable. Pour finir la démonstration , il suffit de montrer le lemme suivant : si X et Y sont deux v.a. réelles telles que X est à densité par rapport à la mesure de Lesgue et que Y est indépendante de X, alors $\mathbb{P}[X = Y] = 0$. Je laisse ce lemme au lecteur.

Exercice 5 (Le mouvement brownien n'est à variation finie sur aucun intervalle)**.**
Soient a et b tels que $0 \leq a < b$. On pose, pour $n \geq 0$,

$$X_n = \sum_{k=1}^{2^n} \left(B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}}\right)^2 .$$

Calculer la moyenne et la variance de X_n puis trouver la limite p.s. de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$. En déduire que p.s., la fonction $t \longmapsto B_t$ n'est à variation finie sur aucun intervalle non trivial. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est à variation finie sur l'intervalle $[a, b]$ si les sommes

$$\sum_{i=1}^{p} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

sont bornées indépendamment de p et de la subdivision $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$.

Correction : On sait que les que les variables $B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}}$, pour $k = 1, ..., 2^n$, sont des gaussiennes centrées indépendantes, de variance $(b - a)2^{-n}$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{2^n}(B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}})^2\right) = \sum_{k=1}^{2^n}(b-a)2^{-n} = (b-a)$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^2) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{2^n}(B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}})^2\right)^2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n}\mathbb{E}((B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}})^4) \\
+2 & \sum_{1\leq k<l\leq 2^n} \mathbb{E}((B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}})^2)\mathbb{E}((B_{a+l(b-a)2^{-n}} - B_{a+(l-1)(b-a)2^{-n}})^2) \\
&= 3(b-a)^2 2^{-n} + 2\frac{2^n(2^n-1)}{2}(b-a)^2 2^{-2n} = (b-a)^2(1+2^{1-n}) ,
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la troisième égalité que $\mathbb{E}(Y^4) = 3\sigma^4$ si Y est une $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (cela se recalcule facilement par intégration par partie). On obtient donc que

$$Var(X_n) = (b-a)^2 2^{1-n} .$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a, d'après l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(|X_n - (b-a)| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_n - (b-a)|^2)}{\varepsilon^2} = \frac{(b-a)^2}{2^{n-1}\varepsilon^2} .$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., il existe n_0 tel que $|X_n - (b-a)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. En considérant une suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$, on obtient que p.s., pour tout ε_k, il existe n_0 tel que $|X_n - (b-a)| \leq \varepsilon_k$ pour tout $n \geq n_0$, soit la convergence suivante:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} b-a\,.$$

Soient a et b tels que $0 \leq a < b$. On a

$$X_n \leq \sup_{1\leq k\leq 2^n} \left|B_{a+(b-a)k2^{-n}} - B_{a+(b-a)(k-1)2^{-n}}\right| \times \sum_{k=1}^{2^n} \left|B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}}\right|$$

et par continuité p.s. du mouvement brownien,

$$\sup_{1\leq k\leq 2^n} \left|B_{a+(b-a)k2^{-n}} - B_{a+(b-a)(k-1)2^{-n}}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$$

ce qui implique

$$\sum_{k=1}^{2^n} |B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}}| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} +\infty\,.$$

Ainsi, pour tout intervalle non trivial $[a,b]$, p.s., la fonction $t \longmapsto B_t$ n'est pas à variation finie sur $[a,b]$. On a donc p.s., pour tout intervalle $[a,b]$ non trivial dont les extrémités sont rationnelles, $t \longmapsto B_t$ n'est pas à variation finie sur $[a,b]$. Enfin, on obtient que p.s., $t \longmapsto B_t$ n'est à variation finie sur aucun intervalle non trivial $[a,b]$, en choisissant pour chaque tel $[a,b]$ un intervalle non trivial $[a',b']$ dont les extrémités sont rationnelles et tel que $[a',b'] \subset [a,b]$, et en remarquant que la variation totale de B sur $[a,b]$ (i.e. le supremum de l'expression proposée dans l'énoncé sur toutes les subdivisions finies de $[a,b]$ possibles) est supérieure ou égale à la variation totale de B sur $[a',b']$.

Exercice 6 (Le mouvement brownien et les espaces de Hölder**).**
Classifions les fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\alpha \in [0,1]$, on appelle espace de Hölder de paramètre α, noté C^α l'ensemble suivant :

$$C^\alpha = \{f : [0,1] \to \mathbb{R},\ \exists C \text{ tq } \forall x,y \in [0,1],\ |f(x)-f(y)| \leq C|x-y|^\alpha\}\,.$$

En quelque sorte, les espaces C^α servent de pont entre la classe C^0 et la classe C^1.

Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$, un mouvement brownien. Montrer que presque sûrement, $B_t \in C^\alpha$ pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$ et $B_t \notin C^{\frac{1}{2}}$.

Correction : Ce résultat a été fait en cours.

Exercice 7.
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien unidimensionnel, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration qu'il engendre, T un temps d'arrêt presque sûrement fini et $\mathcal{F}_T$ la tribu associée. Montrer que $(B_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$.

Correction : Il s'agit de voir que pour tout $t_0 \geq 0$ on a $B_{t_0 \wedge T}$ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$. Remarquons tout d'abord un fait général (facile à démontrer) : si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$ alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$. On va démontrer que si on pose le temps d'arrêt $S = t_0 \wedge T$, alors B_S est $\mathcal{F}_S$ mesurable et donc $\mathcal{F}_T$ mesurable par la remarque ci-dessus.
Pour cela on se rend compte que pour les ω pour lesquels $t \mapsto B_t(\omega)$ est continu et $S(\omega) < \infty$ on a

$$B_{S(\omega)}(\omega) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{\infty} B_{i2^{-n}} \mathbf{1}_{i2^{-n} \leq S < (i+1)2^{-n}}.$$

La convergence ci-dessus a donc lieu pour presque tout ω. Il suffit donc de voir que pour tout $i, n \geq 0$, $B_{i2^{-n}} \mathbf{1}_{i2^{-n} \leq S \leq (i+1)2^{-n}}$ est $\mathcal{F}_S$ mesurable. C'est facile mais assez fastidieux.