PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 11
MOUVEMENT BROWNIEN

Dans tous les exercices, $(B_t)_{t\geq 0}$ *désigne un mouvement brownien réel standard partant de 0 défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Invariance par isométrie)**.**
Démontrer la propriété d'invariance du mouvement brownien par isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^d$. Un isométrie vectorielle est une fonction $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telle que $\psi(0) = 0$ et $\|\psi(u) - \psi(v)\| = \|u - v\|$ ($\|.\|$ est la norme euclidienne).

Exercice 2 (Non dérivabilité du mouvement brownien)**.**
Montrer que

$$\liminf_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty \text{ et } \limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty.$$

En déduire que pour tout $s > 0$, presque sûrement le mouvement brownien n'est pas dérivable à droite en s.

Exercice 3 (Convergence en loi)**.**
On pose $S_1 = \sup_{t\in[0,1]} B_t$. Montrer que la convergence suivante a lieu en loi :

$$\left(\int_0^t e^{B_s} ds\right)^{1/\sqrt{t}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} e^{S_1}.$$

Exercice 4 (Maxima locaux du mouvement brownien)**.**
Soient p, q, r, $s \in \mathbb{Q}_+$ tels que $p < q < r < s$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{p\leq t\leq q} B_t = \sup_{r\leq t\leq s} B_t\right) = 0.$$

En déduire que p.s. les maxima locaux de la fonction $t \longmapsto B_t$ sont distincts.

Exercice 5 (Le mouvement brownien n'est à variation finie sur aucun intervalle)**.**
Soient a et b tels que $0 \leq a < b$. On pose, pour $n \geq 0$,

$$X_n = \sum_{k=1}^{2^n} \left(B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}}\right)^2 .$$

Calculer la moyenne et la variance de X_n puis trouver la limite p.s. de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$. En déduire que p.s., la fonction $t \longmapsto B_t$ n'est à variation finie sur aucun intervalle non trivial. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est à variation finie sur l'intervalle $[a, b]$ si les sommes

$$\sum_{i=1}^{p} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

sont bornées indépendamment de p et de la subdivision $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$.

Exercice 6 (Le mouvement brownien et les espaces de Hölder)**.**
Classifions les fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\alpha \in [0,1]$, on appelle espace de Hölder de paramètre α, noté C^α l'ensemble suivant :

$$C^\alpha = \{f : [0,1] \to \mathbb{R},\ \exists C \ \text{ tq } \forall x, y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha\}\,.$$

En quelque sorte, les espaces C^α servent de pont entre la classe C^0 et la classe C^1.

Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$, un mouvement brownien. Montrer que presque sûrement, $B_t \in C^\alpha$ pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$ et $B_t \notin C^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 7.
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien unidimensionnel, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration qu'il engendre, T un temps d'arrêt presque sûrement fini et $\mathcal{F}_T$ la tribu associée. Montrer que $(B_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$.