TD11 : Extensions de corps, Nullstellensatz

Diego Izquierdo

Les exercices 1, 2, 6, 8 sont à préparer avant la séance de TD. Nous traiterons les exercices dans l'ordre suivant : 1, 2, 6, 8, 15, question 1 de 19, 20, 18.

Exercice 1 : Partiel 2012
Soit K un corps. Soit L une extension algébrique de K contenue dans $K(X)$. Montrer que $L = K$.

Exercice 2 : Polynômes minimaux
Soient K un corps et L une extension finie de K. Soient x, y deux éléments de L, et P_x, P_y leurs polynômes minimaux respectifs sur K. Montrer que P_x est irréductible sur $K(y)$ si et seulement si P_y est irréductible sur $K(x)$.

Exercice 3 : Partiel 2012
Soit L/K une extension de corps algébrique de corps. Soit $P \in L[X]$. Montrer qu'il existe $Q \in K[X]$ divisible par P dans $L[X]$.

Exercice 4 : Irréductibilité de polynômes et extension de scalaires
Soient K un corps et P un polynôme irréductible de degré n sur K. Soit L une extension finie de K de degré premier à n. Montrer que P est irréductible sur L.

Exercice 5 : Un contre-exemple
Soient $K = \mathbb{Q}(T)$ et ses deux sous-corps $K_1 = \mathbb{Q}(T^2)$ et $K_2 = \mathbb{Q}(T^2 - T)$. Montrer que K est algébrique sur K_1 et K_2, mais pas sur $K_1 \cap K_2$.

Exercice 6 : Extensions de degré 2
Soient K un corps et L/K une extension de degré 2. On suppose la caractéristique de K différente de 2.

1. Montrer qu'il existe $x \in L \setminus K$ tel que l'on ait $L = K(x)$ et $x^2 \in K$.
2. Montrer alors l'égalité $L^{\times 2} \cap K^{\times} = K^{\times 2} \sqcup x^2 K^{\times 2}$.
3. Soient $y, z \in K^{\times}$. Montrer que $K(\sqrt{y})$ et $K(\sqrt{z})$ sont isomorphes en tant que K-algèbres si et seulement si zy^{-1} est un carré dans K.

Exercice 7 : Extensions de degré 2 en caractéristique 2
Soient K un corps et L/K une extension de degré 2. On suppose que la caractéristique de K est égale à 2.

1. Supposons que L n'est pas de la forme $K(x)$ avec $x^2 \in K$. Montrer qu'il existe $z \in L$ tel que l'on ait $L = K(z)$ et $z^2 - z \in K$.
2. En déduire une classification des extensions de degré 2 de K à isomorphisme de K-algèbres près.

Exercice 8 : Extensions engendrées par deux racines carrées
Soient K un corps de caractéristique différente de 2. Soient $x, y \in K^\times$.
1. Montrer que l'extension $K(\sqrt{x}, \sqrt{y})$ de K est de degré 4 si et seulement si on a $x, y, xy \in K^\times \setminus K^{\times 2}$.
2. Dans ce cas, montrer que les seuls corps intermédiaires entre K et $K(\sqrt{x}, \sqrt{y})$ sont K, $K(\sqrt{x})$, $K(\sqrt{y})$, $K(\sqrt{xy})$ et $K(\sqrt{x}, \sqrt{y})$.

Exercice 9 : Partiel 2014
Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Soient $a, b \in K^\times$, avec $b \notin K^{\times 2}$. Soient $K_1 = K(\sqrt{b})$ et $L = K(\alpha)$ avec $\alpha^2 = a + \sqrt{b}$. On rappelle (exercice 6) que $K^\times \cap K_1^{\times 2} = K^{\times 2} \sqcup bK^{\times 2}$.
1. Montrer que $L = K_1$ si, et seulement si, il existe $d \in K^\times$ tel que $a^2 - b = d^2$ et $2(a + d) \in K^{\times 2}$.
2. Montrer qu'il existe $\beta \in L^\times$ tel que $\beta^2 = a - \sqrt{b}$ si, et seulement si, $a^2 - b \in K^{\times 2} \sqcup bK^{\times 2}$.
3. Calculer $K^\times \cap L^{\times 2}$.
4. Montrer qu'il existe $c \in K^\times$ tel que $L = K(\sqrt{b}, \sqrt{c})$ si, et seulement si, $a^2 - b \in K^{\times 2}$.

Exercice 10 : Sommes de carrés
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^2 = 1 + \rho\sqrt[3]{2}$.
1. Montrer que le corps $\mathbb{Q}(\alpha)$ est une extension de degré 6 de $\mathbb{Q}$.
2. Dans $\mathbb{Q}(\alpha)$, le nombre -1 est-il une somme de carrés ?

Exercice 11 : Fractions rationnelles telles que $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$
Soit K un corps. Soit $L = \{F \in K(x) \mid F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)\}$. Montrer que $K(y) \to L, F(y) \mapsto F(x + \frac{1}{x})$ est un K-isomorphisme de corps. C'est ce résultat qui explique par exemple pourquoi, pour résoudre les équations de la forme $\sum_{k=0}^{6} a_k x^k = 0$ avec $a_k = a_{6-k}$ pour chaque k, il suffit de savoir résoudre les équations de degré 3.

Exercice 12 : Fractions rationnelles fixées par le groupe alterné
Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Montrer que, pour $n \geq 2$, le sous-corps de $K(x_1, ..., x_n)$ fixé par $\mathcal{A}_n$ est : $K(x_1, ..., x_n)^{\mathcal{A}_n} = \{f + g\Delta | f, g \in K(x_1, ..., x_n)^{\mathcal{S}_n}\}$, où $\Delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.

Exercice 13 : Fractions rationnelles fixées par un groupe cyclique

1. Soit $n > 0$ un entier. Soit G un sous-groupe cyclique de $GL_n(\mathbb{C})$. On fait agir naturellement G sur $\mathbb{C}(x_1, ..., x_n)$. Montrer que l'extension $\mathbb{C}(x_1, ..., x_n)^G/\mathbb{C}$ est transcendante pure de degré de transcendance n.
2. Exhiber un isomorphisme explicite entre les corps $\{F \in \mathbb{C}(x_1, ..., x_n) \mid F(x_1, x_2, ..., x_n) = F(x_2, x_3, ..., x_n, x_1)\}$ et $\mathbb{C}(y_1, ..., y_n)$.

Exercice 14 : Quelques calculs explicites

1. Déterminer le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.
2. Déterminer le polynôme minimal de $1 + \sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$ sur $\mathbb{Q}$.
3. Calculer $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ où $\alpha = 10^{1/5} + 7^{1/3}$.

Exercice 15 : Une question de polynômes

Soient P, Q et R des polynômes dans $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, avec P irréductible. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, si $P(x) = 0$ et $Q(x) \neq 0$, alors $R(x) = 0$. Montrer que $P|Q$ ou $P|R$.

Exercice 16 : Produit tensoriel d'algèbres réduites

Soit k un corps algébriquement clos. Soient A et B deux k-algèbres de type fini. Montrer que, si A et B sont réduites (resp. intègres), alors $A \otimes_k B$ est réduite (resp. intègre).

Exercice 17 : Points dans une variété projective

Soient k un corps algébriquement clos et $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathbb{P}^n(k)$ l'ensemble des droites de k^{n+1}. C'est l'espace projectif de dimension n sur k. Pour $x = (x_0, ..., x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $[x_0 : ... : x_n] \in \mathbb{P}^n(k)$ la droite engendrée par x. On se donne un idéal homogène I de $A = k[X_0, ..., X_n]$, c'est-à-dire un idéal engendré par des polynômes homogènes. On note :

$$V(I) = \{[x_0 : ... : x_n] \in \mathbb{P}^n(k) | \forall f \in I \text{ homogène}, f(x_0, ..., x_n) = 0\}.$$

Montrer que $V(I) = \emptyset$ si, et seulement si, pour $0 \leq i \leq n$, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $X_i^d \in I$.

Exercice 18 : Examen 2012

Soit A une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini.

1. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Dans toute la suite, on note $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{m}$ l'image inverse de $\mathfrak{m}$ par l'application canonique $\mathbb{Z} \to A$. Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}/(\mathbb{Z} \cap \mathfrak{m})$ est soit $\mathbb{Z}$, soit un corps fini.
2. Montrer que le corps $A/\mathfrak{m}$ est une extension finie du corps des fractions de $\mathbb{Z}/(\mathbb{Z} \cap \mathfrak{m})$.

3. Si $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{m} = 0$, montrer qu'on arrive à une contradiction. En déduire que le corps $A/\mathfrak{m}$ est fini.
4. Soit $f \in A$ un élément non nilpotent et soit $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de l'anneau de fractions (non nul) A_f . Montrer que le corps $A_f/\mathfrak{n}$ est fini.
5. En déduire que $A/(A \cap \mathfrak{n})$ est un corps fini.
6. Montrer que l'intersection de tous les idéaux maximaux de A est $\sqrt{(0)}$.
7. En déduire que toute $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini est un anneau de Jacobson.

Exercice 19 : Vers la théorie des modèles

1. Soient $f_1, ..., f_n \in \mathbb{Q}[X_1, ..., X_m]$. Montrer que le système d'équations $f_1(x) = ... = f_n(x) = 0$ a des solutions dans $\mathbb{C}^m$ si, et seulement si, il a des solutions dans $\overline{\mathbb{Q}}^m$.
2. Soient $x_1, ..., x_m \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $A = \mathbb{Z}[x_1, ..., x_m]$.
(a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que Nx_i est un entier algébrique pour chaque i.
(b) Montrer que $A[1/N]$ est un $\mathbb{Z}[1/N]$-module de type fini.
(c) En déduire que, pour p premier ne divisant pas N, le quotient $A[1/N]/pA[1/N]$ n'est pas nul.
3. Soient $f_1, ..., f_n \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_m]$. Montrer que le système d'équations $f_1(x) = ... = f_n(x) = 0$ a des solutions dans $\mathbb{C}^m$ si, et seulement si, il a des solutions dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour presque tout premier p. On pourra utiliser les questions 1 et 2, ainsi que la question 3 de l'exercice 18.

Exercice 20 : Fractions symétriques

Soit K un corps. Soient $\sigma_1, ..., \sigma_n$ les polynômes symétriques élémentaires de $K[X_1, ..., X_n]$. Soient $E = K(X_1, ..., X_n)$ et $F = K(\sigma_1, ..., \sigma_n)$.
1. Montrer que E est une extension finie de F.
2. En déduire que $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ est une base de transcendance de E. En particulier, l'extension F/K est transcendante pure.
3. On fait agir $\mathcal{S}_n$ sur E par permutation des variables. Soit $F' = E^{\mathcal{S}_n}$ le sous-corps de E fixé par $\mathcal{S}_n$. On admet que $[E : F'] = |\mathcal{S}_n|$ (c'est le lemme d'Artin qui sera vu plus tard dans le cours). Montrer que $F = F'$.

Exercice 21 : Extensions de corps de type fini

Soit $M/L/K$ une tour d'extensions de corps.
1. Soit $\alpha \in M$ (resp. $t \in M$) algébrique sur K (resp. transcendant sur K). Montrer que $[K(\alpha) : K] = [K(\alpha, t) : K(t)]$.
2. Supposons que M/K est une extension de corps de type fini et que L/K est algébrique. Montrer que $[L : K] < +\infty$.
3. Montrer que si M/K est de type fini, L/K est de type fini.