TD 11 : Représentation conforme

Exercices : à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices : seront traités en classe en priorité.
Exercices : plus difficiles.

On rappelle :

Théorème de représentation conforme. Soit U un ouvert simplement connexe non vide de $\mathbb{C}$. Si $U \neq \mathbb{C}$, alors U est conformément équivalent au disque unité.

Petit théorème de Picard. Une fonction entière non constante prend tout nombre complexe comme valeur, sauf peut-être un.

Ces deux théorèmes pourront être utilisés librement dans ce TD.

Exercice 1:

Dans tout l'exercice, D désigne le disque unité ouvert et $H = \{z, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan supérieur.

1. Donner des biholomorphismes entre D, H, $\{z, \arg z \in]0, \alpha[\}$ avec $\alpha \leq 2\pi$.
2. Expliciter un biholomorphisme entre la bande $S = \{z, 0 < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$ et H. Application : fabriquer une fonction harmonique sur D étendant la fonction u sur S^1 vérifiant $u(z) = 0$ si $\mathrm{Im}(z) < 0$ et $u(z) = 1$ si $\mathrm{Im}(z) > 0$.
3. Construire un biholomorphisme entre un disque privé d'un segment orthogonal au cercle bordant le disque et H.

Exercice 2: Dans tout l'exercice, D désigne le disque unité ouvert et $H = \{z, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan supérieur.

1. On appelle *lunule* un ouvert du plan complexe délimité par deux arcs de cercle se rencontrant en deux points (éventuellement confondus). Construire un biholomorphisme explicite entre une lunule et H (ou D).
2. Construire un biholomorphisme entre $\{z \in H, 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ et H.

Exercice 3: On appelle automorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ un biholomorphisme de U sur lui-même. Déterminer les automorphismes du disque unité ouvert. Montrer que les automorphismes du demi-plan supérieur sont de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc = 1$.

Exercice 4:

Soit f une fonction holomorphe sur $\{z, \mathrm{Re}(z) > 0\}$, à valeurs dans le disque unité. On suppose que f s'annule en 1 avec multiplicité m. Montrer que

$$|f(z)| \leq \left|\frac{1-z}{1+z}\right|^m.$$

Exercice 5:

1. Existe-t-il un biholomorphisme entre D et $\mathbb{C}$?
2. Existe-t-il une surjection holomorphe de D sur $\mathbb{C}$?
3. Existe-t-il une surjection holomorphe propre de D sur $\mathbb{C}$?

Exercice 6: Soit K le carré de sommets 1, i, -1 et $-i$.

1. Montrer que la fonction :

$$\varphi : z \mapsto \int_0^z \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

est définie et continue sur $\overline{D(0,1)}$. Montrer qu'elle est holomorphe sur $D(0,1)$.

2. Calculer $\varphi(\partial D(0,1))$. En déduire que $\lambda\varphi$ est un biholomorphisme entre $D(0,1)$ et K pour un certain λ bien choisi.

Exercice 7:

Dans tout l'exercice, les polygones qui interviennent sont considérés comme fermés et pleins.

1. On se donne deux rectangles du plan R et S. On suppose qu'il existe une fonction holomorphe f définie sur un ouvert contenant R, telle que $f(R) = S$.
   (a) Montrer que f induit une bijection entre les sommets de R et ceux de S.
   (b) Soit C un côté du rectangle S. Montrer qu'il existe un côté c du rectangle R tel que $f(c) \cap C$ soit infini. Montrer que cela entraîne $f(c) = C$ (on pourra se ramener au cas où c et C sont inclus dans $\mathbb{R}$). Conclure que f envoie chaque côté de R sur un côté de S.
   (c) Montrer que l'on peut étendre f en une fonction entière à croissance linéaire. Conclure que f est une transformation affine et que R et S sont semblables.
   (d) Soit R, S deux rectangles non semblables. Montrer qu'il existe une fonction g holomorphe sur $\mathring{R}$, telle que $f(\mathring{R}) = \mathring{S}$ et telle que l'image par f d'un rectangle inclus dans $\mathring{R}$ n'est jamais un rectangle.
2. On suppose que R et S sont maintenant deux polygones convexes à n côtés ; f est encore une application holomorphe définie sur un ouvert contenant R, telle que $f(R) = S$.
   (a) En s'inspirant de la question précédente, montrer que f réalise une bijection du bord de R sur le bord de S et que les angles intérieurs de R et S sont les mêmes. En déduire que f induit une application conforme de l'intérieur de R sur celui de S.
   (b) Si $n = 3$, i.e. si R et S sont deux triangles, montrer que la conclusion de la question 1 reste valable : f est une transformation affine. On utilisera librement le fait que toute application conforme entre l'intérieur d'un triangle et le disque unité s'étend continûment au bord.

Exercice 8: On note Σ l'ensemble des fonctions F holomorphes injectives sur $U = \mathbb{C}\setminus\bar{D}$, ayant un développement de Laurent de la forme
$$F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

1. A titre d'exemple, dessiner l'image de la fonction (dite de Joukowski) $F : z \mapsto z + 1/z$.
2. Soit $F \in \Sigma$. Montrer que $\mathbb{C}\setminus F(U)$ est un compact connexe, noté $K(F)$, d'aire égale à $\pi(1 - \sum_n n|b_n|^2)$.
3. *Première application.* Montrer que Σ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts est compact.
4. *Deuxième application.* Soit $U = \mathbb{C}\setminus(K_1 \cup \cdots \cup K_n)$, les K_i étant des compacts connexes disjoints de $\mathbb{C}$, non réduits à des points. Notons $\mathscr{F}$ l'ensemble des $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphes injectives ayant un développement de Laurent à l'infini comme ci-dessus. On va montrer qu'il existe $F \in \mathscr{F}$ réalisant un biholomorphisme entre U et le complémentaire de n segments horizontaux disjoints.
   Commencer par construire F dans le cas $n = 1$, en traitant d'abord le cas $K_1 = \bar{D}$. Que peut-on dire de $\mathrm{Re}(b_1(F))$? Quand a-t-on $\mathrm{Re}(b_1(F)) > 0$?
   Puis traiter le cas général en cherchant $F \in \mathscr{F}$, avec
$$\mathrm{Re}(b_1(F)) = \sup_{f \in \mathscr{F}} \mathrm{Re}(b_1(f)).$$
   On commencera par s'assurer que F existe !

Exercice 9: Examen 2017 (la preuve de Koebe du théorème de représentation conforme)

Dans tout le problème, si $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, on note $D(a,R)$ (resp. $\overline{D}(a,R)$) le disque ouvert (resp. fermé) centré en a de rayon R. Lorsque $a = 0$ et $R = 1$, on écrira simplement D et $\overline{D}$.

1. (a) Soit $h : \overline{D}(a,R) \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive, harmonique en restriction à $D(a,R)$. On rappelle que pour tous $0 \le r < R$ et $\theta \in [0,2\pi]$, on a la formule de Poisson :
$$h(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2} h(a + Re^{it})dt.$$
   Montrer que :
$$\frac{R-r}{R+r} h(a) \le h(a + re^{i\theta}) \le \frac{R+r}{R-r} h(a).$$

(b) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *croissante* de fonctions harmoniques sur U. Démontrer que soit $\lim_{n\to+\infty} h_n(z) = +\infty$ pour tout $z \in U$, soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de U vers une fonction harmonique.

(c) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $H(U)$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On suppose également que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in U$,

$$\mathrm{Re}(f_n(z)) \leq \mathrm{Re}(f_{n+1}(z)). \tag{1}$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de U vers une fonction holomorphe sur U. On pourra utiliser l'inégalité de Borel-Carathéodory vue en cours : si $g \in H(D(0,R))$,

$$\sup_{|z|=r} |g(z)| \leq \frac{2r}{R-r} \sup_{|z|=R} \mathrm{Re}(g(z)) + \frac{R+r}{R-r}|g(0)|,$$

pour tous $0 \leq r \leq R$.

(d) On conserve les notations de la question précédente. Montrer que la même conclusion vaut si l'on remplace l'hypothèse (1) par l'hypothèse que U est simplement connexe et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in U$,

$$0 < |f_n(z)| \leq |f_{n+1}(z)|.$$

2. Le but de cette deuxième partie est d'aboutir à une démonstration alternative (due à Koebe) du théorème de représentation conforme de Riemann pour un ouvert simplement connexe U que l'on suppose contenir 0 et être strictement inclus dans D. Pour ce faire, partant de $U_0 = U$, on va construire par récurrence une suite d'ouverts simplement connexes U_n strictement inclus dans D et contenant 0, et une suite de fonctions $g_n \in H(U_{n-1})$ telles que $g_n(U_{n-1}) = U_n$.

(a) *(Question de cours)* Soit $\alpha \in D$. Montrer que la fonction :

$$\varphi_\alpha : z \mapsto \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

est une bijection de $\overline{D}$ sur $\overline{D}$, envoyant D sur lui-même et le cercle unité sur lui-même, holomorphe sur D ; déterminer sa bijection réciproque.

(b) Soit $n \geq 1$. On suppose U_{n-1} construit. Justifier l'existence de $r_n > 0$ maximal, tel que $D(0, r_n) \subset U_{n-1}$ et de a_n appartenant au bord de U_{n-1} tel que $|a_n| = r_n$. On choisit $b_n \in D$ tel que $b^2 = -a_n$ et on note :

$$F_n = \varphi_{-a_n} \circ s \circ \varphi_{-b_n},$$

s étant la fonction $z \mapsto z^2$. Montrer qu'il existe un ouvert $\Omega_{n-1} \subset D$ sur lequel la restriction de F_n admet une bijection réciproque $G_n \in H(U_{n-1})$ telle que $G_n(0) = 0$.

(c) On définit :

$$g_n = \frac{|G_n'(0)|}{G_n'(0)} G_n.$$

Justifier que cette définition a un sens et montrer que $g_n'(0) = \frac{1+r_n}{2\sqrt{r_n}}$.

(d) On pose $U_0 = U$, $\psi_0 = Id$ puis on définit par récurrence pour $n \geq 1$, $\psi_n = g_n \circ \psi_{n-1} \in H(U)$ et $U_n = \psi_n(U)$. Montrer que pour tout n, ψ_n est une bijection holomorphe de U sur U_n. Montrer que la suite $(\psi_n'(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. En déduire qu'elle converge et que $r_n \to 1$ quand $n \to +\infty$.

(e) Montrer qu'il existe, pour tout n, $f_n \in H(U)$ telle que $\psi_n(z) = z f_n(z)$ pour tout $z \in U$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in U$,

$$0 < |f_n(z)| \leq |f_{n+1}(z)|$$

et en déduire, à l'aide de la question 1.(d), que la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une bijection holomorphe de U sur D.

Exercice 10: ✍

Soit f une fonction entière telle que $f \circ f$ n'a pas de point fixe. A l'aide du petit théorème de Picard, montrer que f est une translation. On pourra considérer la fonction $z \mapsto \frac{f(f(z))-z}{f(z)-z}$.

Bonne continuation !