TD11 : Normalisation de Noether, Localisation

Diego Izquierdo

Les exercices 0, 1 et 3 sont à préparer avant le TD. Pendant la séance, nous traiterons les exercices dans l'ordre suivant : 0, 1, 3, 4, questions 1, 2 et 3 de l'exercice 5, 9 et 10.

Exercice 0 (à préparer) : TD10
Terminer les exercices 2 et 7 du TD10 (dans le cas où nous n'aurions pas le temps de les terminer lors de la séance du 03/12).

Exercice 1 (à préparer) : Normalisation de Noether
Soit $A = \mathbb{C}[X,Y,Z]/(XY+Z^2, X^2Y-XY^3+Z^4-1)$. Exhiber $a_1,...,a_n \in A$ algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$ tels que $A/\mathbb{C}[a_1,...,a_n]$ est une extension finie d'anneaux.

Exercice 2 : Variétés et hypersurfaces
Soient k un corps de caractéristique nulle et A une k-algèbre intègre de type fini sur k de corps des fractions K. Montrer qu'il existe un entier naturel n et un polynôme $f \in k[X_1,...,X_n]$ tels que K est isomorphe au corps des fractions de $B = k[X_1,...,X_n]/(f)$. Appliquer le résultat à l'anneau :

$$A = \mathbb{C}[X,Y,Z]/(XY+Z^2, X-Z^2Y-1).$$

En termes géométriques, on dit que toute k-variété intègre est birationnellement équivalente à une hypersurface.

Exercice 3 (à préparer) : Extensions de corps de type fini
Soit $M/L/K$ une tour d'extensions de corps.

1. Soit $\alpha \in M$ (resp. $t \in M$) algébrique sur K (resp. transcendant sur K). Montrer que $[K(\alpha):K] = [K(\alpha,t):K(t)]$.

2. Supposons que M/K est une extension de corps de type fini et que L/K est algébrique. Montrer que $[L:K] < +\infty$.

3. Montrer que si M/K est de type fini, L/K est de type fini.

Exercice 4 : Exemples de localisés
Reconnaître $S^{-1}A$ dans las cas suivants :

(i) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
(ii) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \{-1, 1\}$;
(iii) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \{10^k | k \geq 0\}$;

(iv) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(0, y)|y \neq 0\} \cup \{(1, 1)\}$.
(v) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(x, y)|x \neq 0\}$;
(vi) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(x, y)|x \neq 0, y \neq 0\}$;
(vii) $A = \mathbb{C}[X]/(X^5)$, $S = \{X^k|k \geq 0\}$;
(viii) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^5Y)$, $S = \{X^k|k \geq 0\}$;
(ix) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^5Y)$, $S = \{P \in A|P \notin (X)\}$;
(x) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^5Y)$, $S = \{P \in A|P \notin (Y)\}$;

Exercice 5 : Localisation
Soient A un anneau commutatif unitaire et S une partie multiplicative de A.

1. Montrer que l'ensemble des idéaux de $S^{-1}A$ s'injecte dans l'ensemble des idéaux de A. Montrer que l'injection induit une bijection entre les idéaux premiers de $S^{-1}A$ et les idéaux premiers de A n'intersectant pas S.
2. Si A est noethérien, montrer que le localisé $S^{-1}A$ est noethérien.
3. Si A est principal et que S ne contient pas 0, montrer que le localisé $S^{-1}A$ est principal.
4. Si A est factoriel et que S ne contient pas 0, montrer que le localisé $S^{-1}A$ est factoriel.
5. Soit B une extension entière de A. Montrer que, si B est une A-algèbre finie, alors $S^{-1}B$ est une $S^{-1}A$ algèbre finie. Montrer aussi que, si A est intégralement clos dans B, alors $S^{-1}A$ est intégralement clos dans $S^{-1}B$.

Exercice 6 : Un contre-exemple
Trouver un sous-anneau de $\mathbb{C}(X, Y)$ contenant $\mathbb{C}[X, Y]$ qui ne soit pas en tant que $\mathbb{C}[X, Y]$-algèbre un localisé de $\mathbb{C}[X, Y]$.

Exercice 7 : Germes de fonctions
Soit $\mathcal{C}$ l'anneau des fonctions continues de $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal des fonctions nulles en 1. Soit $S = \mathcal{C} \setminus \mathfrak{m}$. Montrer que $S^{-1}\mathcal{C}$ s'identifie à l'anneau local des germes de fonctions continues en 1.

Exercice 8 : Une suite exacte
Soient A un anneau et $a, b \in A$ tels que $(a, b) = A$. Soit M un A-module. Montrer qu'il existe une suite exacte :

$$0 \to M \to M\left[\frac{1}{a}\right] \oplus M\left[\frac{1}{b}\right] \to M\left[\frac{1}{ab}\right].$$

Généraliser à une famille quelconque $(a_i)_{i\in I}$ de A.

Dans les exercices qui suivent, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier d'un anneau A et M est un A-module, on note $M_{\mathfrak{p}}$ le localisé de M par rapport à la partie multiplicative $A \setminus \mathfrak{p}$ de A.

Exercice 9 : Corps résiduel
Soient A un anneau commutatif unitaire et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A.

1. Montrer que $A_{\mathfrak{p}}$ est local, d'idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

Notons $k(\mathfrak{p})$ le *corps résiduel* $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

2. Montrer que $A \to k(\mathfrak{p})$ induit une injection $\varphi_{\mathfrak{p}} : A/\mathfrak{p} \hookrightarrow k(\mathfrak{p})$ qui fait de $k(\mathfrak{p})$ le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$.

3. Montrer que $\varphi_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de A.

4. Soit $f \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$. Montrer que $k(\mathfrak{p})$ et $k(\mathfrak{p}A[f^{-1}])$ sont canoniquement isomorphes.

Exercice 10 : Propriétés locales et globales 1
Soit A un anneau.

1. Montrer que A est réduit si, et seulement si, $A_{\mathfrak{m}}$ est réduit pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$. On dit que la propriété d'être réduit locale.

2. On suppose A intègre. Montrer que A est normal si, et seulement si, $A_{\mathfrak{m}}$ est normal pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

3. Est-il vrai que A est intègre si, et seulement si, $A_{\mathfrak{m}}$ est intègre pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$? On dit que la propriété d'être intègre est globale.

Exercice 11 : Propriétés locales et globales 2
Soient A un anneau et M, N et P des A-modules.

1. Montrer que le morphisme naturel $M \to \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, A} M_{\mathfrak{m}}$ est injectif. En déduire que $M = 0$ si, et seulement si, $M_{\mathfrak{m}} = 0$ pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

2. On se donne deux morphismes de A-modules $f : M \to N$ et $g : N \to P$. Montrer que la suite $0 \to M \to N \to P \to 0$ est exacte si, et seulement si, la suite $0 \to M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}} \to P_{\mathfrak{m}} \to 0$ est exacte pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

3. Est-il vrai que M est libre si, et seulement si, $M_{\mathfrak{m}}$ est libre pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$?

Remarque : Géométriquement, il faut voir M comme une famille "continue" $(M_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A}$ de $A_{\mathfrak{p}}$-modules.

Exercice 12 : Anneaux artiniens
Soit A un anneau. On suppose que A est *artinien*, c'est-à-dire que toute suite décroissante d'idéaux stationne.

1. Donner des exemples d'anneaux artiniens. Un anneau noethérien est-il forcément artinien ?

2. Montrer que tout idéal premier de A est maximal. On dit que A est de dimension 0.

3. Montrer que A a un nombre fini d'idéaux premiers.

4. Montrer que A est produit fini d'anneaux locaux artiniens.

5. Dans cette question, on suppose que A est un anneau local artinien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

(a) Montrer qu'il existe $n > 0$ tel que $\mathfrak{m}^n = 0$.

(b) En déduire que A est noethérien.

6. En général, montrer que A est noethérien.

7. Réciproquement, montrer qu'un anneau noethérien de dimension 0 est artinien.