Td n° 11 d'EDP

Théorie de Littlewood-Paley

Séance du 19 décembre 2014

Exercice 1. *Inégalités de Bernstein*

1. Soit $p \geq 1$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ telle que $supp(\hat{f}) \subset B(0, \lambda)$. Soit $q \geq p$. Montrer que

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^q} \leq C_\alpha \lambda^{d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+|\alpha|} \|f\|_{L^p}.$$

Indication : On pourra prouver l'inégalité pour $\lambda = 1$ puis raisonner par homogénéité.

2. Soit $0 < r < 1$. On suppose maintenant que le support de $\hat{f}$ est inclus dans une couronne de petit rayon $r\lambda$ et de grand rayon λ. Montrer que

$$\lambda^k \|f\|_{L^p} \leq C_{r,k} \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}.$$

⋆

Exercice 2. *Décomposition de Littlewood-Paley*

On introduit χ et ϕ radiales telles que $\chi \in \mathcal{D}(B(0, 4/3))$ et $\phi \in \mathcal{D}(C)$ où C est la couronne de petit rayon $3/4$ et de grand rayon $8/3$ et

$$\chi(\xi) + \sum_{j\geq 0} \phi(2^{-q}\xi) = 1.$$

1. Montrer que

$$\frac{1}{2} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{j\geq 0} \phi^2(2^{-2j}\xi) \leq 1.$$

On note $\Delta_q u = \mathcal{F}^{-1}(\phi(2^{-q}\xi)\hat{u}(\xi))$ et $\Delta_{-1} u = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\hat{u}(\xi))$.

2. Montrer que

$$\|u\|_{H^s}^2 \sim \sum_{q\geq 1} 2^{2qs} \|\Delta_q u\|_{L^2}^2.$$

⋆

Exercice 3. *Caractérisation des espaces de Hölder*

On note $\|u\|_r$ la norme dans l'espace de Hölder $C^r(\mathbb{R}^d)$

$$\|u\|_r = \sum_{|\alpha|\leq [r]} \left(\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} + \sup_{x\neq y} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^{r-[r]}} \right).$$

1. Soit $u \in C^r$. Montrer que pour $q \geq 0$

$$\Delta_q u(x) = 2^{qd} \int h(2^q(x-y)) \left(u(y) - \sum_{k=0}^{[r]} \frac{1}{k!} D^k u(x)(y-x)^{(k)} \right) dy,$$

où on a noté $h = \mathcal{F}^{-1}(\phi)$.

2. En déduire que

$$\sup_q 2^{qr} \|\Delta_q u\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{[r]!} \|u\|_r.$$

3. Soit $r \notin \mathbb{N}$. Soit u telle que

$$\sup_q 2^{qr} \|\Delta_q u\|_{L^\infty} < \infty.$$

Montrer que $u \in C^{[r]}$ avec

$$\sup_{\alpha \leq r} \|\partial^\alpha u\| \leq C \sup_q 2^{qr} \|\Delta_q u\|_{L^\infty}.$$

4. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leq C \sup_q 2^{qr} \|\Delta_q u\|_{L^\infty} \left(\sum_{q=0}^{N} 2^{-q(r-[r]-1)} |x-y| + \sum_{q \geq N+1} 2^{-q(r-[r])} \right).$$

En déduire que

$$\|u\|_r \leq C \sup_q 2^{qr} \|\Delta_q u\|_{L^\infty}.$$

5. Pour r entier, on va noter C^r_* l'espace des distributions tempérées telles que

$$\sup_q 2^{qr} \|\Delta_q u\|_{L^\infty} < \infty$$

qui ne coïncide pas avec l'espace C^r usuel. Montrer que C^1_* est l'espace des fonctions bornées u telles qu'il existe une constante C telle que

$$|u(x+y) + u(x-y) - 2u(y)| \leq C|y|.$$

$\star$