Td n° 12 d'Analyse fonctionnelle

Problèmes variationnels

Séance du 25 Mai 2013

Exercice 1. *Préliminaires*

Soit $u \in H^1(\Omega)$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 telle que $f(0) = 0$ et f' soit bornée. Montrer que $f(u) \in H^1(\Omega)$ et que $\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$.

2. Montrer que $u^+ = \max\{u, 0\} \in H^1$ et que $\nabla u^+ = \mathbb{1}_{u>0}\nabla u$.

⋆

Exercice 2. *Régularité elliptique*

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^d$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ solution faible de

$$-\Delta u + u = f.$$

1. On se place dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$. Pour $h \in \mathbb{R}^d$ et $v \in H^1$ on pose

$$D_h v = \frac{\tau_h v - v}{h}.$$

En prenant comme fonction test $D_{-h}(D_h u)$ montrer que

$$\|D_h \nabla u\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}.$$

2. En déduire que $\nabla u \in H^1$ et

$$\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}.$$

3. Etendre ce résultat au cas où $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1}$.

Remarque : En prenant des cartes locales, on peut montrer que ce résultat est aussi vrai pour Ω ouvert régulier borné. De plus, si $f \in H^m(\Omega)$, alors

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^2}.$$

⋆

Exercice 3. *Première valeur propre du laplacien*

Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$. Étant donné $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta u = f$. On note $(-\Delta)^{-1}(f) = u$.

1. Montrer qu'il existe donc une suite croissante $\lambda_n \to \infty$ et une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, notée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset H_0^1(\Omega)$ telle que

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n.$$

2. Montrer que $e_n \in \mathcal{C}^\infty$.

3. Montrer que $\sqrt{\lambda_1} = \inf_{u \in H_0^1, \|u\|_{L^2}=1} \|\nabla u\|_{L^2}$ est la constante optimale dans l'inégalité de Poincaré, et que cet optimum est réalisé uniquement sur l'espace propre E_{λ_1} associé à λ_1.

4. Si $f \in E_{\lambda_1}$, montrer que $|f| \in E_{\lambda_1}$. En déduire que $|f|$ est sous-harmonique.

5. Montrer que si $g \in C^\infty$ est sous-harmonique alors pour tous x et r tels que $B(x,r) \subset \Omega$

$$\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(x,r)} g(y)dy \leq g(x).$$

Indication : On pourra calculer $\int_{B(x,r)} (|y|^2 - r^2) \Delta f dy$.

6. En déduire que E_{λ_1} est de dimension 1 (engendré par e_1).

7. En déduire e_1 ne change pas de signe, et que si $\Omega = B(0,1)$ $(d \geq 2)$, e_1 est à symétrie sphérique.

⋆

Exercice 4. *Problème de Yamabe*

Le problème de Yamabe consiste à se demander, pour une variété compacte de dimension $n \geq 3$ munie d'une métrique g, si il existe une métrique conforme à g, c'est à dire qui s'écrit $g' = \Omega g$, de courbure scalaire constante λ. En posant $\Omega = u^{\frac{4}{n-2}}$, u doit alors satisfaire l'équation

$$-\Delta u + h(x) u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Pour obtenir une solution u, on va chercher à minimiser la fonctionelle

$$I(u) = \int_M |\nabla u|^2 + hu^2,$$

dans l'espace $\mathcal{H}_q = \{u \in H^1, \int |u|^q = 1\}$ (voir l'exercice 4 du TD 10).

On admet que sur une variété compacte M, on a l'injection continue $H^1 \subset L^q$ pour $q \leq 2^*$, avec $2^* = \frac{2n}{n-2}$, et que cette injection est compacte pour $q < 2^*$. On suppose h régulière telle que $h \geq a > 0$.

1. Montrer que pour $q < 2^*$, il existe un unique minimiseur de I dans $\mathcal{H}_q$.

Dans toute la suite, on suppose $q = 2^*$. On note μ le minimum de I sur $\mathcal{H}_q$.

2. Soit u_n une suite minimisante. Montrer qu'il existe $u_0 \in H^1$ telle que $u_n \rightharpoonup u_0$ dans H^1 et L^q, et $u_n \longrightarrow u_0$ dans L^2 (à extraction près).

3. Montrer que $|\int |u_0|^q - |u_n|^q - |u_0 - u_n|^q| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

4. Montrer que $\int |\nabla(u_n - u_0)|^2 \longrightarrow \mu - I(u_0)$ quand $n \longrightarrow \infty$.

5. En déduire qu'il existe une constante C, dépendant seulement de la dimension, telle que

$$\left(1 - \int u_0^q\right)^{\frac{2}{q}} \leq C\mu(1 - (\int u_0^q)^{\frac{2}{q}}).$$

6. En déduire le théorème suivant (du à Trudinger et Aubin) : si $\mu < \frac{1}{C}$, alors le problème de minimisation admet une solution.

⋆