Td n° 12 d'Analyse fonctionnelle

Exercices divers

Séance du 23 mai 2014

Exercice 1. *Théorème de Bôchner*

Rappel On dit que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est semi-définie positive si pour tout $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{R}^d$ et tout $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(\xi_j - \xi_k) z_j \bar{z_k} \geq 0,$$

et $f(-\xi) = f\bar{(\xi)}$.

1. Soit μ une mesure finie positive. Montrer que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(\xi) = \int e^{ix.\xi} \mu(dx)$$

est semi-défine positive, continue, et satisfait $\mu(\mathbb{R}^d) = f(0)$.

2. Réciproquement, on considère une fonction f semi-définie positive continue. On suppose $f(0) = 1$. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a $|f(y)| \leq 1$.

3. On considère la forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$l(\phi) = \int \hat{\phi}(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Montrer que pour tout $\psi \in \mathcal{S}$ strictement positive, $l(\psi) > 0$.

4. On introduit la fonction $K_\lambda(x) = \prod_{n=1}^{d} \frac{1}{(1+\lambda x_n^4)}$. Soit $\phi \in \mathcal{S}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que pour λ assez petit,

$$\phi(x) \leq (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) K_\lambda(x).$$

5. En déduire

$$l(\phi) \leq (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) \int \hat{K}_\lambda(\xi) f(\xi).$$

6. Montrer que $|l(\phi)| \leq \|\phi\|_{L^\infty}$ et conclure.

⋆

Exercice 2. *Transformée de Cayley*

Soit A symétrique, fermé, de domaine dense dans un espace de Hilbert séparable H.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(A+i)$ est fermé, que $\mathrm{Im}(A+i)^\perp = \mathrm{Ker}(A^* - i)$, et que $Ker(A+i) = 0$.

On définit la transformée de Cayley de A,

$$U_A = (A - i)(A + i)^{-1}$$

allant de $\mathrm{Im}(A + i)$ vers $\mathrm{Im}(A - i)$.

2. Montrer que $D(A) = \mathrm{Im}(U - I)$. Montrer que U est une isométrie de $\mathrm{Im}(A + i)$ vers $\mathrm{Im}(A - i)$, que $\mathrm{Ker}(U - I) = 0$ et qu'on a la formule sur $D(A)$.

$$A = i(U + 1)(U - I)^{-1}$$

3. Montrer que A est autoadjoint ssi U est unitaire $H \to H$.

Si $\tilde{U}$ est une extension isométrique de U, alors $\tilde{A} = i(\tilde{U}+1)(\tilde{U}-I)^{-1}$ définit une extension symétrique de A, de domaine dense $D(\tilde{A}) = \mathrm{Im}(\tilde{U}-I)$

4. Montrer que A admet une extension autoadjointe ssi $\mathrm{Im}(A+i)^{\perp}$ et $\mathrm{Im}(A-i)^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^*-i)$ ont la même dimension (ces dimensions, éventuellement infinies, s'appellent les indices de défaut de A, notés n_+, n_-).

5. Calculer n_- et n_+ pour $A = id/dx$ défini sur H_0^1.

⋆

Exercice 3. *Solution fondamentale de l'opérateur des ondes*

On note Q l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > |y|\}$ et S la distribution correspondant à sa fonction caractéristique $\mathbf{1_Q}$.

1. Montrer que $T = \partial_x S - \partial_y S$ est la distribution $\varphi \mapsto 2\int_0^\infty \varphi(y,y)dy$.

2. Montrer que $\partial_x T + \partial_y T = 2\delta_0$.

3. En dénduire une solution fondamentale de l'opérateur différentiel $\partial_x^2 - \partial_y^2$.

⋆

Exercice 4. *Solution de l'équation des ondes par les moyennes sphériques*

On veut trouver une formule explicite pour la solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \; sur \; \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \\ (u, \partial_t u) = (f,g) \; sur \; \{0\} \times \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{1}$$

où f et g sont C^∞ à support compact.

1. On suppose $d = 1$. En posant $\xi = x+t$ et $\eta = x-t$ donner une solution explicite pour la solution de (1).

2. On suppose maintenant $d = 3$. On pose

$$M_u(x,r) = \frac{1}{4\pi} \int_{|x-y|=r} u(y)dS.$$

Montrer que si u est solution de (1), alors M_u satisfait

$$\partial_t^2(rM_u) - \partial_r^2(rM_u) = 0.$$

3. A l'aide de la question 1, en déduire une formule explicite pour u.

4. Méthode de descente d'Hadamard : on voudrait maintenant résoudre (1) pour $d = 2$, mais la méthode précédente ne fonctionne pas. On va donc voir la solution u de

$$\partial_t^2 u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u = 0$$

comme une solution de

$$\partial_t^2 u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u - \partial_{x_3}^2 u = 0$$

indépendante de x_3. En déduire une formule explicite pour u. Quelle différence fondamentale notez vous par rappport au cas $d = 3$?

⋆