Analyse fonctionnelle
TD n° 12

Convolution des distributions

Séance du 2 mai 2017

Exercice 1. *Échauffement*

1. Soit $H = \mathbb{1}_{x\geq 0}$. Montrer que $H' = \delta_0$.
2. Calculer les convolutions suivantes (après en avoir justifié l'existence) :

$$\begin{array}{llll} \delta_a * H, & \delta_0' * \mathbb{1}, & (x^m\delta_0^{(n)}) * (x^p\delta_0^{(q)}), & (\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'', \\ T * \mathbb{1}, & T * \exp, & \text{où } T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}). & \end{array}$$

3. Trouver $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

⋆

Exercice 2. *Dérivées successives des fonctions test*

Soit $a > 0$. On note $H_a := \frac{1}{a}(H - \delta_a * H)$

1. Montrer que si $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, alors $u * H_a \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour $u \in L^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} u * H_a = \int_{\mathbb{R}} u$.

On considère une suite de réels $\{a_n\}_{n\geq 0}$, décroissante, telle que $a_n > 0$, et $\sum a_n < \infty$. On pose $u_k = H_{a_0} * ... * H_{a_k}$.

3. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $u_k \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})$ et u_k est à support dans $[0, a_0 + ... + a_k]$.
4. Soit $j < k$. Montrer les estimations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |u_k^{(j)}(x)| \leq \frac{2^j}{a_0 \cdots a_j},$$
$$\int_{\mathbb{R}} |u_k^{(j)}(x)| dx \leq \frac{2^j}{a_0 \cdots a_{j-1}}.$$

5. Montrer que les suites $u_k^{(j)}$ sont de Cauchy dans L^∞. En déduire que u_k converge vers une fonction u. Que peut-on dire de u ?

6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Existe-t-il des fonctions $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq 2^n(n!)^\alpha$?

⋆

Exercice 3. *Équations différentielles linéaires*

Soient $a_0, \dots, a_K \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. On appelle solution fondamentale d'une équation différentielle linéaire inhomogène

$$\sum_{k=0}^{K} a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

toute distribution u telle que $\sum_k a_k u^{(k)} = \delta_0$. On en déduit alors une solution pour $f(t)$, en considérant $u * f$ (lorsque c'est bien défini).

1. On introduit $\mathcal{D}'_+ = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp}(u) \subset \mathbb{R}^+\}$. Expliquer pourquoi il est possible de convoler deux distributions de $\mathcal{D}'_+$. En déduire que $\mathcal{D}'_+$ forme une algèbre commutative pour $*$, d'élément neutre δ_0.

On notera u^{*n} la n-ième puissance de u, pour $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \in \mathbb{Z}$ si u est inversible).

2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\delta'_0 - \lambda\delta_0$ est inversible, et que :

$$(\delta'_0 - \lambda\delta_0)^{*-1} = H(t)e^{\lambda t}.$$

3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(\delta'_0 - \lambda\delta_0)^{*-n} = H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}$.

4. En déduire que toute équation différentielle linéaire à coefficients constants admet une solution fondamentale dans $\mathcal{D}'_+$.

⋆

Exercice 4. *L'équation de Schrödinger*

On considère sur $\mathbb{R}^n$ l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{cases} i\frac{\partial}{\partial t}u + \Delta_{\mathbb{R}^n} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \tag{S}$$

1. On suppose $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Résoudre l'équation (S) dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$.

2. Justifier pourquoi la transformée de Fourier de $\xi \mapsto e^{it|\xi|^2}$ est bien définie.

3. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement négative, on a

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2}) = \frac{1}{(-4\alpha\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x|^2}{4\alpha}}.$$

4. Montrer que cette égalité reste vraie, au sens de $\mathcal{S}'$, pour α imaginaire pur.

5. En déduire qu'il existe une constante C (à déterminer) telle que pour $u_0 \in L^1 \cap L^2$, la solution $u(t,x)$ de (S) vérifie, pour $t > 0$,

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \|u_0\|_{L^1}.$$

Cette inégalité porte le nom d'*estimée de dispersion.*

⋆

Exercice 5. *Régularisation par polynômes*

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme

$$P_k(x) = \frac{k^n}{\pi^{n/2}} \left(1 - \frac{|x|^2}{k^n}\right)^{k^{n+2}}.$$

Montrer que $P_k \to \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Indication : On pourra utiliser que, si $y \in [0,p]$, alors $\left|e^{-y} - \left(1 - \frac{y}{p}\right)^p\right| \leq \frac{1}{e(p-1)}$.

2. Montrer que toute distribution de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est limite de polynômes au sens des distributions.

⋆