Analyse fonctionnelle
TD n^o 12

Opérateurs non-bornés

Séance du 15 mai 2018

Tous les espaces considérés dans ce TD sont des espaces de Banach.

Exercice 1. *Échauffement*

Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ un opérateur borné. Montrer que $T^* \in \mathcal{L}(F^*,E^*)$, avec de plus $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)}$.

⋆

Exercice 2. *Relations entre noyau et image*

Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur non borné, à domaine dense.

1. Montrer que

$$\ker T \subset (\operatorname{Im} T^*)^\perp, \quad \ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp, \quad \overline{\operatorname{Im} T} = (\ker T^*)^\perp, \quad \overline{\operatorname{Im} T^*} \subset (\ker T)^\perp.$$

2. On suppose de plus que T est fermé. Montrer qu'alors $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$.

⋆

Exercice 3. *Une caractérisation de la surjectivité*

Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur non borné, à domaine dense, et *fermé.*

1. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $B_F(0,r) \subset \overline{T(B_E(0,1) \cap D(T))}$. Montrer que $B_F(0,r) \subset T(B_E(0,2) \cap D(T))$.

Indication : Pour $y \in B_F(0,r)$, on pourra construire une suite $\{x_n\}$ d'éléments de E telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_E < +\infty, \quad T\left(\sum_{n=0}^{N} x_n\right) \xrightarrow{N\to+\infty} y.$$

2. En appliquant le théorème de Hahn-Banach à $C = \overline{T(B_E(0,1) \cap D(T))}$, en déduire que s'il existe $r > 0$ tel que

$$r\|\ell\|_{F^*} \le \|T^*\ell\|_{E^*}, \quad \forall \ell \in D(T^*), \tag{$\star$}$$

alors T est surjectif.

3. Montrer la réciproque : si T est surjectif, alors il existe $r > 0$ tel que ($\star$) est satisfaite.

⋆

Exercice 4. *Images fermées*

Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur non borné, à domaine dense, et fermé. Le but de cet exercice est de montrer l'équivalence des énoncés suivants :

(i) $\operatorname{Im} T$ est fermé,

(ii) $\operatorname{Im} T^*$ est fermé,

(iii) $\operatorname{Im} T = (\ker T^*)^\perp$,

(iv) $\operatorname{Im} T^* = (\ker T)^\perp$.

1. À l'aide de l'exercice 2, montrer que (i) $\Leftrightarrow$ (iii) et que (iv) $\Rightarrow$ (ii).
2. En appliquant le théorème de l'application ouverte à

$$\Gamma : \begin{cases} \operatorname{Gr} T \longrightarrow \operatorname{Im} T \\ (x, Tx) \longmapsto Tx, \end{cases}$$

montrer que (i) $\Rightarrow$ (iv).

3. On suppose (ii), et l'on note $Z := \overline{\operatorname{Im} T}$. On définit $S : D(T) \subset E \to Z$, $x \mapsto Tx$.

(a) Montrer que $\ker S^* = \{0\}$ et que $\operatorname{Im} S^*$ est fermée.

(b) En appliquant le théorème de l'application ouverte à l'application $\Gamma : \operatorname{Gr} S^* \to \operatorname{Im} S^*$, et grâce au résultat de l'exercice 3, montrer que S est surjective. Conclure.

⋆

Exercice 5. *Domaine de l'adjoint*

Soit $T : D(T) \subset \ell^1 \to \ell^1$ l'opérateur non borné défini par

$$D(T) = \big\{ \{u_n\} \in \ell^1 \,\big|\, \{nu_n\} \in \ell^1 \big\}, \quad T : \{u_n\} \mapsto \{nu_n\}.$$

1. Montrer que $D(T)$ est dense, et que T est fermé.
2. Déterminer $D(T^*)$, T^*, et $\overline{D(T^*)}$.

⋆