Analyse fonctionnelle
TD n$^{\text{o}}$ 12

Espaces de Sobolev

Séance du 6 mai 2019

Exercice 1. *Échauffement : cas limite d'injection de Sobolev*

1. Montrer que $H^1(\mathbb{R}^2)$ n'est pas inclus dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Indication : On pourra considérer une fonction $f : x \mapsto \chi(|x|)(\ln|x|)^{\frac{1}{3}}$, sachant qu'en coordonnées polaires, $\nabla f = \partial_r f \overrightarrow{\mathbf{e_r}} + \frac{1}{r}\partial_\theta f \overrightarrow{\mathbf{e_\theta}}$.

2. Soit $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Montrer que $\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|\partial_{x_1} u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|\partial_{x_2} u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$.

3. En déduire que
$$\forall \theta \geq 2, \quad \|u\|^\theta_{L^{2\theta}(\mathbb{R}^2)} \leq \theta \|u\|^{\theta-1}_{L^{2(\theta-1)}(\mathbb{R}^2)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

4. Montrer que pout tout $\theta \geq 1$, il existe une constante $C(\theta)$ telle que
$$\|u\|_{L^{2\theta}(\mathbb{R}^2)} \leq C(\theta) \left(\|u\|_{L^{2(\theta-1)}(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right).$$

En conclure que pour tout $q \geq 2$, $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$.

⋆

Exercice 2. *Injection de Sobolev homogène*

On définit l'ensemble $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ (pour *Bounded Mean Oscillations*) comme l'ensemble des fonctions $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ telles que
$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)} := \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |f - f_{|B}|\, dx < \infty\,, \quad \text{avec} \quad f_{|B} := \frac{1}{|B|} \int_B f\, dx$$

où le sup est pris sur toutes les boules euclidiennes de $\mathbb{R}^d$. On veut montrer que $(L^1_{loc} \cap \dot{H}^{\frac{d}{2}})(\mathbb{R}^d)$ est continûment inclus dans $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$.

1. Vérifier que $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)}$ est une semi-norme mais pas une norme.

2. Soit $f \in (L^1_{loc} \cap \dot{H}^{\frac{d}{2}})(\mathbb{R}^d)$ et pour tout réel strictement positif A, $f_{\flat,A} := \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,A)}\mathcal{F}f)$. Montrer que
$$\|f_{\flat,A} - f_{\flat,A|B}\|_{L^2(B,\frac{dx}{|B|})} \leq CRA\|f\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)}$$

où R est le rayon de B.

3. On définit $f_{\sharp,A} := \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{{}^cB(0,A)}\mathcal{F}f)$. Montrer que
$$\int_B |f - f_{|B}| \frac{dx}{|B|} \leq \|f_{\flat,A} - f_{\flat,A|B}\|_{L^2(B,\frac{dx}{|B|})} + \frac{2}{\sqrt{|B|}} \|f_{\sharp,A}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,.$$

4. Conclure.

⋆

Exercice 3. *L'équation des ondes*

1. Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d), u_1 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Résoudre dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) = u_0, \\ \partial_t u(0,\cdot) = u_1. \end{cases}$$

2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On suppose de plus $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid 1 \leq |\xi| \leq 2\}$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, radiale, telle que $\chi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et $|\xi| \geq 3$, et $\chi(\xi) = 1$ pour $1 \leq |\xi| \leq 2$. Montrer que $\mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\hat{f}) = K(t,x) * f$, où

$$K(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \chi(\xi) e^{it|\xi| + ix\cdot\xi} d\xi.$$

3. Montrer que $|K(t,x)| \leq \frac{C}{|t|^{\lfloor \frac{d-2}{2}\rfloor + \frac{1}{2}}}$.

Indication : On pourra séparer les cas $|x| \leq \frac{t}{2}$ et $\frac{t}{2} \leq |x|$.

4. En déduire une estimation de décroissance, quand $d \geq 2$, pour la solution de l'équation des ondes, avec des données initiales u_0, u_1 qui vérifient l'hypothèse de la question 2, et que $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{u_1}/|\xi|)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

⋆

Exercice 4. *Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $p \in [1,\infty[$ et $\mathcal{F} \subseteq L^p(\Omega)$. Si $f \in L^p(\Omega)$, on étend implicitement f à $\mathbb{R}^d$ en posant $f(x) = 0$ pour $x \notin \Omega$. On peut alors considérer, pour $h \in \mathbb{R}^d$, $\tau_h f : x \longmapsto f(x+h)$. Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

Théorème. *$\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$ si et seulement si $\mathcal{F}$ satisfait les trois conditions suivantes :*

(i) *$\mathcal{F}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$.*

(ii) *$\mathcal{F}$ vérifie le critère d'équicontinuité suivant :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall f \in \mathcal{F},\ \forall h \in B(0,\delta), \quad \|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

(iii) *$\mathcal{F}$ vérifie le critère d'uniforme intégrabilité suivant :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad \|f\|_{L^p(\Omega\setminus B(0,R))} < \varepsilon.$$

Partie réciproque. On suppose que $\mathcal{F}$ vérifie (i), (ii) et (iii).

1. Soit $R > 0$, et $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp}\rho \subseteq B(0,1)$, $\rho \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d}\rho = 1$. On définit $\rho_n(x) := n^d\rho(nx)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_{n,R} := \left\{ (\rho_n * f)|_{\overline{\Omega\cap B(0,R)}} \,\middle|\, f \in \mathcal{F} \right\}$ est relativement compacte dans $C^0(\overline{\Omega \cap B(0,R)})$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe N tel que pour $n \geq N$,

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \|\rho_n * f - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

3. En déduire que $\mathcal{F}$ est précompacte dans $L^p(\Omega)$ et conclure.

Partie directe. On suppose que $\mathcal{F}$ est relativement compacte.

4. Montrer que pour $f \in L^p(\Omega)$, $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ quand $|h| \to 0$.

5. Conclure : montrer que $\mathcal{F}$ vérifie (i), (ii) et (iii).

Application.

6. On suppose Ω borné de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte (au sens où la boule unité de $H^1(\Omega)$ est compacte dans $L^2(\Omega)$).

⋆