# Corrigé – TD 12

*Fonctions caractéristiques*

**Exercice 0.** Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne $(X, Y)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose que la loi de $(X, Y)$ est
$$\lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)\,dx\,dy.$$
Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \min(X, Y)$.

2. On suppose que la loi de $(X, Y)$ est
$$\frac{1}{4\pi}e^{-x/2}\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}\mathbf{1}_{[0,2\pi]}(y)\,dx\,dy.$$
Déterminer la loi de la variable aléatoire $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$.

3. On suppose que la loi de $(X, Y)$ est
$$\frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy.$$
Calculer la loi de la variable aléatoire réelle $\frac{X}{Y}$.

**Corrigé :**

1. Soit $F\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(F(U)) &= \lambda\mu\int_{\mathbb{R}_+^2} F(\min(x,y))e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy\\
&= \lambda\mu\int_{\{0\leq x\leq y\}} F(x)e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy + \lambda\mu\int_{\{0\leq y\leq x\}} F(y)e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy\\
&= \lambda\int_0^\infty F(x)e^{-\lambda x}\left(\int_x^\infty \mu e^{-\mu y}\,dy\right)dx + \mu\int_0^\infty F(x)e^{-\mu x}\left(\int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y}\,dy\right)dx\\
&= (\lambda+\mu)\int_0^\infty F(x)e^{-(\lambda+\mu)x}\,dx.
\end{aligned}$$
La variable aléatoire $U$ est donc exponentielle de paramètre $\lambda+\mu$.

2. Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a,
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(F\left(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y)\right)\right) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f(\sqrt{x}\cos(y), \sqrt{x}\sin(y))e^{-x/2}\,dx\,dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f(x\cos(y), x\sin(y))e^{-x^2/2}x\,dx\,dy,
\end{aligned}$$

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

d'après la formule du changement de variables utilisée avec le $C^1$-difféomorphisme suivant : $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi] \mapsto (\sqrt{x}, y) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi]$. Puis d'après la formule du passage en coordonnées polaires, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(x\cos(y), x\sin(y))e^{-x^2/2}x\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(u,v)e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv.$$

La loi de $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$ est donc $(2\pi)^{-1}e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv$.
Remarque : les variables $\sqrt{X}\cos(Y)$ et $\sqrt{X}\sin(Y)$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

3. Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ borélienne. On a

$$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{X}{Y}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy.$$

Et $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \mapsto (x/y, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est un $C^1$-difféormorphisme de jacobien $y^{-1}$. Donc d'après la formule de changements de variables puis le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right)|y|\,e^{-\frac{y^2}{2}(\frac{x^2}{y^2}+1)}|y|^{-1}\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} g(u)\,|v|\,e^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}\,du\,dv \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(u)\left(\int_{\mathbb{R}} |v|\,e^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}\,dv\right)du \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} g(u)\frac{1}{u^2+1}\,du.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{X}{Y}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} g(u)\frac{1}{u^2+1}\,du,$$

ce qui signifie que la loi de $X/Y$ est la loi de Cauchy, c'est-à-dire la loi de densité $(\pi(1+x^2))^{-1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

**Exercice 1.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle. On écrit $\phi_X$ sa fonction caractéristique, définie par $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $X$ admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\phi_X$ est de classe $C^n$ et que pour tout entier $1 \le k \le n$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_X^{(k)}(t) = i^k\mathbb{E}\left[X^k\exp(itX)\right].$$

En particulier:

$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}[X^k] \tag{1}$$

2. On suppose que $\phi_X$ est $2$ fois dérivable en $0$. Montrer que $X$ admet un moment d'ordre $2$ et que $\mathbb{E}\left[X^2\right] = -\phi_X^{(2)}(0)$.

   **Indication.** On pourra considérer $\frac{\phi_X(t)+\phi_X(-t)-2}{t^2}$.

3. Soit $k \geq 2$ entier. On suppose que $\phi_X$ est $k$ fois dérivable en $0$. Montrer que $X$ admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor k/2 \rfloor$ (ici $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de $x$) donnés par (1).

4. ($\star$) Si $\phi_X$ est dérivable en $0$, est-ce que $X$ admet un moment d'ordre $1$ ?

**Corrigé :**

1. Ceci provient immédiatement du théorème de dérivation sous le signe intégral en utilisant la domination $\left|i^k X^k \exp(itX)\right| \leq |X|^k \in \mathbb{L}^1$ pour $1 \leq k \leq n$.

2. La fonction $\phi_X$ étant deux fois dérivable en $0$, la formule de Taylor-Young garantit un développement limité à l'ordre $2$:

$$\phi_X(t) = 1 + \phi'_X(0)t + \phi''_X(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

On en déduit que:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\phi_X(t) + \phi_X(-t) - 2}{t^2} = \phi''_X(0). \tag{2}$$

Or $\phi_X(t) + \phi_X(-t) = 2\mathrm{Re}(\phi_X(t)) = 2\mathbb{E}\left[\cos(tX)\right]$. Il s'ensuit par (2) que

$$\lim_{t\to 0} \mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] = -\frac{1}{2}\phi''_X(0).$$

Or $\frac{1-\cos(tX)}{t^2} \geq 0$. Le lemme de Fatou fournit donc:

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mathbb{E}\left[2\liminf_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right)\right] \leq 2\liminf_{t\to 0}\mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] = -\phi''_X(0) < \infty.$$

La question 1. permet de conclure que $\mathbb{E}\left[X^2\right] = -\phi_X^{(2)}(0)$.

3. Raisonner par récurrence en adaptant la preuve de la question précédente.

4. Non, pas nécessairement. Trouver un contre-exemple ! Faire l'exercice 7.

**Exercice 2.**

1. Calculer la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-|x|)\mathbf{1}_{|x|<1}$?

2. Quelle est la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-\cos(x))/(\pi x^2)$?

**Corrigé :**

1. On calcule, en intégrant par parties pour $t \neq 0$ :

$$\int_{\mathbb{R}} (1-|x|)\mathbf{1}_{|x|<1} e^{itx} dx = 2\int_0^1 (1-x)\cos(tx)dx = 2\frac{1-\cos(t)}{t^2}.$$

Pour $t = 0$, la première intégrale vaut $1$.

2. D'après le cours, si $\mu$ est une mesure de probabilité dont la fonction caractéristique $\widehat{\mu}$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda$, alors $\mu$ est absolument continue par rapport à $\lambda$, et sa densité est donnée $\lambda$-p.p. par

$$x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mu}(t) e^{-itx} dt.$$

On en déduit que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$(1 - |x|)\mathbf{1}_{|x|<1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dt\, 2 \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-itx}.$$

Les deux membres étant des fonctions continues en $x$, on a l'égalité pour tout $x \in \mathbb{R}$. En faisant le changement de variable $y = -x$, il s'ensuit que la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1 - \cos(x))/(\pi x^2)$ est $x \mapsto (1 - |x|)\mathbf{1}_{|x|<1}$.

**Exercice 3** (Transformée de Laplace)**.** Soit $X$ une v.a. positive. On pose

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad L_X(\lambda) = \mathbb{E}\big[e^{-\lambda X}\big] = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda x}\, \mathbb{P}_X(dx).$$

La fonction $L_X \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est appelé la *transformée de Laplace* de $X$, ou de sa loi $\mathbb{P}_X$.

1. $L_X$ est positive, décroissante, continue sur $\mathbb{R}_+$ et analytique sur $]0, \infty[$.

2. $L_X$ admet une dérivée à droite finie en 0 si et seulement si $\mathbb{E}[X] < \infty$. Dans ce cas, on a $L'_X(0+) = -\mathbb{E}[X]$.

3. Plus généralement, $L_X$ admet une dérivée $p^{\text{ième}}$ à droite en 0 si et seulement si $X$ admet un moment d'ordre $p$. Dans ce cas,

$$L_X^{(p)}(0+) = (-1)^p\, \mathbb{E}[X^p].$$

**Corrigé :** voir le polycopié de cours, section 7.3.d.

**Exercice 4** (Fonction génératrice)**.** Soit $X$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose

$$\forall r \in [0,1], \varphi_X(r) = \mathbb{E}\big[r^X\big] = \sum_{n \in \mathbb{N}} r^n \mathbb{P}(X = n).$$

La fonction $\varphi_X \colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$ est appelé la *fonction génératrice* de $X$, ou de sa loi $\mathbb{P}_X$.

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X = p) = \frac{1}{p!} \varphi_X^{(p)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ipu} \varphi_X(e^{iu}) du.$$

2. $X$ admet un moment d'ordre $p$ si et seulement si $\varphi_X$ admet une dérivée $p^{\text{ième}}$ à gauche en 1. Dans ce cas, on a

$$\varphi_X^{(p)}(1-) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-p+1)].$$

3. Soit $Y$ une autre v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si l'ensemble $\{r \in [0,1] \colon \varphi_X(r) = \varphi_Y(r)\}$ admet un point d'accumulation $r_0 \in [0,1[$, alors $\varphi_X = \varphi_Y$ et $X, Y$ ont même loi.

**Corrigé :** voir le polycopié de cours, section 7.3.d.

**Exercice 5** (Problème des moments)**.** On considère la fonction $f \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \sin(2\pi \ln x) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left( \frac{-\ln x^2}{2} \right).$$

Calculer $\int_{\mathbb{R}+} x^k f(x) dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire des v.a. $X$ et $Y$ de densité respectives

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left( \frac{-\ln x^2}{2} \right) \text{ et } (1 + \sin(2\pi \ln x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left( \frac{-\ln x^2}{2} \right)?$$

**Corrigé :** Soit $n \geq 0$. La fonction $x \mapsto x^n \sin(2\pi \ln(x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left( \frac{-\ln(x)^2}{2} \right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et le changement de variable $u = \ln(x)$ aboutit à

$$I = \int_0^\infty x^n \sin(2\pi \ln(x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left( \frac{-\ln(x)^2}{2} \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left( \frac{-u^2}{2} + nu \right) \sin(2\pi u) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} du.$$

En remarquant que $-u^2/2 + nu = -(u-n)^2/2 + n^2/2$, le changement de variable $v = u - n$ donne

$$I = \text{constante} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi v) \exp\left( \frac{-v^2}{2} \right) dv = 0.$$

Ainsi pour $\alpha \in [-1;1]$ les moments des lois $K(2 + \alpha \sin(2\pi \ln(x))) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left( \frac{-\ln(x)^2}{2} \right)$ avec

$$K^{-1} = \int_0^\infty 2 \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left( \frac{-\ln(x)^2}{2} \right) dx$$

sont égaux sans que ces lois ne soient égales.

**Exercice 6** (Queues de variables aléatoires)**.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle. On définit la *queue* de $X$ par

$$\psi(x) = \mathbb{P}(|X| > x).$$

1. Si $X$ est intégrable, montrer que

$$\lim_{x \to \infty} x\psi(x) = 0.$$

2. Si $X$ est dans $\mathbb{L}^p$ avec $p \geq 1$, montrer que

$$\lim_{x \to \infty} x^p \psi(x) = 0.$$

3. Donner un équivalent de la queue de la loi d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

**Corrigé :**

1. On a
$$\mathbb{E}[|X|] = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X| > x)\, dx.$$
Donc la fonction $x \mapsto \mathbb{P}(|X| > x)$ est intégrable. Elle est de plus décroissante ce qui implique le résultat. En effet, $t\mathbb{P}(|X| > 2t) \leq \int_t^{2t} \mathbb{P}(|X| > x)dx \to 0$ quand $x \to 0$.

2. On écrit de manière similaire
$$\mathbb{E}(|X|^p) = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X| > x^{1/p})\, dx,$$
de sorte que $x\mathbb{P}(|X| \geq x^{1/p}) \to 0$ quand $x \to \infty$.
*Remarque.* Une autre manière de faire est d'écrire
$$x^p\mathbb{P}(|X| > x) = \mathbb{E}\left[x^p \mathbf{1}_{\{|X|>x\}}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X|^p \mathbf{1}_{\{|X|>x\}}\right] \longrightarrow 0$$
quand $x \to \infty$ par convergence dominée.

3. Si $N$ désigne une variable aléatoire gaussienne centrée réduite, on a
$$\mathbb{P}(|N| > x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty du e^{-u^2/2} \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty du \frac{u}{x} e^{-u^2/2} = \frac{2}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$
Pour une minoration, on intègre par parties :
$$\int_x^\infty e^{-u^2/2} du = \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^\infty \frac{e^{-u^2/2}}{u^2} du.$$
On réintègre par parties:
$$\int_x^\infty \frac{e^{-u^2/2}}{u^2} du = \frac{1}{x^3} e^{-x^2/2} - \int_x^\infty \frac{3e^{-u^2/2}}{u^4} du.$$
Ainsi
$$\int_x^\infty e^{-u^2/2} du = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} + \int_x^\infty \frac{3e^{-u^2/2}}{u^4} du \geq \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2}.$$
On en déduit que
$$\mathbb{P}(|N| > x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{2}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

**Exercice 7.** ($\star$) Soit $X$ une variable aléatoire réelle de loi $P_X = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta_k$ symétrique (c'est-à-dire $a_k = a_{-k}$) et telle que $\sum_{k\geq 0} k a_k = \infty$. Le moment d'ordre $1$ de $X$ est-il fini? Trouver une suite $(a_k)_{k\geq 1}$ telle que $\phi_X$ soit dérivable en $0$. Comparer avec l'exercice 1.

**Corrigé :** On calcule aisément $\mathbb{E}\left[|X|\right] = 2\sum_{k>0} k a_k = +\infty$. D'autre part:

$$\phi_X(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt).$$

Choisissons $a_0 = a_1 = a_{-1} = 0$ et pour $k \geq 2$:

$$a_k = a_{-k} = \frac{c}{k^2 \ln k}, \qquad \text{où } c = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}\right)^{-1},$$

de sorte que:

$$0 \leq \frac{1-\phi_X(t)}{t} = \frac{2c}{t}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}(1-\cos(tk)).$$

On vérifie ensuite que cette quantité tend vers $0$ lorsque $t \to 0$ en décomposant cette dernière somme suivant que $k \geq 1/t$ ou $k < 1/t$. Tout d'abord:

$$\sum_{k\geq 1/t} \frac{1}{k^2 \ln k}\frac{(1-\cos(tk))}{t} \leq -\frac{2}{t\ln(t)}\sum_{k\geq 1/t}\frac{1}{k^2} \leq -\frac{2}{t\ln(t)}\int_{\lfloor 1/t\rfloor -1}\frac{1}{x^2}dx = -\frac{2}{t(\lfloor 1/t\rfloor -1)\ln(t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité $1-\cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{t}\sum_{2\leq k<1/t}\frac{1}{k^2 \ln k}\frac{(1-\cos(tk))}{t} \leq t\sum_{2\leq k<1/t}\frac{1}{\ln(k)} \leq \frac{t}{\ln(2)} + t\int_2^{1/t}\frac{1}{\ln(x)}dx.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_2^y \frac{1}{\ln(x)}dx = \left[\frac{x}{\ln(x)}\right]_2^y + \int_2^y \frac{1}{(\ln(x))^2}dx.$$

Mais lorsque $x \to \infty$, $1/(\ln x)^2 = o(1/\ln(x))$ et donc lorsque $y \to \infty$:

$$\int_2^y \frac{1}{\ln(x)}dx = \left[\frac{x}{\ln(x)}\right]_2^y + o\left(\int_2^y \frac{1}{\ln(x)}dx\right)$$

de sorte que

$$\int_2^{1/t}\frac{1}{\ln(x)}dx \quad \underset{t\to 0}{\sim} \quad -\frac{1}{t\ln(t)}$$

Il s'ensuit que

$$t\int_2^{1/t}\frac{1}{\ln(x)}dx \quad \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Ceci achève de démontrer que $(1-\phi_X(t))/t \to 0$ lorsque $t \to 0$.

**Exercice 8.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On note $\phi_n(t) = \phi_{X_n}(t)$ pour simplifier, et on suppose qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue en $0$, telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(t).$$

1. Prouver que pour tout $a > 0$ on a

$$\mathbb{P}\Big(|X_n| > \frac{2}{a}\Big) \leq \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-\mathrm{Re}(\phi_n(u)))\,du = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-\phi_n(u))\,du.$$

2. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $u > 0$ et $n_0$ tels que pour $n > n_0$ on ait

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}|1-\phi_n(t)|dt < \epsilon.$$

3. En déduire que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a > 0$ tel que

$$\forall n \geq 1, \qquad \mathbb{P}(|X_n| > a) < 2\epsilon.$$

**Corrigé :**

1. D'après le théorème de Fubini–Tonelli,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-\phi_n(t))dt &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left(\int_{\mathbb{R}}(1-e^{itx})\mathbb{P}_{X_n}(dx)\right)dt = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-a}^{a}(1-e^{itx})dt\right)\mathbb{P}_{X_n}(dx)\\ &= 2\int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{\sin(ax)}{ax}\right)\mathbb{P}_{X_n}(dx) \geq \int_{|x|>2/u}\left(1-\frac{1}{|ax|}\right)\mathbb{P}_{X_n}(dx)\end{aligned}$$

car pour tout réel $t$ on a $1-\sin(t)/t \geq 0$ et $1-\sin(t)/t \geq 1-1/|t|$. Comme

$$2\int_{|x|>2/a}\left(1-\frac{1}{|ax|}\right)\mathbb{P}_{X_n}(dx) \leq 2\int_{|x|>2/a}\left(1-\frac{1}{2}\right)\mathbb{P}_{X_n}(dx) = \mathbb{P}\big(|X_n| > 2/a\big),$$

ceci conclut.

2. Comme $|\phi(t)| = \lim_{n\to\infty}|\phi_n(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(0) = \lim_{n\to\infty}|\phi_n(0)| = 1$ et que $\phi$ est continue en $0$, si $\epsilon > 0$ est fixé, il existe $u > 0$ tel que $|1-\phi(t)| < \epsilon/2$ pour $|t| < u$. Ainsi

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}|1-\phi(t)|dt < \epsilon.$$

Or $|1-\phi_n(t)| \leq 2$ et $|1-\phi_n(t)| \to |1-\phi(t)|$ quand $n \to \infty$. Par convergence dominée, il s'ensuit que

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}|1-\phi_n(t)|dt \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}|1-\phi(t)|dt < \epsilon.$$

Le résultat désiré en découle.

3. D'après la première question, pour $n \geq n_0$, $\mathbb{P}(|X_n| > \frac{2}{u}) > 2\epsilon$. Comme les variables aléatoires $X_i$ sont réelles, il existe des réels positifs $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}$ tels que

$$\mathbb{P}(|X_i| > a_i) < 2\epsilon, \qquad 0 \leq i \leq n_0 - 1.$$

En posant $a = \max(2/u, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1})$, on a bien

$$\mathbb{P}(|X_n| > a) < 2\epsilon$$

pour tout entier $n \geq 1$.