PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 12
MOUVEMENT BROWNIEN - PROPRIÉTÉ DE MARKOV

Dans tous les exercices, $(B_t)_{t\geq 0}$ *désigne un mouvement brownien réel standard partant de 0 défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Temps d'atteinte)**.**
Pour $a \geq 0$, on pose $T_a = \inf\{s \geq 0 : B_t = a\}$.

1. Montrer que pour tout $a \geq 0$, $T_a = a^2 T_1$ en loi.
2. Soit $0 \leq a \leq b < \infty$, montrer que $T_b - T_a$ a la même loi que T_{b-a} et est indépendant de T_a.

Correction :

1. Soit $(B_t)_{t\geq}$ un mouvement brownien. D'après les propriétés d'invariance d'échelle du MB le processus $\tilde{B}_t = aB_{t/a^2}$ a la loi d'un mouvement brownien. Ainsi si (la princesse) $\tilde{T}_a = \inf\{t \geq 0 : \tilde{B}_t = a\}$ on a l'égalité en distribution $T_a = \tilde{T}_a$. Or par définition on a $\tilde{T}_1 = a^2 T_1$.
2. On a déjà vérifié que T_a est un temps d'arrêt (exercice précédent). On peut donc appliquer la propriété de Markov fort à T_a pour obtenir que B^{T_a} est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$. Or si l'on pose $T_{b-a}^{T_a} = \inf\{t \geq 0 : B_t^{T_a} = b - a\}$ on a l'égalité
$$T_b = T_a + T_{b-a}^{T_a}.$$
En particulier $T_{b-a}^{T_a}$ a la même loi que T_{b-a} et est indépendant de T_a.

Exercice 2 (Principe de réflexion)**.** Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien unidimensionnel. Pour tout $t > 0$, notons $S_t = \sup\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$. Le but de l'exercice est de calculer la loi jointe de (B_t, S_t). Pour $a \geq 0$, on pose $T_a = \inf\{s \geq 0 : B_t = a\}$.

1. Montrer que T_a est un temps d'arrêt presque sûrement fini.
2. Montrer que $(B_t^{T_a})_{t\geq 0} = (B_{t+T_a} - B_{T_a})_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de T_a.
3. Soit $a \geq 0 \geq b$. Prouver que $\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b)$.
4. En déduire que la loi de (S_t, B_t) est
$$\frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{\{a>0, b<a\}} \mathrm{d}a\mathrm{d}b.$$
5. Applications : Montrer que $\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a)$ et $\mathbb{P}(T_a \leq t) = \mathbb{P}(a^2/B_1^2 \leq t)$.

Correction : Voir Théorème 14.5.2 et son corollaire dans le poly de Jean-François Le Gall.

Exercice 3 (Loi de l'arcsinus)**.**
On définit $d_1 = \inf\{t \geq 1 \mid B_t = 0\}$ et $g_1 = \sup\{t \leq 1 \mid B_t = 0\}$.

1. Montrer que d_1 est un temps d'arrêt mais pas g_1.
2. On veut calculer la densité de la loi de d_1.
   (a) Montrer que pour tout $t \geq 1$, on a
   $$\mathbb{P}[d_1 \leq t] \;=\; \mathbb{E}[g(B_1)]\,,$$
   où pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a posé
   $$g(x) \;=\; \mathbb{P}\left[\sup_{s\in[0,t-1]} \widetilde{B}_s \geq |x|\right]$$
   avec $\widetilde{B}$ un mouvement brownien issu de 0 et indépendant de $\mathcal{F}_1$.
   (b) Montrer que
   $$d_1 \;=\; 1 + \left(\frac{N}{\hat{N}}\right)^2 \quad \text{en loi,}$$
   où N et $\hat{N}$ sont des gaussiennes centrées réduites indépendantes.
   (c) En déduire la densité de la loi de d_1.
3. Montrer que $g_1 = (d_1)^{-1}$ en loi. En déduire la densité de la loi de g_1 (la loi de g_1 s'appelle la loi de l'arcsinus).

Correction :

1. Pour d_1 c'est facile. En revanche g_1 n'est pas un temps d'arrêt car il donne de l'information sur le futur.
2. (a) Pour tout $t \geq 1$, on a
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(d_1 \leq t) &= \mathbb{P}(\exists s \in [1,t] \,|\, B_s = 0) \\ &= \mathbb{P}(\exists s \in [0,t-1] \,|\, B_{1+s} - B_1 = -B_1) \\ &= \mathbb{P}(\exists s \in [0,t-1] \,|\, \widetilde{B}_s = -B_1)\,, \end{aligned}$$
   où par la propriété de Markov faible on sait que $\widetilde{B}$ est un mouvement brownien issu de 0, indépendant de $\mathcal{F}_1$. On en déduit que
   $$\mathbb{P}(d_1 \leq t) \;=\; \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\exists s\in[0,t-1]\,|\,\widetilde{B}_s=-B_1\}}|\mathcal{F}_1)\right) \;=\; \mathbb{E}(g(B_1))\,,$$
   où pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
   $$\begin{aligned} g(x) &= \mathbb{P}(\exists s \in [0,t-1] \,|\, \widetilde{B}_s = -x) \\ &= \begin{cases} \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t-1]} \widetilde{B}_s \geq -x) & si\ x < 0 \\ \mathbb{P}(\inf_{s\in[0,t-1]} \widetilde{B}_s \leq -x) \;=\; \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t-1]} \widetilde{B}_s \geq x) & si\ x \geq 0 \end{cases} \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{s\in[0,t-1]} \widetilde{B}_s \geq |x|\right)\,. \end{aligned}$$

On a utilisé la même propriété de l'espérance conditionnelle que dans l'exercice 1, et on a utilisé le fait que $\widetilde{B}$ est continu p.s.

(b) En appliquant le changement d'échelle de paramètre $\gamma = \sqrt{t-1}$ à $\widetilde{B}$, i.e. en remarquant que $(\hat{B}_s)_{s\geq 0} = (\widetilde{B}_{(t-1)s}/\sqrt{t-1})_{s\geq 0}$ est un mouvement brownien (toujours indépendant de $\mathcal{F}_1$), et en notant $\hat{S}_u = \sup_{s\in[0,u]} \hat{B}_s$ on obtient

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t-1]} \widetilde{B}_s \geq |x|) \\ &= \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,1]} \widetilde{B}_{(t-1)s} \geq |x|) \\ &= \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,1]} \sqrt{t-1}(\widetilde{B}_{(t-1)s}/\sqrt{t-1}) \geq |x|) \\ &= \mathbb{P}(\sqrt{t-1}\sup_{s\in[0,1]} \hat{B}_s \geq |x|) \\ &= \mathbb{P}(\sqrt{t-1}\hat{S}_1 \geq |x|) \end{aligned}$$

On note en passant que $\hat{S}_1$ est indépendant de $\mathcal{F}_1$, donc de B_1. On en déduit, en notant génériquement P_Z la loi de Z, que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(d_1 \leq t) &= \int g(x)\, dP_{B_1}(x) \\ &= \int \left(\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sqrt{t-1}\hat{S}_1\geq |x|\}}]\right)\, dP_{B_1}(x) \\ &= \mathbb{E}\left[\int \mathbb{1}_{\{\sqrt{t-1}\hat{S}_1\geq |x|\}} dP_{B_1}(x)\right] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sqrt{t-1}\hat{S}_1\geq |B_1|\}}|\hat{S}_1]] \\ &= \mathbb{P}[\sqrt{t-1}\hat{S}_1 \geq |B_1|]\,. \end{aligned}$$

On remarque que $\hat{S}_1$ et $|B_1|$ sont des variables indépendantes (on l'a d'ailleurs utilisé pour faire apparaître le conditionnement). De plus on a l'égalité en loi $\hat{S}_1 = |\hat{B}_1|$, donc $\hat{S}_1$ et $|B_1|$ sont égales en loi, de même loi que la valeur absolue d'une gaussienne centrée réduite. En notant N et $\hat{N}$ deux gaussiennes centrées réduites indépendantes, on en déduit que

$$\mathbb{P}[d_1 \leq t] = \mathbb{P}[\sqrt{t-1}|\hat{N}| \leq |N|] = \mathbb{P}[1 + N^2/\hat{N}^2 \leq t]\,.$$

Cela montre que d_1 a la loi de $1 + (N/\hat{N})^2$ où N et $\hat{N}$ sont deux gaussiennes centrées réduites indépendantes.

(c) Calculons la densité de cette loi par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour tout fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mesurable bornée, on a

$$\mathbb{E}(f(d_1)) = \int_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} f\left(1+\frac{n^2}{p^2}\right) e^{-\frac{n^2+p^2}{2}} dndp$$

$$\begin{aligned}
&= 4\int_{n=0}^{+\infty}\int_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}f\left(1+\frac{n^2}{p^2}\right)e^{-\frac{n^2+p^2}{2}}dndp \\
&= 4\int_{u=1}^{+\infty}\int_{p=0}^{+\infty}f(u)\frac{p}{4\pi\sqrt{u-1}}e^{-\frac{up^2}{2}}dudp \\
&= \int_{u=1}^{+\infty}\frac{f(u)}{\pi\sqrt{u-1}}\left(\int_{p=0}^{+\infty}pe^{-\frac{up^2}{2}}dp\right)du \\
&= \int_{u=1}^{+\infty}f(u)\frac{1}{\pi u\sqrt{u-1}}du\,.
\end{aligned}$$

La loi de d_1 a donc pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$u\mapsto\frac{1}{\pi u\sqrt{u-1}}\mathbb{1}_{\{u>1\}}.$$

3. On a, p.s.,

$$\begin{aligned}
g_1 &= \sup\{t\le 1\,|\,B_t=0\} \\
&= \left(\inf\{u\ge 1\,|\,B_{1/u}=0\}\right)^{-1} \\
&= \left(\inf\{t\ge 1\,|\,tB_{1/t}=0\}\right)^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Puisque $(X_t)_{t\ge 0}$ défini par $X_0=0$ et $X_t=tB_{1/t}$ pour $t>0$ est un mouvement brownien (résultat du cours), cela implique que g_1 a la même loi que $(d_1)^{-1}$. Alors pour toute fonction $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ mesurable bornée, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(g_1)) &= \int_1^{\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{\pi x\sqrt{x-1}}dx \\
&= \int_0^1 f(y)\frac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}}dy\,,
\end{aligned}$$

la loi de g_1 a donc pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$y\mapsto\frac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}}\mathbb{1}_{\{0<y<1\}}.$$

Exercice 4 (Le pont brownien (tiré de l'examen 2012)). On définit le processus $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ par $Z_t=B_t-tB_1$. On appelle ce processus le pont brownien (remarquer que $Z_0=Z_1=0$).

1. Calculer la moyenne m_t et la matrice de covariance $K(s,t)$ du processus Z_t.

2. On pose $\widehat{Z}_t=Z_{1-t}$. Montrer que le processus $\widehat{Z}_t$ a la même loi que Z_t.

3. Soit $Y_t=(1-t)B_{t/(1-t)}$ pour $t\in[0,1[$. Montrer que $Y_t\to 0$ quand $t\to 1$. On pose $Y_1=0$. Montrer que $(Y_t)_{t\in[0,1]}$ a la même loi que $(Z_t)_{t\in[0,1]}$.

4. Montrer que $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ est indépendant de B_1.

5. Soit $G : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On note $B = (B_t)_{t\in[0,1]}$ et $Z = (Z_t)_{t\in[0,1]}$. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}[G(B) | -\varepsilon < B_1 < \varepsilon] = \mathbb{E}[G(Z)].$$

6. Déterminer la loi de $M_1 = \sup_{t\in[0,1]} Z_t$.

Correction : annales des examens de processus aléatoires.

Exercice 5 (Zéros du mouvement brownien)**.**

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \Omega \times \mathbb{R}^+ & \to & \{0,1\} \\ (\omega, t) & \mapsto & \mathbb{1}_{B_t(\omega)=0} \end{array}$$

est mesurable lorsque l'on munit $\Omega \times \mathbb{R}^+$ de la tribu $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.

Indication: on pourra considerer les ensembles de la forme

$$E_{a,b} \ = \ \{\omega \in \Omega \,|\, \forall t \in]a,b[, B_t(\omega) \neq 0\}$$

pour tous $0 \le a < b$, et montrer qu'ils sont dans $\mathcal{F}$.

2. Soit $\mathcal{Z} = \{t \ge 0 \,|\, B_t = 0\}$, l'ensemble des zéros du mouvement brownien. Montrer que p.s. $\mathcal{Z}$ est fermé, non borné, de mesure de Lebesgue nulle et sans point isolé.

Indication: pour montrer cette dernière propriété, on pourra considérer les temps d'arrêt $d_q = \inf\{t \ge q \,|\, B_t = 0\}$ pour $q \in \mathbb{Q}^+$, montrer que pour tout q, p.s., $d_q < \infty$, et montrer dans un premier temps que ces éléments particuliers de $\mathcal{Z}$ ne sont pas isolés p.s.

Correction :

1. Il suffit de montrer que $\varphi^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. Pour cela on remarque que

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{-1}(\{0\}) & = & \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \,|\, B_t(\omega) \neq 0\} \\ & = & \displaystyle\bigcup_{0\le a<b\in\mathbb{Q}^+} \{\omega \in \Omega \,|\, \forall t \in]a,b[\,,\ |B_t(\omega)| \neq 0|\} \times]a,b[\end{array}$$

car à ω fixé, $\{t \in \mathbb{R}^+ \,|\, B_t(\omega) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^+$ (par continuité de B). Il suffit donc de montrer que pour tous $0 \le a < b \in \mathbb{Q}^+$,

$$E_{a,b} = \{\omega \in \Omega \,|\, \forall t \in]a,b[\,,\ |B_t(\omega)| \neq 0\}$$

est dans $\mathcal{F}$. Or on a

$$E_{a,b} \ = \ \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \{\omega \in \Omega \,|\, \forall t \in [a+1/n, b-1/n]\,,\ |B_t(\omega)| \neq 0\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\{\omega\in\Omega \,|\, \forall t\in[a+1/n,b-1/n]\,,\ |B_t(\omega)|\geq \frac{1}{p}\} \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\{\omega\in\Omega \,|\, \forall t\in[a+1/n,b-1/n]\cap\mathbb{Q}\,,\ |B_t(\omega)|\geq \frac{1}{p}\} \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{t\in[a+1/n,b-1/n]\cap\mathbb{Q}}\{\omega\in\Omega \,|\, |B_t(\omega)|\geq \frac{1}{p}\} \in \mathcal{F}\,.
\end{aligned}
$$

On a utilisé la continuité de $t\to B_t(\omega)$ d'abord pour se ramener à des intervalles compacts $[a+1/n,b-1/n]$, puis pour affirmer que si $|B_t(\omega)|>0$ sur $[a+1/n,b-1/n]$ il existe $p(\omega)\in\mathbb{N}^*$ tel que $|B_t(\omega)|\geq 1/p(\omega)$ sur $[a+1/n,b-1/n]$ par compacité de $[a+1/n,b-1/n]$, et enfin pour se restreindre à des valeurs de t dans $\mathbb{Q}$. Ceci achève la démonstration de 1..

2. • Pour tout $\omega\in\Omega$, la fonction $t\longmapsto B_t(\omega)$ est continue ce qui implique que $\mathcal{Z}(\omega)$ est fermé.

   • De plus, on sait que p.s.

$$
\limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty \qquad \text{et} \qquad \liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty \qquad et \qquad t\mapsto B_t \quad \text{continu}
$$

   ce qui implique que $\mathcal{Z}$ est p.s. non borné.

   • Notons $M=\lambda(\mathcal{Z})$ la mesure de Lebesgue de $\mathcal{Z}$. On a, d'après le théorème de Fubini (on peut bien l'appliquer grâce à la question 1.),

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(M) &= \int\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{B_t(\omega)=0\}}\,dt\right)\,d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_0^\infty\left(\int \mathbb{1}_{\{B_t(\omega)=0\}}\,d\mathbb{P}(\omega)\right)\,dt \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(B_t=0)dt = 0\,,
\end{aligned}
$$

   car pour tout t, la loi de B_t n'a pas d'atome en 0. La variable aléatoire M étant positive, cela implique que $M=0$ p.s. c'est à dire que $\mathcal{Z}$ est de mesure de Lebesgue nulle p.s..

   • Enfin, montrons que $\mathcal{Z}$ n'a pas de point isolé. Pour $q\in\mathbb{Q}^+$, posons

$$
d_q = \inf\{t\geq q \,|\, B_t=0\}\,.
$$

   Le point d_q est un élément de $\mathcal{Z}$, pour tout $q\in\mathbb{Q}^+$, et d_q est un temps d'arrêt. De plus, pour tout $q\in\mathbb{Q}^+$, d_q est fini p.s. car $\limsup B=+\infty$ et $\liminf B=-\infty$. Par la propriété de Markov forte appliquée en d_q (donc pas besoin du conditionnement par $d_q<\infty$ ici), on sait que le processus $(\widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$
\widetilde{B}_t = \begin{cases} B_{d_q+t}-B_{d_q} = B_{d_q+t} & \text{si } d_q<\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
$$

est un mouvement brownien issu de 0. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\inf\{t > d_q \,|\, B_t = 0\} = d_q\right) &= \mathbb{P}\big(\inf\{t > 0 \,|\, B_{t+d_q} = B_{d_q} = 0\} = 0\big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\inf\{t > 0 \,|\, \widetilde{B}_t = 0\} = 0\Big) \\ &= 1\,,\end{aligned}$$

car on sait d'après le cours que p.s., pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup_{[0,\varepsilon]} B > 0$ et $\inf_{[0,\varepsilon]} B < 0$, donc par continuité p.s. du mouvement brownien, $\inf\{t > 0 \,|\, B_t = 0\} = 0$ p.s. Ainsi, p.s., d_q n'est pas isolé puis p.s., pour tout $q \in \mathbb{Q}_+$, d_q n'est pas isolé.

Pour $\omega \in \Omega$, considérons $T(\omega) \in \mathcal{Z}(\omega) \setminus \{d_q(\omega), q \in \mathbb{Q}_+\}$ et une suite de rationnels $(r_n)_{n\geq 0}$ telle que $r_n \uparrow T(\omega)$ quand $n \longrightarrow \infty$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$, $r_n \leq d_{r_n}(\omega) < T(\omega)$ ce qui implique que $d_{r_n}(\omega) \longrightarrow T(\omega)$ quand $n \longrightarrow \infty$. Donc $T(\omega)$ n'est pas isolé, et ainsi, p.s., $\mathcal{Z}$ n'a pas de point isolé.