PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 12
MOUVEMENT BROWNIEN - PROPRIÉTÉ DE MARKOV

Dans tous les exercices, $(B_t)_{t\geq 0}$ *désigne un mouvement brownien réel standard partant de 0 défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Temps d'atteinte).
Pour $a \geq 0$, on pose $T_a = \inf\{s \geq 0 : B_t = a\}$.

1. Montrer que pour tout $a \geq 0$, $T_a = a^2 T_1$ en loi.
2. Soit $0 \leq a \leq b < \infty$, montrer que $T_b - T_a$ a la même loi que T_{b-a} et est indépendant de T_a.

Exercice 2 (Principe de réflexion). Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien unidimensionnel. Pour tout $t > 0$, notons $S_t = \sup\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$. Le but de l'exercice est de calculer la loi jointe de (B_t, S_t). Pour $a \geq 0$, on pose $T_a = \inf\{s \geq 0 : B_t = a\}$.

1. Montrer que T_a est un temps d'arrêt presque sûrement fini.
2. Montrer que $(B_t^{T_a})_{t\geq 0} = (B_{t+T_a} - B_{T_a})_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de T_a.
3. Soit $a \geq 0 \geq b$. Prouver que $\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b)$.
4. En déduire que la loi de (S_t, B_t) est
$$\frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{\{a>0, b<a\}} \mathrm{d}a\mathrm{d}b.$$
5. Applications : Montrer que $\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a)$ et $\mathbb{P}(T_a \leq t) = \mathbb{P}(a^2/B_1^2 \leq t)$.

Exercice 3 (Loi de l'arcsinus).
On définit $d_1 = \inf\{t \geq 1 \mid B_t = 0\}$ et $g_1 = \sup\{t \leq 1 \mid B_t = 0\}$.

1. Montrer que d_1 est un temps d'arrêt mais pas g_1.
2. On veut calculer la densité de la loi de d_1.
   (a) Montrer que pour tout $t \geq 1$, on a
   $$\mathbb{P}[d_1 \leq t] = \mathbb{E}[g(B_1)],$$
   où pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a posé
   $$g(x) = \mathbb{P}\left[\sup_{s\in[0,t-1]} \widetilde{B}_s \geq |x|\right]$$
   avec $\widetilde{B}$ un mouvement brownien issu de 0 et indépendant de $\mathcal{F}_1$.

(b) Montrer que

$$d_1 \,=\, 1 + \left(\frac{N}{\hat{N}}\right)^2 \quad \text{en loi,}$$

où N et $\hat{N}$ sont des gaussiennes centrées réduites indépendantes.

(c) En déduire la densité de la loi de d_1.

3. Montrer que $g_1 = (d_1)^{-1}$ en loi. En déduire la densité de la loi de g_1 (la loi de g_1 s'appelle la loi de l'arcsinus).

Exercice 4 (Le pont brownien (tiré de l'examen 2012))**.** On définit le processus $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ par $Z_t = B_t - tB_1$. On appelle ce processus le pont brownien (remarquer que $Z_0 = Z_1 = 0$).

1. Calculer la moyenne m_t et la matrice de covariance $K(s,t)$ du processus Z_t.

2. On pose $\widehat{Z}_t = Z_{1-t}$. Montrer que le processus $\widehat{Z}_t$ a la même loi que Z_t.

3. Soit $Y_t = (1-t)B_{t/(1-t)}$ pour $t \in [0,1[$. Montrer que $Y_t \to 0$ quand $t \to 1$. On pose $Y_1 = 0$. Montrer que $(Y_t)_{t\in[0,1]}$ a la même loi que $(Z_t)_{t\in[0,1]}$.

4. Montrer que $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ est indépendant de B_1.

5. Soit $G : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On note $B = (B_t)_{t\in[0,1]}$ et $Z = (Z_t)_{t\in[0,1]}$. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}[G(B) | -\varepsilon < B_1 < \varepsilon] = \mathbb{E}[G(Z)].$$

6. Déterminer la loi de $M_1 = \sup_{t\in[0,1]} Z_t$.

Exercice 5 (Zéros du mouvement brownien)**.**

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \Omega \times \mathbb{R}^+ & \to & \{0,1\} \\ (\omega, t) & \mapsto & \mathbb{1}_{B_t(\omega)=0} \end{array}$$

est mesurable lorsque l'on munit $\Omega \times \mathbb{R}^+$ de la tribu $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.

Indication: on pourra considerer les ensembles de la forme

$$E_{a,b} \,=\, \{\omega \in \Omega \,|\, \forall t \in]a,b[, B_t(\omega) \neq 0\}$$

pour tous $0 \leq a < b$, et montrer qu'ils sont dans $\mathcal{F}$.

2. Soit $\mathcal{Z} = \{t \geq 0 \,|\, B_t = 0\}$, l'ensemble des zéros du mouvement brownien. Montrer que p.s. $\mathcal{Z}$ est fermé, non borné, de mesure de Lebesgue nulle et sans point isolé.

Indication: pour montrer cette dernière propriété, on pourra considérer les temps d'arrêt $d_q = \inf\{t \geq q \,|\, B_t = 0\}$ pour $q \in \mathbb{Q}^+$, montrer que pour tout q, p.s., $d_q < \infty$, et montrer dans un premier temps que ces éléments particuliers de $\mathcal{Z}$ ne sont pas isolés p.s.