Td n° 12 d'Analyse fonctionnelle

EDP Elliptiques

Séance du 22 Mai 2015

Exercice 1. *Inégalité de Poincaré-Wirtinger*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On suppose Ω borné et connexe. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

où $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u$.

Indication : On pourra raisonner par l'absurde.

⋆

Exercice 2. *Problème de Neumann*

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

On dit que u est *solution faible* de (1) si $u \in H^1(\Omega)$ et pour tout $v \in H^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega (\nabla u, \nabla v) + \int uv = \int_\Omega fv.$$

1. Montrer que si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ et $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, alors u est solution faible de (1) si et seulement si u est solution classique de (1).

2. Montrer qu'il existe une unique solution faible de (1) et donner une caractérisation de ce problème en terme de minimisation.

3. On suppose Ω connexe. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

admette une solution faible. Déterminer l'ensemble des solutions dans ce cas. (Indication : On pourra introduire $H^1_K(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \int_\Omega u = 0\}$.)

⋆

Exercice 3. *Problème elliptique avec contrainte intégrale*

Soit Ω un ouvert borné connexe et régulier de $\mathbb{R}^d$. Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière. On note $g = G'$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout x dans $\mathbb{R}$: $|g(x)| \leq C(|x| + 1)$ On note pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ les fonctionnelles définies par :

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2, \quad J(u) = \int_\Omega G(u).$$

On introduit $\mathcal{A}$ le sous-ensemble de $H^1_0(\Omega)$: $\mathcal{A} = \{w \in H^1_0(\Omega) | J(w) = 0\}$.

1. Supposons que $\mathcal{A}$ soit non vide. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ satisfaisant :$I(u) = \min_{w\in\mathcal{A}} I(w)$.

2. Soit u un minimiseur du problème précédent. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \lambda \int_\Omega g(u) v dx.$$

⋆

Exercice 4. *Terme manquant dans le lemme de Fatou*

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p et $f \in L^p$, telles que $f_n \to f$ p.p.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε tel que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad ||a+b|^p - |a|^p| \leq \varepsilon |a|^p + C_\varepsilon |b|^p.$$

2. On considère $g_n^\varepsilon = (||f_n|^p - |f|^p - |f - f_n|^p| - \varepsilon |f - f_n|^p)_+$ où $h_+ = \max(0, h)$. Montrer que $\int g_n^\varepsilon \to 0$ quand $n \to \infty$.

3. En déduire que $\int ||f_n|^p - |f|^p - |f - f_n|^p| \to 0 \quad$ quand $\quad n \to \infty$.

4. Retrouver le lemme de Fatou, et montrer que si $\|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$ et $f_n \to f$ p.p., alors $f_n \to f$ dans L^p.

⋆

Exercice 5. *Problème de Yamabe*

Le problème de Yamabe consiste à se demander, pour une variété compacte de dimension $n \geq 3$ munie d'une métrique g, si il existe une métrique conforme à g, c'est à dire qui s'écrit $g' = \phi g$, de courbure scalaire constante λ. En posant $\phi = u^{\frac{4}{n-2}}$, u doit alors satisfaire l'équation

$$-\Delta u + h(x) u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

On va se placer ici sur un ouvert borné Ω. et on va chercher à minimiser la fonctionnelle

$$I(u) = \int_M |\nabla u|^2 + h u^2,$$

dans l'espace $\mathcal{H}_q = \{u \in H_0^1, \int |u|^q = 1,\}$.

On suppose h régulière telle que $h \geq a > 0$.

1. Montrer que pour $q < 2^* = \frac{2n}{n-2}$, il existe un minimiseur de I dans $\mathcal{H}_q$.

Dans toute la suite, on suppose $q = 2^*$. On note μ le minimum de I sur $\mathcal{H}_q$.

2. Soit u_n une suite minimisante. Montrer qu'il existe $u_0 \in H^1$ telle que $u_n \rightharpoonup u_0$ dans H^1 et L^q, et $u_n \longrightarrow u_0$ dans L^2 (à extraction près).

3. Montrer que $| \int |u_n|^q - |u_0|^q - |u_0 - u_n|^q| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

4. Montrer que $\int |\nabla (u_n - u_0)|^2 \longrightarrow \mu - I(u_0)$ quand $n \longrightarrow \infty$.

5. En déduire que l'on a

$$\left(1 - \int u_0^q\right)^{\frac{2}{q}} \leq C_n \mu \left(1 - \left(\int u_0^q\right)^{\frac{2}{q}}\right),$$

où C_n est la constante de l'injection de Sobolev $H^1 \subset L^q$.

6. En déduire le théorème suivant (du à Trudinger et Aubin) : si $\mu < \frac{1}{C_n}$, alors le problème de minimisation admet une solution.

⋆