Analyse Complexe TD 12 (15/05 – 18/05)

Exercice 1

1) On commence par le point i. Il s'agit de montrer que l'ordre de J en i est exactement 2. Pour ce faire, d'après la forme locale d'une fonction holomorphe, il suffit de montrer que les nombres complexes proches de $J(i) = 1$ ont exactement deux préimages proches de i. À partir de ceci, on voit que l'ordre de J est au moins aussi grand que le cardinal du stabilisateur de i (qui est $\{I, S\}$. Si on note P le domaine habituel dans $\mathbb{H}$, on constate que $P \cup S.P$ est un voisinage de i. En particulier, si z est suffisemment proche de i, les éléments de l'orbite de z sous $PSL_2(\mathbb{Z})$ qui sont proches de i sont z et $S.z$. Autrement dit l'ordre de J est 2, le cardinal du stabilisateur.

2) Dans le cas de $-j^2$, la situation peut sembler moins claire. En effet, il y a 6 copies du domaine fondamental habituel qui se touchent en ce point. On pourrait avoir envie de dire que l'ordre sera donc 6, mais il n'en est rien.

2-1) Première raison. Si D est un petit disque autour de $-j^2$, les valeurs que J prend sur $D \cap S.P$ sont toutes distinctes de celles qu'elle prend sur $D \cap P$ (car $S^{-1}(D \cap S.P) \cap D \cap P = \emptyset$). La fonction J est donc injective sur un «secteur d'angle» de taille $2\pi/3$. Comme on sait déjà que J est d'ordre au moins 3, on peut conclure.

2-2) La première version est un peu olé-olé au niveau de la rédaction... Voila donc la deuxième version. On va encore montrer que l'ordre est le cardinal du stabilisateur. On sait que $\inf\{|z - (-j^2)|,\ J(z) = 0,\ z \neq -j^2\} > \epsilon > 0$ pour ϵ assez petit. L'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ est propre, donc il y a nombre fini de $\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z})$ tels que $\gamma(D(-j^2, \epsilon)) \cap D(-j^2, \epsilon) \neq \emptyset$. Leur dérivée est donc uniformément bornée sur $D(-j^2, \epsilon)$. Ainsi, pour $\epsilon' > 0$ assez petit, ceux qui satisfont aussi $\gamma(D(-j^2, \epsilon')) \cap D(-j^2, \epsilon') \neq \emptyset$, vérifient $|\gamma(-j^2) + j^2| < \epsilon$, et $\gamma \in \mathrm{stab}(-j^2)$.

Ceci montre plus généralement que si Γ un groupe discret agit proprement sur un espace metrique X, si $x_0 \in X$, il y a des $\epsilon > \epsilon' > 0$ tels que si $d(x, x_0) < \epsilon'$, $\#\Gamma.x \cap B(x_0, \epsilon) = \#\mathrm{stab}(x_0)$.

Si on paraphrase, on a ainsi montré que le nombre de préimages d'un nombre proche de $J(-j^2) = 0$ (i.e les éléments d'une orbite proche de celle de $-j^2$ sous $PSL_2(\mathbb{Z})$), proches de $-j^2$, est égal au cardinal du stabilisateur de $-j^2$, à savoir 3.

J est donc d'ordre 3 en $-j^2$.

Remarque : Formulé ainsi, on voit que cela dépasse un peu le cadre de la seule fonction J...

Exercice 2

On notera $\vartheta \in \Theta$.

1. Pour f une fonction thêta triviale, $(f'/f)'$ est constante, donc elliptique. De plus, si f est une fonction thêta qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, on peut écrire $f = e^g$, et la définition implique g'' soit elliptique. Mais g doit être holomorphe, donc g'' aussi, et constante.
2. On notera $\vartheta \in \Theta'$. On veut montrer que $\Theta = \Theta'$.
   On se donne $w \in \Lambda_\tau$, et on considère $g_w = \vartheta(z + w)/\vartheta(z)$. On trouve que $(g'/g)' = 0$. Autrement dit g'/g est constante. Ceci implique que g ne s'annule pas, et $g = e^P$ avec P un polynôme.
   Réciproquement, si ϑ vérifie une telle famille d'égalité, on trouve directement que $(\vartheta'/\vartheta)'(z + w) = (\vartheta'/\vartheta)'(z)$ pour $w \in \Lambda_\tau$.
3. D'après la question précédente, les zéros de ϑ sont invariants par le réseau, et leurs ordres aussi. Ainsi, si x est un zéro de ϑ, $[x] \in \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ ne contient que des zéros de ϑ, qui sont tous du même ordre que x. Le nombre de telles classes distinctes est fini d'après les zéros isolés. On peut donc en faire la somme pondérée par les ordres !
   Pour calculer cette chose, il suffit de prendre une maille du réseau, et intégrer le long de son bord $z\vartheta'/\vartheta$. On commence par supposer qu'il n'y a pas de zéros sur les bords de la maille. On concluera en prenant une limite.

On choisit donc la maille de sommets $w, w+w_1, w+w_1+w_2, w+w_2$ dans l'ordre. Comme dans la preuve du cours, on appaire les côtés opposés. On utilise $\vartheta'(z+w')/\vartheta(z+w') = \vartheta'(z)/\vartheta(z)+2i\pi a_{w'}$. La première réduction est de voir que le résultat du calcul ne dépend pas de w modulo Λ_τ. En effet

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C (z+w)\frac{\vartheta'}{\vartheta}(z+w) = \frac{1}{2i\pi}\int_C z\frac{\vartheta'}{\vartheta}(z) + w\frac{\vartheta'}{\vartheta}(z) + 2i\pi a_w w + z2i\pi a_w$$

Dans le membre de droite, le 2è terme compte le nombre de zéros de ϑ dans la maille (un entier) fois w qui est un élément de Λ_τ. Les 3è et 4è termes ne contribuent pas à l'intégrale.
On peut donc maintenant calculer

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_C z\frac{\vartheta'}{\vartheta}(z) &= \int_0^{w_1} + \int_{w_1}^{w_1+w_2} + \int_{w_1+w_2}^{w_2} + \int_{w_2}^{0} \\
&= -\frac{1}{2i\pi}\int_0^{w_1} w_2\frac{\vartheta'}{\vartheta}(z) + (z+w_2)2i\pi a_{w_2} \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi}\int_0^{w_2} w_1\frac{\vartheta'}{\vartheta}(z) + (z+w_1)2i\pi a_{w_1} \\
&= -\left\{w_2 b_{w_1} + a_{w_2}\left(\frac{w_1^2}{2} + w_2 w_1\right)\right\} \\
&\quad + \left\{w_1 b_{w_2} + a_{w_1}\left(\frac{w_2^2}{2} + w_2 w_1\right)\right\} \bmod(\Lambda_\tau) \\
&= w_1 b_{w_2} - w_2 b_{w_1} + w_2 w_1 (a_{w_1} - a_{w_2}) + a_{w_1}\frac{w_2^2}{2} - a_{w_2}\frac{w_1^2}{2}.
\end{aligned}$$

4. Déjà cette somme est absolument convergente car la partie imaginaire de τ est strictement positive. Fixons a, b réels, et notons f la fonction. Maintenant, on va considérer des translations par des éléments de Λ_τ. Comme c'est un groupe, il suffit de considérer les translations par 1 et par τ. On trouve que $f(z+1) = e^{2i\pi a} f(z)$.
Ensuite, on calcule

$$\begin{aligned}
f(z+\tau) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \exp\left\{i\pi(\tau(m+a)^2 + 2(m+a)(z+\tau+b))\right\}, \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \exp\left\{i\pi(\tau[(m+a)^2 + 2(m+a)] + 2(m+a)(z+b))\right\},, \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \exp\left\{i\pi(\tau[(m+1+a)^2 - 1] + 2(m+a)(z+b))\right\} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-i\pi\tau - 2i\pi(z+b)} \exp\left\{i\pi(\tau(m+1+a)^2 + 2(m+1+a)(z+b))\right\}, \\
&= e^{2i\pi(-z-b-\tau/2)} f(z).
\end{aligned}$$

$$div f = b_\tau - \tau b_1 + \tau(a_1 - a_\tau) + a_1\frac{\tau^2}{2} - a_\tau\frac{1}{2} = -b - \tau/2 - \tau a + \tau(-1) + \frac{1}{2} = \frac{\tau+1}{2} - b - \tau a.$$

Au passage, on remarque que l'on peut ainsi réaliser n'importe quel élément de $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ comme diviseur d'une fonction thêta.

5. Étant donné que les zéros de σ sont exactement les points du réseau, et qu'ils sont tous d'ordre 1, on trouve que $div(\sigma) = 0$.

6. *
   À partir de la formule pour les éléments de Θ', on trouve directement que si ϑ_1 et ϑ_2 sont deux fonctions Θ' du même type, alors ϑ_1/ϑ_2 est elliptique.
   Maintenant, soit f est une fonction elliptique. On note $x_1, \ldots, x_n$ un système de représentants des zéros de f modulo Λ_τ, et $y_1, \ldots, y_n$ un système de représentants des pôles, comptés avec multiplicité. On considère les fonctions $G_1 = \prod_i \sigma(z - x_i)$ et $G_2 = \prod_i \sigma(z - y_i)$. Le quotient $f/(G_1/G_2)$ est une fonction holomorphe sans zéros. C'est donc une fonction thêta triviale. On peut l'écrire $e^{-(ax^2+bx+c)}$, puis
$$f(x) = \frac{G_1(x)e^{ax^2+bx+c}}{G_2(x)}.$$

Exercice 3 Le pendule

1. C'est le PFD ! Le mouvement du pendule étant conservatif, la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique est constante. On trouve donc pour un pendule de longueur 1, $\dot{\theta}^2 + (1 - \cos\theta) = cste$. De plus, la constante est positive.
2. On trouve que $d\theta/\sqrt{E + \cos\theta - 1} = dt$. La formule voulue est la forme intégrée de cette égalité.
3. On fait le changement de variable $u = \cos\theta$. Alors $du = \sin\theta d\theta = \sqrt{1-u^2}d\theta$. On trouve que le polynôme au dénominateur est donc $-u^3 - u^2(E-1) + u + E - 1$.
4. Il faut commencer par faire un changement de variable $v = -u - (E-1)/3$, pour écrire le polynôme dans le dénominateur comme $v^3 + av + b$. Le calcul donne
$$\begin{aligned}(v + (E-1)/3)^3 + &(1-E)(v + (E-1)/3)^2 - v - (E-1)/3 + E - 1 \\ &= v^3 + v(E - 1 - 2/3(E-1)^2 - 1) \\ &+ (E-1)^3/27 - (E-1)^3/9 + 2/3(E-1).\end{aligned}$$
   Comme on a une factorisation du polynôme, on sait qu'il a les racines $-1, 1, 1-E$. Elles sont simples tant que $E \neq 2$ (on sait que $E \geq 0$). Le cas $E = 2$ correspond à l'unique trajectoire non-périodique du pendule.
5. *
   Dans le repère w_1, w_2, il faut que l'axe réel soit de pente rationnelle, pour que le mouvement puisse être périodique. Cela veut dire que l'on peut changer de base pour Λ_E de sorte à ce que $w_1 \in \mathbb{R}$.
   Quand $E > 2$, la dérivée $\cos\theta$ s'annule aussi en deux points, qui sont $\theta = 0(\pi)$. On trouve donc aussi la même constante.
   il faut conclure que le réseau est rectangulaire. Pour ce faire, on observe que $\cos\theta$ est réel. Il faut donc que sur la droite $w_2/2 + \mathbb{R}$, $\wp$ soit réelle. Cela implique que le réseau est invariant par la conjugaison.

Exercice 4 Dans cet exercice, on considère Γ le noyau de la réduction modulo 2 des éléments de $PSL_2(\mathbb{Z})$, c'est à dire du morphisme $PSL_2(\mathbb{Z}) \to PSL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

1. *
   Le cardinal de $PSL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est 6, et on peut trouver 6 éléments de $PSL_2(\mathbb{Z})$ qui sont projetés exactement sur ces 6 éléments. Il s'agit de I, T^{-1}, S, ST^{-1}, TS et $T^{-1}ST^{-1}$, avec les notations du cours. On prend comme domaine fondamental pour l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ le domaine P' donné par $\mathrm{Re} z \in [0,1]$, $|z| > 1$ et $|z+1| > 1$. Alors la région Q est la réunion des images de P' par les 6 éléments listés plus hauts.
   Cela suffit pour que ce soit un domaine fondamental pour l'action de Γ.

2. Il suffit d'envoyer $\mathring{Q}_0$ dans $\mathbb{H}$ grâce au th. de Riemann. D'après le lemme de régularité au bord, tous les points du bord de Q_0 sont simples, donc le résultat est une fonction qui se prolonge par continuité. Ensuite, il suffit de composer par un élément de $PSL_2(\mathbb{R})$, qui agit transitivement sur les triplets de points ordonnés du bord de $\mathbb{H}$.
3. Il suffit d'utiliser le lemme de reflexion de Schwartz. On obtient d'ailleurs que l'image de la fonction obtenue est $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
4. On peut définir une fonction invariante par le groupe formellement. On utilise ensuite le principe de réflexion de Schwartz pour montrer que le résultat est bien holomorphe, et d'image $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Exercice 5 *

On écrit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+z)^{2k}} = -\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n+z}\right)^{(2k-1)} \frac{1}{2k-1!}$$

On reconnait le développement de la cotangente. Mais par ailleurs, si $u = e^{2iz}$, on trouve que $\cot z = i^{-1}(1+2\sum_{k\geq 1} u^k)$. La dérivée d'ordre $2k-1$ de la cotangente est donc $-2i\sum_{m\geq 1}(2im)^{2k-1}u^m$. On trouve donc

$$G_k(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^{2k}} + \frac{1}{2k-1!} \sum_{m\in\mathbb{Z}^*} \pi^{2k} 2i \sum_{l\geq 1} (2il)^{2k-1} e^{2il\pi m\tau}$$

en écrivant $q = e^{2i\pi\tau}$, on trouve donc

$$G_k(\tau) = 2\zeta(2k) + \frac{1}{2k-1!} \sum_{m\in\mathbb{Z}^*} \sum_{l\geq 1} q^{ml} (2i\pi)^{2k} l^{2k-1}$$

En utilisant les formules du cours $\zeta(2k) = -1/2(2i\pi)^{2k} b_{2k}/(2k!)$, on peut conclure.

Exercice 6 retour sur les fonctions ϑ.

1. On trouve que

$$\Theta(x, t) = \vartheta_{it} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{x}{2\pi}\right).$$

2. Comme on peut constater que $\Theta(x, 0) = \delta(x)$, on a construit une fonction de Green pour l'équation. Si $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, on pose

$$f(x, t) := \int f(a)\Theta(x - a, t)da.$$

   C'est la solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale f.