TD12 : Algèbre et géométrie, Nullstellensatz, lemme de Nakayama

Diego Izquierdo

La question 1 de l'exercice 2, les questions 1 et 3 de l'exercice 4 et l'exercice 5 sont à préparer avant la séance de TD. Nous traiterons les exercices dans l'ordre suivant : question 1 de 2, questions 1 et 3 de 4, 5, 7, 0.

Exercice 0 : TD11
Faire l'exercice 12 du TD11.

Exercice 1 : Coniques
Soit $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ un polynôme irréductible de degré 2. Montrer que $\mathbb{C}[X,Y]/(P)$ est isomorphe soit à $\mathbb{C}[T]$ soit à $\mathbb{C}[T,T^{-1}]$. En fonction du polynôme P, dire dans quelle situation on est. Interpréter géométriquement. Le résultat subsiste-t'il si l'on remplace $\mathbb{C}$ par un autre corps ?

Exercice 2 (à préparer - question 1) : Paramétrisations de points rationnels
Soit K un corps de caractéristique nulle. Trouver tous les couples $(x,y) \in K^2$ vérifiant chacune des équations suivantes :

1. $5x^2 + 3y^2 = 2$;
2. $(x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$.

Exercice 3 : Morphismes entre variétés et lemme de Yoneda
Soit K un corps. Soient $f_1, ... f_r \in K[X_1, ..., X_n]$ et $g_1, ..., g_s \in K[X_1, ..., X_m]$. On note $B = K[X_1, ..., X_n]/(f_1, ..., f_r)$, $C = K[X_1, ..., X_m]/(g_1, ..., g_s)$, V_B la variété d'équations $f_1 = ... = f_r = 0$ et V_C la variété d'équations $g_1 = ... = g_s = 0$. Montrer que se donner un morphisme $f : B \to C$ est équivalent à se donner un morphisme $f_X^* : V_C(X) \to V_B(X)$ pour chaque K-algèbre X de sorte que, si l'on se donne un morphisme $X \to Y$ de K-algèbres, alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} V_C(X) \arrow[r] \arrow[d] & V_B(X) \arrow[d] \\ V_C(Y) \arrow[r] & V_B(Y). \end{tikzcd}$$

Cette donnée est ce que l'on appelle un morphisme $f^* : V_C \to V_B$.

Exercice 4 (à préparer - questions 1 et 3) : Normalisation et singularités

1. (a) Montrer que la clôture intégrale de $\mathbb{C}[X,Y]/(Y^3-X^5)$ est isomorphe à $\mathbb{C}[T]$.

(b) En notant V la courbe d'équation $y^3 = x^5$ dans $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, expliquer pourquoi cela induit un morphisme $f^* : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to V$. On dit qu'on a désingularisé V.

(c) Vérifier que $f^*_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to V(\mathbb{C})$ est une bijection, mais qu'il n'existe pas de morphisme $g^* : V \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ tel que $g^*_{\mathbb{C}}$ est la fonction réciproque de $f^*_{\mathbb{C}}$. Cela signifie en particulier que f^* n'est pas un isomorphisme entre V et $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$.

(d) Montrer par contre que $\mathbb{C}[X,Y]/(Y^3-X^5)[X^{-1}]$ et $\mathbb{C}[T,T^{-1}]$ sont isomorphes. Cela signifie que l'ouvert de V défini par $x \neq 0$ est isomorphe à l'ouvert de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ défini par $t \neq 0$. On dit que V et $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ sont birationnellement équivalents.

2. Quelle est la clôture intégrale de $\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2-X^3-X^2)$? Interpréter géométriquement.

3. Même question pour $\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2-X^4-X^5)$.

4. Même question pour $\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2+2iXY-X^3+X-1)$.

Exercice 5 (à préparer) : Une question de polynômes

Soient P, Q et R des polynômes dans $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$, avec P irréductible. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, si $P(x)=0$ et $Q(x) \neq 0$, alors $R(x)=0$. Montrer que $P|Q$ ou $P|R$.

Exercice 6 : Produit tensoriel d'algèbres réduites

Soit k un corps algébriquement clos. Soient A et B deux k-algèbres de type fini. Montrer que, si A et B sont réduites (resp. intègres), alors $A \otimes_k B$ est réduite (resp. intègre).

Exercice 7 : Vers la théorie des modèles

1. Soit $V \hookrightarrow \mathbb{A}^m_{\mathbb{Q}}$ une variété affine. Montrer que $V(\mathbb{C}) = \emptyset$ si, et seulement si, $V(\overline{\mathbb{Q}}) = \emptyset$.

2. Soient $f_1,...,f_n \in \mathbb{Z}[X_1,....,X_m]$. Montrer que le système d'équations $f_1(x) = ... = f_n(x) = 0$ a des solutions dans $\mathbb{C}^m$ si, et seulement si, il a des solutions dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour presque tout premier p.

Exercice 8 : Fonction zêta du cercle

Soit $A = \mathbb{Z}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$. Exhiber des fractions rationnelles $F_p \in \mathbb{Q}[X]$

telles que : $\zeta(A,s) = \prod_{p \text{ premier}} F_p(p^{-s})$. En déduire que :

$$\zeta(A,s) = \zeta(s-1)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^s}\right).$$

Exercice 9 : Autres fonctions zêta
Calculer les fonctions zêta de :

$$A = \mathbb{Z}[X,Y]/(XY-1),\ B = \mathbb{Z}[X_1,X_2,X_3,X_4,Y]/((X_1X_4 - X_2X_3)Y-1),$$
$$C = \mathbb{Z}[X]/(X^{21}-1),\ D = \mathbb{Z}[X,Y]/(X^2-Y^3),$$
$$E = \mathbb{Z}[X,Y]/(Y^2 - X^2(X+1)).$$

Exercice 10 : Lemme de Nakayama
Soient A un anneau commutatif unitaire. Soient I un idéal de A contenu dans le radical de Jacobson de A, et M un A-module de type fini.

1. Montrer que si on a $IM = M$, alors M est le module nul.

Le cas le plus courant d'utilisation est le cas local. Supposons donc de plus A local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit N un sous-A-module de M.

2. Montrer que si on a $M = N + \mathfrak{m}M$, alors N est égal à M.

Exercice 11 : Application du lemme de Nakayama
Soient A un anneau commutatif local et M un A-module de type fini.

1. En utilisant le lemme de Nakayama, montrer que les familles génératrices minimales de M ont même cardinal.

2. Rappeler un contre-exemple d'une telle affirmation pour un $\mathbb{Z}$-module.

Exercice 12 : Semi-continuité de la dimension
Soient A un anneau commutatif unitaire et M un A-module de type fini. Soient $X = \operatorname{Spec} A$ et

$$d: \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{N} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \dim_{k(\mathfrak{p})} M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}} \end{array}.$$

Soient $\mathfrak{p} \in X$ et $n = d(\mathfrak{p})$. Soit $\alpha : k(\mathfrak{p})^n \to M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}$ un isomorphisme de $k(\mathfrak{p})$-espaces vectoriels.
On commence par établir l'existence du diagramme commutatif suivant (pour un certain $f \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$).

$$\begin{tikzcd}
A[f^{-1}]^n \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\gamma"] & A_{\mathfrak{p}}^n \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\beta"] & k(\mathfrak{p})^n \arrow[d, "\alpha"] \\
M[f^{-1}] \arrow[r] & M_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}
\end{tikzcd}$$

1. Montrer que α se relève en une surjection $\beta : A_{\mathfrak{p}}^n \to M_{\mathfrak{p}}$ de $A_{\mathfrak{p}}$-modules.
2. Montrer qu'il existe $f \notin \mathfrak{p}$ tel que β se relève en une surjection $\gamma : A[f^{-1}]^n \to M[f^{-1}]$ de $A[f^{-1}]$-modules.
3. En déduire que d est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire que $\{\mathfrak{p} \in X \mid d(\mathfrak{p}) \geq n\}$ est fermé pour tout $n \geq 0$.

Exercice 13 : Platitude
Soit A un anneau. Considérons une suite exacte de A-modules :

$$M \to N \to P \to 0. \tag{$\star$}$$

1. (a) Montrer que, pour tout A-module Q, la suite $(\star)$ induit une suite exacte :

$$M \otimes_A Q \to N \otimes_A Q \to P \otimes_A Q \to 0.$$

(b) Montrer que, même si le morphisme $M \to N$ est injectif, il est possible que le morphisme $M \otimes_A Q \to N \otimes_A Q$ ne soit pas injectif.

On dit qu'un A-module Q est plat si, et seulement si, pour tout morphisme injectif de A-modules $M \to N$, le morphisme induit $M \otimes_A Q \to N \otimes_A Q$ est aussi injectif.

2. (a) Vérifier qu'un A-module projectif est plat. En particulier, montrer que, si A est un corps, alors tout A-module est plat.
(b) Un A-module plat est-il toujours projectif ?
3. (a) Soit Q un A-module. Montrer que Q est plat si, et seulement si, pour tout idéal I de A, le morphisme canonique $Q \otimes_A I \to Q$ est injectif.
(b) Supposons que A soit un anneau principal. Montrer qu'un A-module est plat si, et seulement si, il est sans torsion.
4. (a) Soit S une partie multiplicative de A. Montrer que le A-module $S^{-1}A$ est plat.
(b) Soit Q un A-module. Montrer que Q est plat si, et seulement si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, le $A_{\mathfrak{m}}$-module $Q_{\mathfrak{m}}$ est plat.
5. (a) Soit $0 \to M \to N \to P \to 0$ une suite exacte de A-modules. On suppose que P est plat. Montrer que, pour tout A-module Q, la suite $0 \to M \otimes_A Q \to N \otimes_A Q \to P \otimes_A Q \to 0$ est exacte.
(b) Supposons que A soit un anneau local. Soit Q un A-module plat de type fini. Montrer que Q est libre. On pourra utiliser le lemme de Nakayama.

Bonnes vacances et bonnes fêtes !