Td n° 12 d'EDP

Estimations de produits

Séance du 9 Janvier 2014

Rappels *Théorie de Littlewood Paley*

- Inégalités de Bernstein : Soit $p \geq 1$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ telle que $supp(\hat{f}) \subset B(0, \lambda)$. Soit $q \geq p$. On a
$$\|\partial^\alpha f\|_{L^q} \leq C_\alpha \lambda^{d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+|\alpha|}\|f\|_{L^p}.$$
Soit $0 < r < 1$. On suppose maintenant que le support de $\hat{f}$ est inclus dans une couronne de petit rayon $r\lambda$ et de grand rayon λ. On a
$$\lambda^k \|f\|_{L^p} \leq C_{r,k} \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}.$$
- Décomposition de Littlewood Paley : On introduit χ et ϕ radiales telles que $\chi \in \mathcal{D}(B(0, 4/3))$ et $\phi \in \mathcal{D}(C)$ où C est la couronne de petit rayon $3/4$ et de grand rayon $8/3$ et
$$\chi(\xi) + \sum_{j\geq 0} \phi(2^{-q}\xi) = 1.$$
On note $\Delta_q u = \mathcal{F}^{-1}(\phi(2^{-q}\xi)\hat{u}(\xi))$, $\Delta_{-1}u = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\hat{u}(\xi))$ et $S_q u = \sum_{-1}^{q} \Delta_j u$.

⋆

Exercice 1. *Estimation de produit H^s*

1. Rappeler brièvement pourquoi
$$\|u\|_{H^s}^2 \sim \sum 2^{2js}\|\Delta_j u\|_{L^2}^2.$$

On se donne maintenant $s > 0$ et $u, v \in L^\infty \cap H^s$.

2. Montrer que
$$\|\Delta_k\left((f - S_{k-3}f)g\right)\|_{L^2}^2 \leq C\|g\|_{L^\infty}^2 \sum_{k' \geq k-3} \|\Delta_{k'} f\|_{L^2}^2.$$

3. En déduire que
$$\sum_{k\geq 2} 2^{2ks}\|\Delta_k\left((f - S_{k-3}f)g\right)\|_{L^2}^2 \leq C\|g\|_{L^\infty}^2\|f\|_{H^s}^2.$$

4. Montrer que
$$\Delta_k(gS_{k-3}f) = \Delta_k \sum_{k-2\leq j\leq k+2} \Delta_j g S_{k-3} f.$$

5. En déduire que
$$\sum_{k\geq 2} 2^{2ks}\|\Delta_k\left((S_{k-3}f)g\right)\|_{L^2}^2 \leq C\|f\|_{L^\infty}^2\|g\|_{H^s}^2.$$

6. En déduire une estimation de fg dans H^s.

⋆

Exercice 2. *Inégalité de Wentee*

Dans cet exercice, on utilise la décomposition de Littlewood Paley pour les basses fréquences aussi. Ainsi $u = \sum_{-\infty<q<\infty} \Delta_q u$. On introduit l'espace de Besov homogène $\dot{B}^s_{2,1}(\mathbb{R}^2)$ (il est complet pour $s \leq 1$) muni de la norme

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{2,1}} = \sum_{-\infty<q<\infty} 2^{js}\|\Delta_q u\|_{L^2}.$$

1. Montrer que $B^1_{2,1} \subset L^\infty$.

Soit $f, g \in H^1$. On veut étudier l'équation $\Delta u = df \wedge dg$.

2. Montrer que $\Delta : \dot{B}^s_{2,1} \to \dot{B}^{s-2}_{2,1}$ est inversible d'inverse continu.

On va montrer que $df \wedge dg \in \dot{B}^{-1}_{2,1}$. Pour cela on introduit la décomposition $df \wedge dg = A + B + R$ avec

$$A = \sum dS_{k-3}f \wedge \Delta_k g, \quad B = \sum \Delta_k f \wedge S_{k-3}g, \quad R = \sum_{|k-k'|\leq 2} \Delta_k f \wedge \Delta_{k'} g.$$

3. A l'aide des identités de Bernstein, montrer que

$$2^{-k}\|dS_{k-3}f \wedge d\Delta_k g\|_{L^2} \leq C \sum_{l\leq k-3} 2^{l-k}\|d\Delta_l f\|_{L^2}\|d\Delta_k g\|_{L^2}.$$

4. Montrer l'inégalité de Young discrète

$$\sum_{k,l} \phi(k-l)\psi(l)\rho(k) \leq \|\phi\|_{l^1}\|\psi\|_{l^2}\|\rho\|_{l^2}.$$

5. En déduire

$$\|A\|_{\dot{B}^{-1}_{2,1}} \leq C\|df\|_{L^2}\|dg\|_{L^2}.$$

6. A l'aide des identités de Bernstein, montrer que

$$\|\Delta_j \left(d\Delta_k f \wedge d\Delta_{k'} g\right)\|_{L^2} \leq C2^{2j-k}\|d\Delta_k f\|_{L^2}\|d\Delta_{k'} g\|_{L^2}.$$

7. En déduire

$$\|R\|_{\dot{B}^{-1}_{2,1}} \leq C\|df\|_{L^2}\|dg\|_{L^2}.$$

8. En déduire que $u \in L^\infty$ avec

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|df\|_{L^2}\|dg\|_{L^2}$$

puis que u est continue.

⋆