Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$13 Corrigé

Exercice 1

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (avec régularité par rapport aux conditions initiales), puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, le flot est uniquement défini et la fonction $\psi : (t,x) \to \phi^t(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
On a $\partial_t \psi(t,x) = f(t, \psi(t,x))$.
Comme f est $\mathcal{C}^1$ et ψ aussi, $\partial_t \psi(t,x)$ est $\mathcal{C}^1$ et vérifie :

$$d_x \partial_t \psi(t,x) = d_x f(t, \psi(t,x)) \circ d_x \psi(t,x)$$

Donc $d_x \psi$ est différentiable par rapport à t et sa différentielle vérifie :

$$\partial_t d_x \psi(t,x) = d_x f(t, \psi(t,x)) \circ d_x \psi(t,x)$$

On a vu dans un TD antérieur que le déterminant était une application différentiable, de différentielle $d \det(M).H = \det(M) \mathrm{Tr}(HM^{-1})$ si M est inversible.
Notons $g(t,x) = \det(d_x \psi(t,x))$. En tout point où g n'est pas nulle :

$$\begin{aligned}
\partial_t g(t,x) &= g(t,x) \mathrm{Tr}(\partial_t d_x \psi(t,x)(d_x \psi(t,x))^{-1}) \\
&= g(t,x) \mathrm{Tr}(d_x f(t, \psi(t,x)) d_x \psi(t,x)(d_x \psi(t,x))^{-1}) \\
&= g(t,x) \mathrm{Tr}(d_x f(t, \psi(t,x))) \\
&= g(t,x) \mathrm{div}\, f(t, \psi(t,x)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme $g(0,x) = 1$ pour tout x, cela implique que g est constante égale à 1.
Donc $\det(d\phi^t(x)) = g(t,x) = 1$ pour tous t, x.

Exercice 2

1. Considérons l'équation (E_0) suivante :

$$X'(t) = A(t, X(t))$$

Puisque A est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz à (E_0) : pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $t_0 \in \mathbb{R}$, (E_0) a une unique solution qui vérifie $X(t_0) = x_0$. Comme A est bornée, cette solution est nécessairement définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (c'est une conséquence du théorème de sortie des compacts).
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note X_x la solution de (E_0) qui vaut x en $t = 0$.

Supposons que f est une solution de l'équation qui nous intéresse et considérons, pour un x quelconque, la fonction $g : t \to f(t, X_x(t))$.
Alors $g'(t) = \partial_t f(t, X_x(t)) + \langle X_x'(t), \nabla_x f(t, X_x(t))\rangle = \partial_t f(t, X_x(t)) + \langle A(t, X(t)), \nabla_x f(t, X_x(t))\rangle = 0$. Donc g est constante et $g(t) = f_0(x)$ pour tout t.
D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz avec régularité par rapport aux conditions initiales, $(t, x) \to \phi_t(x)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout t, ϕ_t est une bijection et sa différentielle par rapport à x est inversible (en effet, pour tout h, $d_x\phi_t(x).h$ est solution d'une équation différentielle dont 0 est solution stationnaire ; comme $d_x\phi_t(x).h \neq 0$ pour $t = 0$, cette fonction ne s'annule pour aucun t).
Donc $(t, x) \to (t, \phi_t(x))$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ vers lui-même. Sa réciproque $(t, x) \to (t, \phi_t^{-1}(x))$ est donc également de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui implique que $(t, x) \to \phi_t^{-1}(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Si f est une solution de l'équation aux dérivées partielles, on doit avoir $f(t, x) = f(t, \phi_t(\phi_t^{-1}(x))) = f_0(\phi_t^{-1}(x))$.
Réciproquement, la fonction $f : (t, x) \to f_0(\phi_t^{-1}(x))$ est solution de l'équation aux dérivées partielles. En effet, avec cette définition, on a bien $f(0, x) = f_0(x)$. De plus, $g : t \to f(t, \phi_t(x))$ est constante (de valeur $f_0(x)$) pour tout x, ce qui implique :

$$\partial_t g = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \partial_t f(t, \phi_t(x)) + \langle A(t, \phi_t(x)), \nabla_x f(t, \phi_t(x))\rangle = 0$$

Puisque ϕ_t est une bijection pour tout t, la fonction f vérifie :

$$\forall t, \forall x \quad \partial_t f(t, x) + \langle A(t, x), \nabla_x f(t, x)\rangle = 0$$

2. Cette équation s'appelle équation de transport car la solution f est égale à f_0, « transportée » par le flot associé à l'équation (E_0).

Exercice 3

1. On considère une équation de la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X, \lambda) \\ X(0) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

où $X = (x, y)$ et $F(x, y, \lambda) = (\lambda x - x e^{x^2+y^2}, \lambda y - y e^{x^2+y^2})$.
La fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations avec paramètre, ce système admet une unique solution maximale $X_\lambda(t)$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en (t, λ).
2. Une solution est stationnaire si et seulement si $\dot{x} = \dot{y} = 0$ sur tout l'ensemble de définition. En particulier, en 0, il faut qu'on ait :

$$0 = \lambda x_0 - x_0 e^{x_0^2+y_0^2}$$
$$0 = \lambda y_0 - y_0 e^{x_0^2+y_0^2}$$

On a donc $x_0 = y_0 = 0$ ou $\lambda = e^{x_0^2+y_0^2}$, c'est-à-dire $x_0 = y_0 = 0$ ou $x_0^2 + y_0^2 = \ln \lambda$.

Dans chacun de ces deux cas, la fonction $t \to (x_0, y_0)$ est solution de l'équation différentielle avec la condition initiale voulue. Comme la solution de l'équation différentielle est unique, c'est l'unique solution et elle est bien stationnaire.

3. Considérons une solution (x, y) qui n'est pas stationnaire. Alors il n'existe pas t tel que $x(t) = y(t) = 0$ (sinon (x, y) est la solution nulle). Donc, pour tout t, il existe $r(t) \in \mathbb{R}_+^*, \theta(t) \in \mathbb{R}$ tels que $(x(t), y(t)) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))$; $r(t)$ est unique et $\theta(t)$ est unique modulo 2π. Comme $(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, r est aussi $\mathcal{C}^\infty$ et on peut choisir θ de sorte que ce soit également une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Alors r et θ vérifient l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned}\dot{r}\cos\theta - \dot{\theta}r\sin\theta &= \lambda r\cos\theta - r\cos\theta e^{r^2}\\ \dot{r}\sin\theta + \dot{\theta}r\cos\theta &= \lambda r\sin\theta - r\sin\theta e^{r^2}\end{aligned}$$

En multipliant la première équation par $\cos\theta$, la deuxième par $\sin\theta$ puis en additionnant les deux, on obtient :

$$\dot{r} = \lambda r - re^{r^2}$$

En remplaçant $\dot{r}$ par $\lambda r - re^{r^2}$ dans le couple d'équations précédent, on obtient :

$$\dot{\theta}r\sin\theta = \dot{\theta}r\cos\theta = 0$$

et comme r ne s'annule pas, on a $\dot{\theta} = 0$.

Ainsi, toute solution non-stationnaire de l'équation différentielle considérée est à images dans la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0, 0)$ et (x_0, y_0). Son module $r(t)$ satisfait l'équation :

$$\dot{r} = \lambda r - re^{r^2}$$

4. Soit $(x(t), y(t))$ la solution maximale de l'équation pour des conditions initiales (x_0, y_0) telles que $x_0^2 + y_0^2 < \ln\lambda$. D'après ce qu'on a vu à la deuxième question, on ne peut pas avoir $x^2(t) + y^2(t) = \ln\lambda$ pour un certain t, sinon (x, y) serait stationnaire.

On a donc nécessairement $x^2(t) + y^2(t) < \ln\lambda$ pour tout t, ce qui implique $\dot{r} > 0$ sur l'intervalle de définition de la solution. Le module de la solution est donc bien strictement croissant.

De plus, le module de la solution reste dans le segment $[0; \sqrt{\ln\lambda}]$. La solution est donc bornée. Par le théorème de sortie des compacts, elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5. De même qu'à la question précédente, le module r de la solution maximale est strictement décroissant. La solution maximale est donc bornée sur $I_{(x_0,y_0)} \cap \mathbb{R}^+$. D'après le théorème de sortie des compacts, son intervalle de définition n'est pas majoré.

Montrons maintenant que l'intervalle de définition est minoré.

Soit $c > 0$ tel que $r^2(0) = \ln\lambda + c$. Puisque r est décroissante, $r^2(t) \geq \ln\lambda + c$ pour tout $t \leq 0$. Donc :

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) &\leq e^{r^2(t)-c}r(t) - r(t)e^{r^2(t)}\\ &= -e^{r^2(t)}r(t)(1 - e^{-c})\\ &\leq -e^{r^2(t)}r(0)(1 - e^{-c})\\ &\leq -r^2(t)r(0)(1 - e^{-c})\end{aligned}$$

Donc, si on pose $C = r(0)(1 - e^{-c})$, on a $\dot{r}(t) \leq -Cr^2(t)$ pour tout $t \leq 0$.
Cela implique $(1/r)'(t) \geq C$, donc, pour tout $t \leq 0$:

$$\frac{1}{r(t)} \leq \frac{1}{r(0)} - Ct$$

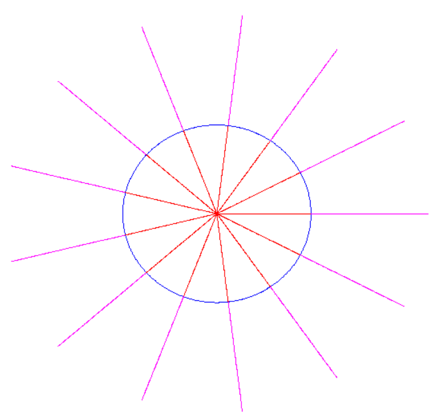
Comme r est toujours positif, $r(t)$ ne peut pas être définie sur $\mathbb{R}$. Son intervalle de définition est minoré.

6. Si la solution est stationnaire, r est constante en 0 ou $\sqrt{\ln \lambda}$. En particulier, on a convergence vers ces valeurs en $\pm\infty$.
Si $r^2(0) < \ln \lambda$, on a vu que r était strictement croissante et appartenait à $[0; \sqrt{\ln \lambda}]$ pour tout t. Donc r converge en $-\infty$ et $+\infty$, vers des limites r_- et r_+. À cause de l'équation vérifiée par $\dot{r}$, $\dot{r}$ converge également, vers $\lambda r_- - r_- e^{r_-^2}$ et $\lambda r_+ - r_+ e^{r_+^2}$.
La limite de $\dot{r}$ doit être 0 (sinon r n'est pas bornée), donc r_- et r_+ valent soit 0, soit $\sqrt{\ln \lambda}$. À cause de la stricte croissance de r :

$$r_- = 0 \qquad r_+ = \sqrt{\ln \lambda}$$

Le même raisonnement dans le cas où $r^2(0) > \ln \lambda$ montre que r tend vers $\sqrt{\ln \lambda}$ en $+\infty$. En $-T^*$, par le théorème de sortie des compacts, $r \to +\infty$.

7.



Les lignes rouges et mauves représentent les lignes intégrales, orientées vers le cercle bleu (centré en 0 et de rayon $\sqrt{\ln \lambda}$). Chaque point du cercle ainsi que l'origine représente à lui seul une ligne intégrale.

Exercice 4

1. Si (1) est vraie, alors $df(x)$ est inversible pour tout x car $df^{-1}(f(x)) \circ df(x) = \mathrm{Id}$ pour tout x.
De plus, pour tout K compact, $f^{-1}(K)$ est l'image du compact K par l'application continue f^{-1} donc est compacte. Donc f est propre.
On a donc montré que (1) impliquait (2).

Supposons maintenant que (2) est vérifiée. Alors son image est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. En effet, puisque $df(x)$ est inversible pour tout x, f est un difféomorphisme local, d'après le théorème d'inversion locale.
Le fait que f est propre implique que l'image de f est fermée. En effet, si $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : $\{y\}\cup\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un compact donc son antécédant par f est également un compact, donc un ensemble borné. On peut donc, quitte à extraire, supposer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite x_∞. Par continuité de f, $y = f(x_\infty)$.

2. Il s'agit d'un ensemble compact, puisque f est propre et $\{f(z)\}$ est compact.
De plus, tous les points de S sont isolés car f est un difféomorphisme local (d'après le théorème d'inversion locale).
Cela implique que S est fini. En effet, si ce n'est pas le cas, on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de S tous différents. Cette suite n'admet pas de sous-suite convergente dans S (puisqu'une suite non-stationnaire ne peut pas converger vers un point isolé d'un ensemble), ce qui est en contradiction avec la compacité de S.

3. Le système admet une unique solution maximale puisque $x \to -(df(x))^{-1}.(f(x) - f(z))$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $]a;b[$ son intervalle de définition.
Montrons que $b = +\infty$.
Remarquons que $f(x)' = df(x).\dot{x} = f(z) - f(x)$. Donc $t \to f(x(t))$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre qu'on sait résoudre.
Puisque $f(x(0)) = f(x_0)$, on doit avoir, pour tout $t \in [0;b[$:

$$f(x(t)) = f(z) + (f(x_0) - f(z))e^{-t}$$

Donc $f(x)$ est bornée sur $[0;b[$ et x est bornée aussi (puisque f est propre) et $\dot{x}$ aussi. Par le théorème de sortie des compacts, $b = +\infty$.

Lemme 4.1 *Soit $z_0 \in S$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que, si $||x_0 - z_0|| < \epsilon$, alors la solution x de l'équation différentielle converge vers z_0 en $+\infty$.*

Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r)$ ne contienne pas d'autre élément de S que z_0.
Soit m le minimum de $||f(x) - f(z_0)||$ sur l'ensemble des x tels que $||x - z_0|| = r$.
Soit $\epsilon \in]0;r[$ tel que, pour tout $x_0 \in B(z_0, \epsilon)$, $||f(x_0) - f(z_0)|| < m$. Alors, pour tout $x_0 \in B(z_0, \epsilon)$, la solution x vérifie, pour tout $t \geq 0$:

$$||f(x(t)) - f(z)|| = ||f(x_0) - f(z)||e^{-t} \leq ||f(x_0) - f(z)|| < m$$

Donc on n'a jamais $||x(t) - z_0|| = r$. Cela implique que $x(t) \in B(z_0, r)$ pour tout $t \geq 0$.
Comme $f(x(t)) \to f(z)$ lorsque $t \to +\infty$ et comme z_0 est le seul point de $\overline{B}(z_0, r)$ où $f(z_0) = f(z)$, cela implique que $x(t) \to z_0$. En effet, si V est un voisinage ouvert quelconque de z_0, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \overline{B}(z_0, r) - V$, $||f(z_0) - x|| \geq \alpha$. Puisque $||f(z_0) - x(t)|| < \alpha$ pour tout t assez grand, $x(t) \in V$ pour tout t assez grand.

Corollaire 4.2 *Quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la solution x de l'équation différentielle pour la condition initiale x_0 converge vers un élément de S en $+\infty$.*

Puisque x est bornée en $+\infty$, $\{x(t) \text{ tq } t \geq 0\}$ admet une valeur d'adhérence. Comme $f(x(t)) \to f(z)$, cette valeur d'adhérence appartient à S.
Notons z_0 cette valeur d'adhérence et soit $\epsilon > 0$ comme au lemme précédent. Soit $t_0 > 0$ tel que $x(t_0) \in B(z_0, \epsilon)$. Alors, d'après le lemme précédent, l'application $t \to x(t_0 + t)$, qui est solution du système différentiel considéré pour la condition initiale $x(t_0 + 0) = x(t_0)$, converge vers z_0. Donc x converge vers z_0.
Pour tout $z_0 \in S$, on note $A(z_0)$ l'ensemble des x_0 tels que la solution x de l'équation différentielle considérée avec condition initiale x_0 converge vers z_0.
D'après le corollaire précédent, $\mathbb{R}^n = \bigcup_{z_0 \in S} A(z_0)$.
Or, pour tout $z_0 \in S$, $A(z_0)$ est ouvert. En effet, si $x_0 \in A(z_0)$, soit $\epsilon > 0$ comme dans le lemme. Il existe $t_0 > 0$ tel que $x(t_0) \in B(z_0, \epsilon)$ (où x est la solution de l'équation pour la condition initiale x_0). Puisque les solutions de l'équation différentielles varient continument en fonction des conditions initiales, si x_1 est assez proche de x_0, alors $x^1(t_0)$ appartient aussi à $B(z_0, \epsilon)$ (où x^1 est la solution pour condition initiale x_1 au lieu de x_0). Donc, d'après le lemme, x^1 converge vers z_0 en $+\infty$.
Donc $\mathbb{R}^n$ est l'union disjointe des ouverts $A(z_0)$, où l'ensemble des z_0 varie dans S et où chaque $A(z_0)$ est non-vide (car il contient un voisinage de z_0). Puisque $\mathbb{R}^n$ est connexe, cela implique que S ne contient qu'un seul élément.

On a montré que, pour tout z, $\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } f(x) = f(z)\}$ est un singleton. Cela revient à dire que f est injective.
Comme on a vu que f était aussi surjective, f est bijective. De plus, f est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme local, d'après le théorème d'inversion locale, donc f^{-1} est aussi un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme local. Donc f est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme global.

Exercice 5

1. Si l'orbite de x_0 est bornée, alors $\Phi_t(x_0)$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, d'après le théorème de sortie des compacts.
Pour tout $t \geq 0$, notons $K_t = \overline{\{\Phi_s(x_0), s \geq t\}}$. Puisque $\{\Phi_s(x_0), s \geq t\} \subset \text{Orb}(x_0)$ et puisque $\text{Orb}(x_0)$ est borné, K_t est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, donc un compact, pour tout $t \geq 0$.
C'est aussi un ensemble non-vide.
De plus, K_t est connexe pour tout t. En effet, $\{\Phi_s(x_0), s \geq t\}$ est connexe : c'est l'image par une application continue de l'intervalle $[t; +\infty[$, qui est connexe. Comme l'adhérence d'un connexe est connexe, K_t est connexe.
L'ensemble $\omega(x_0)$ est donc une intersection de compacts connexes emboîtés et non-vides. C'est donc un compact non-vide. Il est connexe (pour la démonstration, voir l'exercice 7 du TD 4 ; cet exercice traite le cas d'une intersection dénombrable seulement mais la démonstration s'adapte au cas présent).

Montrons pour finir que $\omega(x_0)$ est invariant.
Nous utiliserons le fait que $\omega(x_0)$ est l'ensemble des $y \in \mathbb{R}^n$ tels qu'il existe $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$ telle que $\Phi_{t_n}(x_0) \to y$.
Si $y \in \omega(x_0)$, alors $y \in \Phi_t(\omega(x_0))$. En effet, si $t_n \to +\infty$ et $\Phi_{t_n}(x_0) \to y$, on peut supposer, quitte à extraire, que $\Phi_{t_n - t}(x_0)$ converge vers une limite z (car cette suite est bornée : elle est

dans l'orbite de x_0). On a alors $z \in \omega(x_0)$ et $\Phi_t(z) = \lim_{n\to+\infty} \Phi_{t_n}(x_0) = y$ (puisque Φ_t est continue sur son ouvert de définition).
Réciproquement, si $y \in \Phi_t(\omega(x_0))$, alors $y \in \omega(x_0)$. En effet, il existe alors $z \in \omega(x_0)$ tel que $y = \Phi_t(z)$. Si $t_n \to +\infty$ et $\Phi_{t_n}(x_0) \to z$, alors $\Phi_{t_n+t}(x_0) \to y$ donc $y \in \omega(x_0)$.

2. Supposons que x est une solution périodique de l'équation $x'(t) = \nabla g(x(t))$. Notons T la période.
Comme $(g \circ x)'(t) = \langle x'(t), \nabla g(x(t))\rangle = ||\nabla g(x(t))||^2$, on a :

$$g(x(0)) = g(x(T)) = g(x(0)) + \int_0^T ||\nabla g(x(t))||^2 dt$$

donc $\nabla g(x(t)) = 0$ pour tout $t \in [0;T]$. Donc $x'(t) = \nabla g(x(t)) = 0$ pour tout $t \in [0;T]$. La solution x est constante sur $[0;T]$; elle est donc stationnaire.

3. a) Soit x une solution maximale. Pour tout x, $(\psi \circ x)'(t) = \langle \nabla\psi(x(t)), f(x(t))\rangle \leq 0$. Donc $t \to \psi(x(t))$ est décroissante. Puisque $\{y \text{ tq } \psi(y) \leq \psi(x(0))\}$ est borné (car compact), la fonction x est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Par le théorème de sortie des compacts, son intervalle de définition n'est pas majoré.
b) Soit x la solution de (E) telle que $x(0) = x_0$. La fonction $t \to \psi(x(t))$ est décroissante. De plus, elle est minorée sur $\mathbb{R}^+$ car on a vu que x était bornée sur $\mathbb{R}^+$. Elle converge donc vers une limite z.
Pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $\Phi_{t_n}(x_0)$ converge vers une limite y, $\psi(\Phi_{t_n}(x_0)) = \psi(x(t_n)) \to z$. Donc, par continuité de ψ, $\psi(y) = z$.
Ainsi, ψ est égale à z sur $\omega(x_0)$.
c) On garde les notations de la question précédente.
Soit y la limite de $\Phi_{t_n}(x_0)$ quand $n \to +\infty$. Supposons $f(y) \neq 0$. Alors $\langle \nabla\psi(y), f(y)\rangle < 0$.
Alors $\psi(\Phi_1(y)) = \psi(y) + \int_0^1 \langle \nabla\psi(\Phi_t(y)), f(\Phi_t(y))\rangle dt < \psi(y)$. En effet, la fonction $\langle \nabla\psi(\Phi_t(y)), f(\Phi_t(y))\rangle$ est négative sur $[0;1]$ et n'est pas identiquement nulle car elle est strictement négative en 0.
Mais $y \in \omega(x_0)$ et $\Phi_1(y) \in \omega(x_0)$ (par la première question ; en effet, $\mathrm{Orb}(x_0)$ est bornée pour tout x_0, d'après le raisonnement de la question 3.a)). Comme ψ est constante sur $\omega(x_0)$, on doit avoir $\psi(y) = \psi(\Phi_1(y))$. C'est absurde.
d) Soit x une solution de l'équation différentielle. Notons $x_0 = x(0)$. Montrons qu'elle converge vers un zéro de f.
On a vu que x était bornée sur $\mathbb{R}^+$, par une certaine constante M. Comme les zéros de f sont isolés, il existe un nombre fini de zéros sur $\overline{B}(0, M)$. Notons-les $y_0, ..., y_l$.
Soit $r > 0$ tel que $B(y_0, r), ..., B(y_l, r)$ soient disjoints deux à deux. Posons $A = \mathbb{R}^n - \bigcup_{k\leq l} B(y_k, r)$.
Il existe $T > 0$ tel que $x(t) \notin A$ pour tout $t \geq T$. En effet, sinon, il existe (t_n) une suite tendant vers $+\infty$ telle que $\Phi_{t_n}(x_0) \in A$ pour tout n. Quitte à extraire, on peut supposer que cette suite converge vers une limite y (en effet, $\Phi_{t_n}(x_0) = x(t_n) \in \overline{B}(0, M)$ pour tout n donc c'est une suite bornée). D'après la question c), y est un zéro de f. Donc $y = y_k$ pour un certain $k \leq l$. À cause de la définition de A, c'est impossible.
Soit un tel T. Puisque $x(t) \notin A$ pour tout $t \geq T$, il existe $k \leq l$ tel que $x(t) \in B(y_k, r)$ pour tout $t \geq T$.
De même, pour tout $r' < r$, il existe T' et k' tel que $x(t) \in B(y_{k'}, r')$ pour tout $t \geq T'$. On doit avoir $k = k'$, sinon $B(y_{k'}, r')$ et $B(y_k, r)$ sont disjoints, ce qui est absurde.

Donc, pour tout $r' < r$, $x(t) \in B(y_k, r')$ pour tout t assez grand. Donc $x(t) \to y_k$.

Exercice 6

1. a) Posons $f(x,y) = \left(-x + \frac{3y^2}{1+4xy}, -2y\left(\frac{1+xy}{1+4xy}\right)\right)$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ouvert de définition. Elle admet $(0,0)$ pour point fixe et sa différentielle en ce point a pour matrice dans la base canonique $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Les valeurs propres de cette matrice ont leurs parties réelles négatives donc, d'après un théorème du cours, le système admet une fonction de Lyapunov forte au voisinage de $(0,0)$.
La fonction $\alpha(x,y) = x^2 + y^2$ est une telle fonction. En effet, $(0,0)$ est un minimum local strict de α.
De plus :

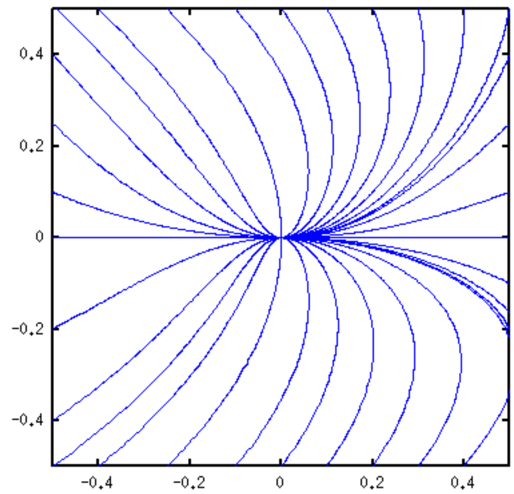
$$\begin{aligned} d\alpha(x,y).f(x,y) &= 2x\left(-x + \frac{3y^2}{1+4xy}\right) + 2y\left(-2y\left(\frac{1+xy}{1+4xy}\right)\right) \\ &= -2x^2 - 4y^2 + o(x^2+y^2) \end{aligned}$$

donc $d\alpha(x,y).f(x,y) \le -\alpha(x,y)$ pour (x,y) assez proche de $(0,0)$.
b) D'après le cours, l'existence d'une fonction de Lyapunov forte α garantit la stabilité asymptotique, à condition qu'on ait $d^2\alpha(0,0) \ge \alpha Id$. Ici, on a $d^2\alpha(0,0) = 2Id$ donc cette dernière condition est manifestement vérifiée.
c) Soit (x,y) une solution quelconque de l'équation. Posons $(X(t), Y(t)) = (x(t) + y^2(t), y(t) - x^2(t))$.
Alors :

$$\begin{aligned} X'(t) &= x'(t) + 2y(t)y'(t) \\ &= -x(t) + \frac{3y^2(t)}{1+4x(t)y(t)} - 4y^2(t)\left(\frac{1+x(t)y(t)}{1+4x(t)y(t)}\right) \\ &= -x(t) - y^2(t) = -X(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y'(t) &= y'(t) - 2x(t)x'(t) \\ &= -2y(t)\left(\frac{1+x(t)y(t)}{1+4x(t)y(t)}\right) + 2x^2(t) - \frac{6x(t)y^2(t)}{1+4x(t)y(t)} \\ &= 2x^2(t) - 2y(t) = -2Y(t) \end{aligned}$$

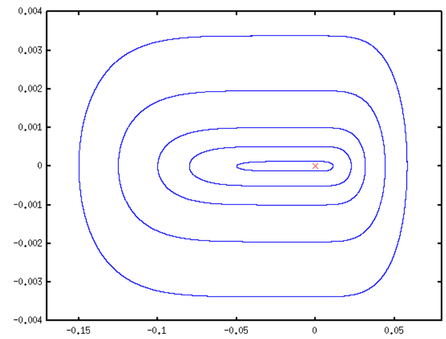
donc $X(t) = X(0)e^{-t}$ et $Y(t) = Y(0)e^{-2t}$.
L'application $\phi : (x,y) \to (x+y^2, y-x^2)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme au voisinage de $(0,0)$ (par le théorème d'inversion locale : sa différentielle en $(0,0)$ est l'identité).
Pour (x_0, y_0) assez proche de $(0,0)$, la solution de l'équation qui vaut (x_0,y_0) au temps $t=0$ est donc $\phi^{-1}\left((x_0+y_0^2)e^{-t}, (y_0-x_0^2)e^{-2t}\right)$.



2. $f(x,y) = (-x^3, -y^3)$ convient.
En effet, les solutions de $u' = f(u)$ sont les courbes $(x(t), y(t)) = (x_0\sqrt{\frac{1}{1+2tx_0^2}}, y_0\sqrt{\frac{1}{1+2ty_0^2}})$. Les solutions sont donc bien définies sur tout $\mathbb{R}^+$ et on a, quels que soient x_0 et y_0 :

$$||(x(t), y(t))|| \leq ||(x_0, y_0)||$$

De plus, $(x(t), y(t)) \to (0,0)$ quand $t \to +\infty$.
3. a) $x \to 4x^3 1_+(x)$ admet pour dérivée $x \to 12x^2 1_+(x)$ et pour dérivée seconde $x \to 24x^2 1_+(x)$, qui est continue. Donc f est $\mathcal{C}^2$.
Dans la base canonique, la matrice de $df(0,0)$ est $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
b) $f(0,0) = (0,0)$
c) Si (x,y) est une solution de $u' = f(u)$, alors $\phi(x(t), y(t))' = (4x^3 1_+(x) + 6x^5)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$.
Les lignes de niveau de ϕ sont des courbes fermées « entourant » le point $(0,0)$, à part la ligne de niveau $\{\phi(x,y) = 0\}$, qui est réduite au point $(0,0)$.
Comme f ne s'annule pas en un autre point que $(0,0)$, une solution qui n'est pas stationnaire en $(0,0)$ parcourt une ligne de niveau de ϕ (en particulier, elle est périodique).
Une solution $(x(t), y(t))$ qui vaudrait $(\epsilon, 0)$ en $t = 0$, avec $\epsilon > 0$ va donc passer par le point $(\eta, 0)$, où η est le réel strictement négatif tel que $\phi(\epsilon, 0) = \phi(\eta, 0)$.
Cette dernière relation équivaut à $\epsilon^4 + \epsilon^6 = \eta^6$. On a donc, pour ϵ tendant vers 0, $\eta \sim \epsilon^{2/3}$.
Pour que $(0,0)$ soit un point stationnaire stable de l'équation, il faudrait qu'on ait, pour une certaine constante C_0, pour tout $(x(0), y(0))$ assez proche de $(0,0)$ et pour tout $t \geq 0$: $||(x(t), y(t))|| \leq C_0||(x(0), y(0))||$. Cela entraînerait donc que, pour tout ϵ assez petit, $\eta \leq C_0\epsilon$. Puisque $\eta \sim \epsilon^{2/3}$, c'est impossible.



4. [Merci à Marin Ballu pour cette solution.]
Soit $\lambda > 0$ une valeur propre strictement positive de $Df(0)$. Soit v un vecteur propre de $Df(0)$ associé à la valeur propre λ, de norme 1.
Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, le flot $(t,x) \to \phi_t(x)$ associé à l'équation $u' = f(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, d'après le théorème de différentiabilité du flot, $d_x\phi_t$ est dérivable par rapport au temps et satisfait l'équation suivante :

$$\partial_t(d_x\phi_t(x)) = df(\phi_t(x)) \circ d_x\phi_t(x)$$

Puisque $\phi_t(0) = 0$ pour tout t (car 0 est un point stationnaire), l'équation devient, pour $x = 0$:

$$\partial_t(d_x\phi_t(0)) = df(0) \circ d_x\phi_t(0)$$

Comme, de plus, $d_x\phi_t(0) = Id$, $d_x\phi_t(0) = \exp(tdf(0))$ pour tout t positif.
Supposons par l'absurde que le point stationnaire 0 est stable. Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, on ait :

$$\forall t \geq 0, \quad ||\phi_t(\epsilon v)|| \leq C||\epsilon v|| = C\epsilon$$

Pour tout t, lorsque $\epsilon \to 0$, $||\phi_t(\epsilon v)|| \sim \epsilon ||d\phi_t(0).v|| = \epsilon e^{\lambda t}$ (puisque $df(0).v = \lambda v$). L'inégalité $||\phi_t(\epsilon v)|| \leq C\epsilon$ implique donc :

$$\forall t \geq 0, \quad e^{\lambda t} \leq C$$

C'est manifestement impossible.

Exercice 7

1. Elle est manifestement bilinéaire. De plus, $||\psi(y,z)||_\infty \leq (||h||_\infty + ||k||_\infty)||y||_E||z||_E$ donc elle est continue.
2. Pour toutes $y, z \in E$, $\phi(y+z) = \phi(y) + z'' + 2hy'z' + 2kyz + hz'^2 + kz^2$.
L'application $z \in E \to z'' + 2hy'z' + 2kyz$ est linéaire et continue de E dans F. De plus, $||hz'^2 + kz^2||_\infty \leq (||h||_\infty + ||k||_\infty)\,||z||_E^2 = o(||z||_E)$ quand $||z||_E \to 0$.
Donc ϕ est dérivable et $d\phi(y).z = z'' + 2hy'z' + 2kyz$.
En 0, $d\phi(0) = z''$.
3. L'application $d\phi(0) : E \to F$ est inversible, d'inverse continue. En effet, la fonction $R : F \to E$ suivante est continue et est sa réciproque :

$$R(f)(t) = \int_0^t (t-u)f(u)du - t\int_0^1 (1-u)f(u)du$$

[Remarque : pour vérifier que R est continue, il suffit de calculer $R(f)'$ et $R(f)''$ et de vérifier que $R(f), R(f)', R(f)''$ sont bornées en norme infinie par des multiples de $||f||_\infty$.]
D'après le théorème d'inversion locale, ϕ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans E et un voisinage de 0 dans F. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, l'équation $\phi(y) = f$ a donc toujours une solution dans E si $||f||_\infty < \epsilon$.

Exercice 8

1. a) L'ensemble $\omega(x)$ est une intersection de compacts (car les fermés de U inclus dans D sont compacts, puisque D est compact) emboîtés et non-vides. C'est donc un compact non-vide.
b) Voir TD précédent. La même question s'y trouve.
c) Pour tous r_1, r_2 et tout $y \in U$, $\phi_{r_1}(\phi_{r_2}(y)) = \phi_{r_1+r_2}(y)$.
L'application $(s, y) \to \phi_s(y)$ est continue d'après le théorème de différentiabilité du flot.
Si $s \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\phi_s(\omega(x)) &\subset \bigcap_{r\geq 0} \phi_s\left(\overline{\{\phi_t(x) \text{ tq } t \geq r\}}\right) \\
&\subset \bigcap_{r\geq 0} \overline{\phi_s\left(\{\phi_t(x) \text{ tq } t \geq r\}\right)} \\
&= \bigcap_{r\geq 0} \overline{\{\phi_{t+s}(x) \text{ tq } t \geq r\}} \\
&= \bigcap_{r\geq s} \overline{\{\phi_t(x) \text{ tq } t \geq r\}} = \omega(x)
\end{aligned}$$

2. a) Quitte à changer de repère, on peut supposer que $x_0 = 0$ et $D = \mathbb{R} \times \{0\}$.
D'après le théorème de différentiabilité du flot, l'application $(y, s) \in U \times \mathbb{R} \to \phi_s(y) \in U$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Posons $\delta(r, t) = \phi_t((r, 0))$ pour tous $r, t \in \mathbb{R}$ tels que $(r, 0) \in U$. Alors δ est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculons $d\delta(0, 0)$.
Puisque $\delta(r, 0) = (r, 0)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$ assez proche de 0, $d\delta(0, 0).(h, 0) = (h, 0)$. De plus, $t \to \phi_t(0, 0)$ est la solution de $(\star)$ pour la condition initiale $x_0 = (0, 0)$ donc sa dérivée en $(0, 0)$ est $f(x_0)$.
Donc $d\delta(0, 0).(h, l) = h.(1, 0) + l.f(x_0)$. Comme on a supposé que $f(x_0)$ n'est pas colinéaire à la direction de D (c'est-à-dire $(1, 0)$), $d\delta$ est inversible au voisinage de $x_0 = 0$ (d'après le théorème d'inversion locale).
Notons ψ la réciproque de δ. Quitte à restreindre l'ouvert V de définition de ψ, on peut supposer que $\psi(V) =]-\epsilon_1; \epsilon_1[\times] - \epsilon_2; \epsilon_2[$ pour certains réels $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$.
Montrons que les trois conditions voulues sont vérifiées.
La première l'est : $\delta(0, 0) = (0, 0) = x_0$ donc $\psi(x_0) = (0, 0)$.
La deuxième l'est aussi : $\psi^{-1}(] - \epsilon_1; \epsilon_1[\times\{0\}) = \{\delta(r, 0) \text{ tq } r \in] - \epsilon_1; \epsilon_1[\} =] - \epsilon_1; \epsilon_1[\times\{0\} \subset D$.
Enfin, on a $V = \delta(] - \epsilon_1; \epsilon_1[\times] - \epsilon_2; \epsilon_2[) = \{\phi_t((r, 0)), r \in] - \epsilon_1; \epsilon_1[, t \in] - \epsilon_2; \epsilon_2[\}$. Soit X une solution maximale de l'équation différentielle $(\star)$ restreinte à V. Elle est définie sur un intervalle de la forme $]a; b[$.
Soit $T \in]a; b[$ quelconque. Puisque $V = \delta(] - \epsilon_1; \epsilon_1[\times] - \epsilon_2; \epsilon_2[)$, il existe $(r_0, t_0) \in] - \epsilon_1; \epsilon_1[\times] - \epsilon_2; \epsilon_2[$ tel que $X(T) = \delta(r_0, t_0) = \phi_{t_0}((r_0, 0))$.

Puisque $t \in]T-t_0-\epsilon_2; T-t_0+\epsilon_2[\to \phi_{t-T+t_0}((r_0,0))$ est une solution de $(\star)$ qui coïncide avec X en T et puisque, à condition initiale fixée, la solution de $(\star)$ est unique :

$$\forall t \in]T-t_0-\epsilon_2; T-t_0+\epsilon_2[, \quad X(t) = \phi_{t-T+t_0}((r_0,0))$$

De plus, $\phi_{-\epsilon_2}((r_0,0)) \notin V$. En effet, sinon, on aurait $\phi_{-\epsilon_2}((r_0,0)) = \phi_{t_1}((r_1,0))$ pour un $(r_1,t_1) \in]-\epsilon_1;\epsilon_1[\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[$ et on devrait avoir, pour tout $\eta > 0$ assez petit, $\phi_{-\epsilon_2+\eta}((r_0,0)) = \phi_\eta(\phi_{-\epsilon_2}((r_0,0))) = \phi_\eta(\phi_{t_1}((r_1,0))) = \phi_{t_1+\eta}((r_1,0))$ ce qui serait en contradiction avec l'injectivité de δ sur $]-\epsilon_1;\epsilon_1[\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[$.
De même, $\phi_{\epsilon_2}((r_0,0)) \notin V$. La fonction $t \in]T-t_0-\epsilon_2; T-t_0+\epsilon_2[\to \phi_{t-T+t_0}((r_0,0)) = \delta(r_0, t-T+t_0)$ ne se prolonge donc pas sur V et est solution maximale. Elle est donc exactement égale à X, intervalle de définition compris.
Puisque ψ est la réciproque de δ, $\psi(X)$ est la fonction $t \in]T-t_0-\epsilon_2; T-t_0+\epsilon_2[\to (r_0, t-T+t_0)$.
La condition (3) est donc également vérifiée.

3. On utilise les notations de la question 2. pour la section transverse I.
Soit X la solution de $(\star)$ pour la condition initiale x.
Supposons par l'absurde que $\omega(x)$ intersecte I en deux points A et B distincts, tels que $\psi(A) = (a,0)$ et $\psi(B) = (b,0)$ pour des réels $a,b \in]-\epsilon_1;\epsilon_1[$ distincts.
Soient $W_a, W_b \subset]-\epsilon_1;\epsilon_1[$ des intervalles ouverts disjoints contenant respectivement a et b.
Puisque $\psi^{-1}(W_a\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$ est un voisinage de A et puisque $A \in \omega(x)$ est un point d'adhérence de X, il existe T_1 tel que $X(T_1) \in \psi^{-1}(W_a\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$.
Notons S_1 l'intervalle maximal contenant T_1 tel que X prend ses valeurs dans V sur S_1. D'après la propriété (3) de la question 2., S_1 est de la forme $]t_1-\epsilon_2; t_1+\epsilon_2[$ et $X(t) = \psi^{-1}(\alpha, t-t_1)$ pour tout $t \in S_1$, où $\alpha \in]-\epsilon_1;\epsilon_1[$ et $t_1 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.
Puisque $X(T_1) \in \psi^{-1}(W_a\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$, $\alpha \in W_a$. Donc $X(t_1) = \psi^{-1}(\alpha,0) \in \psi^{-1}(W_a \times \{0\})$. De plus, puisque $T_1 \in S_1 =]t_1-\epsilon_2; t_1+\epsilon_2[$, $|T_1 - t_1| < \epsilon_2$.
On a donc trouvé $t_1 \in]T_1-\epsilon_2; T_1+\epsilon_2[$ tel que $X(t_1) \in \psi^{-1}(W_a \times \{0\})$.
Soit maintenant $T_2 > T_1 + 2\epsilon_2$ tel que $X(T_2) \in \psi^{-1}(W_b\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$. Il existe car $B \in \psi^{-1}(W_b\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$ est point d'adhérence de X. De même que précédemment, on peut trouver $t_2 \in]T_2-\epsilon_2; T_2+\epsilon_2[$ tel que $X(t_2) \in \psi^{-1}(W_b \times \{0\})$ et on a $t_2 > t_1$.
On peut ensuite trouver $t_3 > t_2$ tel que $X(t_3) \in \psi^{-1}(W_a \times \{0\})$.
Alors $X(t_1), X(t_2), X(t_3)$ sont trois points d'intersection de X avec I dont au moins deux sont distincts. Cependant, $X(t_2)$ n'est pas situé entre $X(t_1)$ et $X(t_3)$ (puisque $X(t_1)$ et $X(t_3)$ appartiennent à l'intervalle $\psi^{-1}(W_a \times \{0\})$ alors que $X(t_2)$ appartient à l'intervalle $\psi^{-1}(W_b \times \{0\})$, qui est disjoint du précédent) alors que $t_1 < t_2 < t_3$. C'est donc en contradiction avec le résultat que nous venons d'admettre.

4. a) D'après la question 1.c), $\phi_s(y) \in \omega(x)$ pour tout $s \geq 0$. Donc $X(\mathbb{R}^+) \subset \omega(x)$. Puisque $\omega(y) \subset \overline{X(\mathbb{R}^+)}$ et puisque $\omega(x)$ est un compact contenant $X(\mathbb{R}^+)$, on a aussi $\omega(y) \subset \omega(x)$.
b) Soit $z \in \omega(y)$. Soit I une section transverse passant par z, construite comme à la question 2. (on peut appliquer cette construction car f ne s'annule pas sur $\omega(x)$ donc, comme $z \in \omega(y) \subset \omega(x)$, $f(z) \neq 0$).
De la même façon qu'à la question 3., on peut montrer qu'il existe $0 < t_1 < t_2$ deux réels tels que $X(t_1) \in I$ et $X(t_2) \in I$. Puisque $X(\mathbb{R}^+) \subset \omega(x)$ et puisque $\omega(x)$ a au plus un point d'intersection avec I, d'après la question 3., $X(t_1) = X(t_2)$.

Puisque, à condition initiale fixée, la solution de $(\star)$ est unique, $X(t_1+t) = X(t_2+t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc X est périodique de période $t_2 - t_1$.

5. L'image d'une fonction périodique continue à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est toujours un fermé de $\mathbb{R}^2$ (car son image est en particulier l'image du compact $[0; T]$ où T est la période de la fonction). Puisqu'on a vu à la question 4.b) que X était périodique, $X(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$, donc aussi dans $\omega(x)$.
Montrons maintenant que $X(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\omega(x)$. Pour cela, on fixe $t \in \mathbb{R}$ et on montre qu'il existe un voisinage de $X(t)$ qui n'a pas d'intersection avec $\omega(x) - X(\mathbb{R})$.
Soit I une section transverse passant par $X(t)$ et $V \subset U$ un voisinage de $X(t)$ comme dans la question 2.
Supposons qu'il existe un point $z \in V \cap (\omega(x) - X(\mathbb{R}))$. Soit Y la solution maximale de $(\star)$ pour la condition initiale $Y(0) = z$. D'après la question 4. appliquée à z au lieu de y, Y est une fonction périodique dont l'image est incluse dans $\omega(x)$.
Si on considère un intervalle maximal S sur lequel Y prend ses valeurs dans V, on a, d'après la propriété (3) de la question 2., que S est de la forme $]t_0 - \epsilon_2; t_0 + \epsilon_2[$ et que $\psi(Y(t_0)) = (a, 0)$ pour un certain a, ce qui implique que $Y(t_0) \in I$.
Donc l'image de Y intersecte I. Le point d'intersection entre Y et I n'est pas $X(t)$ sinon Y et X seraient égales (à décalage près) et z appartiendrait à $X(\mathbb{R})$. Donc $\omega(x)$ intersecte I en au moins deux points, $X(t)$ et $Y(t_0)$. D'après la question 3., c'est absurde.
Donc $V \cap (\omega(x) - X(\mathbb{R})) = \emptyset$.

On a montré que $X(\mathbb{R})$ était un ouvert et un fermé de $\omega(x)$. Puisque, d'après la question 1.b), $\omega(x)$ est connexe, $\omega(x) = X(\mathbb{R})$.

Exercice 9 ✐✐ : un peu d'équa diff

Une fonction continue et périodique étant nécessairement bornée, si l'équation admet une solution périodique, alors elle admet une solution bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrons la réciproque.
Soit T la période de A et b. Soit v une solution bornée sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation $\dot{u} = A(t)u + b(t)$.
Notons R_s^t la résolvante de l'équation $\dot{u} = A(t)u$, c'est-à-dire la fonction telle que, pour tout $\phi \in \mathbb{R}^n$, $t \to R_s^t\phi$ est l'unique solution de l'équation qui vaut ϕ en s. On sait que, pour tous s et t, R_s^t est une application linéaire.

Lemme 9.1 *Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), y \in \mathbb{R}^n$ tels que, pour toute solution u de l'équation :*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad u((k+1)T) = Mu(kT) + y$$

Soit u une solution de l'équation. D'après la formule de Duhamel, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$u((k+1)T) = R_{kT}^{(k+1)T} u(kT) + \int_{kT}^{k(T+1)} R_t^{k(T+1)} b(t) dt$$

Pour tous a, b, $R_{a+T}^{b+T} = R_a^b$. En effet, si w est une solution de l'équation telle que $w(a) = x$, alors $w(. - T)$ est une solution de l'équation qui vaut x en $a + T$ donc $R_{a+T}^{b+T}x = w(b + T - T) = w(b) = R_a^b x$.

Donc :

$$\begin{aligned} u((k+1)T) &= R_0^T u(kT) + \int_{kT}^{k(T+1)} R_{t-kT}^T b(t-kT)dt \\ &= R_0^T u(kT) + \int_0^T R_t^T b(t)dt \end{aligned}$$

Si on pose $M = R_0^T$ et $y = \int_0^T R_t^T b(t)dt$, on obtient le résultat.

Lemme 9.2 *Il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 = Mx_0 + y$.*

Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Alors $y \notin \mathrm{Im}\,(M - Id)$.
Soit p un projecteur sur Vect $\{y\}$ dont le noyau contient $\mathrm{Im}\,(M - Id)$. Pour tout k :

$$p(v((k+1)T) - v(kT)) = p((M - Id)v(kT)) + p(y) = y$$

Par récurrence, on en déduit que $p(v(kT)) = p(v(0)) + ky$. Comme $y \neq 0$ (sinon $y \in \mathrm{Im}\,(M - Id)$), alors $(p(v(kT)))_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, ce qui est absurde car $(v(kT))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Achevons la démonstration.
Soit u_0 la solution de l'équation telle que $u_0(0) = x_0$. Alors, d'après le premier lemme, $u_0(T) = Mx_0 + y = x_0 = u_0(0)$. La fonction $u_0(. + T)$ vérifie donc :

$$u_0'(t+T) = A(t+T)u_0(t+T) + b(t+T) = A(t)u_0(t+T) + b(t)$$

Ainsi, $u_0(. + T)$ est solution de la même équation que u_0, avec la même condition initiale en 0. À condition initiale fixée, la solution est unique (d'après Cauchy-Lipschitz) donc $u_0(. + T) = u_0$ et u_0 est T-périodique.