Analyse fonctionnelle
TD n$^{\text{o}}$ 13

Transformée de Fourier des distributions

Séance du 9 mai 2017

Exercice 1. *Échauffement*

Montrer que si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ vérifie $-\Delta u = 0$, alors u est un polynôme.

⋆

Exercice 2. *Théorème de Paley-Wiener*

1. Expliquer pourquoi la transformée de Fourier d'une distribution $T \in \mathcal{E}(\mathbb{R})'$ est analytique.

Le but de cet exercice est de caractériser l'ensemble des fonctions analytiques qui sont la transformée de Fourier d'une distribution à support compact.

2. Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. On pose $F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx$. On suppose que f est à support dans $B(0,R)$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que

$$|F(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N} e^{R|\operatorname{Im}(\xi)|}, \quad \forall \xi \in \mathbb{C}. \tag{$\star$}$$

3. On va montrer la réciproque. Soit F une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété ($\star$) pour tout $N \in \mathbb{N}$, et pour un certain $R > 0$. On pose $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}F(\xi)d\xi$. Montrer qu'on définit bien ainsi une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

4. En intégrant sur un contour dans le plan complexe, montrer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| \leq Ce^{R|\eta| - x\eta}$.

5. En déduire que f est à support compact.

6. Montrer qu'une fonction F analytique sur $\mathbb{C}$ est la transformée de Fourier d'une distribution T à support compact si et seulement si $\exists R > 0$, $K \in \mathbb{N}$, $C > 0$ tels que

$$|F(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^K e^{R|\operatorname{Im}(\xi)|}.$$

Indication : On pourra régulariser T et utiliser la question précédente.

⋆

Exercice 3. *Fonctions à support dans un même compact*

Soit K un compact de $\mathbb{R}$. On note $L^2_K(\mathbb{R})$ le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions à support dans K, que l'on munit de la norme induite. Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de la restriction de la transformée de Fourier à cet espace.

On admettra le résultat suivant :

Théorème (Montel)**.** *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, $\{f_n\}_{n\geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω et uniformément bornées,* i.e. *telles que*

$$\sup_{n\geq 0}\sup_{z\in\Omega} |f_n(z)| < +\infty.$$

Alors pour tout compact $\tilde{K} \subseteq \Omega$, la famille $\{ f_n|_{\tilde{K}}\}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(\tilde{K})$.

1. Soit $u \in L^2_K(\mathbb{R})$. Montrer que la transformée de Fourier de u, notée $\hat{u}$, définit une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, qui est la restriction à la droite réelle d'une fonction entière.

2. Soit $\{u_n\}_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $L^2_K(\mathbb{R})$. On suppose que $u_n \rightharpoonup 0$ (pour la convergence faible). Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, $\widehat{u_n}(\xi) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

3. Montrer que la convergence précédente est en fait uniforme sur les compacts.

4. En déduire que la transformée de Fourier

$$\mathcal{F} : L^2_K(\mathbb{R}) \longrightarrow L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$$

est une application linéaire compacte.

⋆

Exercice 4. *Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $p \in [1, \infty[$ et $\mathcal{F} \subseteq L^p(\Omega)$. Si $f \in L^p(\Omega)$, on étend implicitement f à $\mathbb{R}^d$ en posant $f(x) = 0$ pour $x \notin \Omega$. On peut alors considérer, pour $h \in \mathbb{R}^d$,

$$\tau_h f : x \longmapsto f(x + h).$$

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

Théorème. *$\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$ si et seulement si $\mathcal{F}$ satisfait les trois conditions suivantes :*

(i) *$\mathcal{F}$ est bornée.*

(ii) *$\mathcal{F}$ vérifie le critère d'équicontinuité suivant :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall f \in \mathcal{F},\ \forall h \in B(0, \delta), \quad \|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

(iii) *$\mathcal{F}$ vérifie le critère d'uniforme intégrabilité suivant :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad \|f\|_{L^p(\Omega \setminus B(0,R))} < \varepsilon.$$

Partie réciproque. On suppose que $\mathcal{F}$ vérifie (i), (ii) et (iii).

1. Soient $R > 0$, $\rho \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp} \rho \subseteq B(0, 1)$, $\rho \geq 0$, $\int \rho = 1$. On définit enfin l'approximation de l'identité $\rho_n(x) := n^d \rho(nx)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{F}_{n,R} = \left\{ (\rho_n * f)|_{\overline{\Omega \cap B(0,R)}} \,\middle|\, f \in \mathcal{F} \right\}$ est relativement compacte dans $C^0(\overline{\Omega \cap B(0, R)})$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe N tel que pour $n \geq N$,

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \|\rho_n * f - f\|_{L^p} < \varepsilon.$$

3. En déduire que $\mathcal{F}$ est précompacte dans $L^p(\Omega)$ et conclure.

Partie directe. On suppose que $\mathcal{F}$ est relativement compacte.

4. Soit $f \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\|\tau_h f - f\|_{\mathcal{C}^0} \to 0$ quand $|h| \to 0$.

5. En déduire que pour $f \in L^p(\Omega)$, $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ quand $|h| \to 0$.

6. Conclure : montrer que $\mathcal{F}$ vérifie (i), (ii) et (iii).

Application.

7. On suppose Ω borné. Montrer que l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte.

⋆