Corrigé – TD 13

Indépendance, Lois et modèles usuels, Lemmes de Borel–Cantelli

Exercice 0. Soient X et Y deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes. Montrer que les variables aléatoires $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ soient indépendantes.

Corrigé : Soient $F, G \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions boréliennes. En remarquant que $(x,y) \mapsto (\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}})$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ de jacobien -1, la formule du changement de variable donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[F\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)G\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)\right] &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)G\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)G\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}}dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(x)G(y)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} F(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} G(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ soient indépendantes, et sont toutes les deux gaussiennes centrées réduites.

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles bornées. Démontrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si

$$\forall k,l \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{E}\big[X^kY^l\big] = \mathbb{E}\big[X^k\big]\mathbb{E}\big[Y^l\big]. \tag{1}$$

Corrigé : L'implication est facile, car si X et Y sont indépendantes, alors X^k et Y^l le sont également. Réciproquement, supposons que (1) est vérifiée. La fonction caractéristique de (X,Y) est donnée en $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\phi_{(X,Y)}(u,v) = \mathbb{E}\left[\exp(iuX)\exp(ivY)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iu)^kX^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(iv)^lY^l}{l!}\right)\right]$$

Soit C un majorant de $|X|$ et $|Y|$, de sorte que

$$\sum_{k,l\geq 0}\frac{|u|^k|v|^kC^{k+l}}{k!l!} = \exp(|u|C)\exp(|v|C) < \infty.$$

On peut ainsi appliquer le théorème de convergence dominée

$$\phi_{(X,Y)}(u,v) = \sum_{k,l\geq 0} i^{k+l}\frac{u^kv^l}{k!l!}\mathbb{E}\left[X^kY^l\right].$$

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

D'après l'hypothèse, on a donc

$$\phi_{(X,Y)}(u,v) = \sum_{k,l\geq 0} i^{k+l}\frac{u^k v^l}{k!l!}\mathbb{E}\left[X^k\right]\mathbb{E}\left[Y^l\right] = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iu)^k\mathbb{E}\left[X^k\right]}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(iv)^l\mathbb{E}\left[Y^l\right]}{l!}\right).$$

En appliquant le théorème de convergence dominée de la même manière, il en découle

$$\phi_{(X,Y)}(u,v) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iu)^k X^k}{k!}\right]\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(iv)^l Y^l}{l!}\right] = \phi_X(u)\cdot\phi_X(v),$$

d'où le résultat.

Exercice 2 (Variable exponentielle)**.** Une v.a. positive X définie sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ est appelée (de loi) *exponentielle de paramètre* $c\in]0,\infty[$ si sa loi admet la densité $t\in\mathbb{R}_+\mapsto ce^{-ct}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

1. Calculer $\mathbb{E}[X], \mathrm{var}(X)$ et la transformée de Laplace $\mathbb{E}[e^{-\lambda X}]$.

2. (*Propriété d'oubli*) Soit $Z\colon\Omega\to\mathbb{R}_+$ une v.a. $\mathcal{F}$-mesurable telle que $\mathbb{P}(Z>t)>0$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$. On suppose qu'elle possède la propriété d'oubli, c'est-à-dire que

$$\forall s,t\in\mathbb{R}_+,\quad \mathbb{P}(Z-t>s\mid Z>t) = \mathbb{P}(Z>s).$$

   Montrer que Z est une variable exponentielle pour un certain paramètre $c\in]0,\infty[$.

3. (*Lemme des réveils*) Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables exponentielles indépendantes de paramètres respectifs $c_1,\ldots,c_n$. On pose $Y=\min_{1\leq k\leq n}X_k$. Vérifier les assertions suivantes.

   (a) Y est une v.a. exponentielle de paramètre $c_1+\cdots+c_n$.

   (b) Il existe $N\colon\Omega\to\{1,\ldots,n\}$ une v.a. $\mathcal{F}$-mesurable telle que

$$\mathbb{P}\text{-p.s.}\quad X_N = Y\quad\text{et}\quad X_N<\min\big\{X_k; k\in\{1,\ldots,n\}\backslash\{N\}\big\}.$$

   Par ailleurs, $\mathbb{P}(N=k)=\frac{c_k}{c_1+\cdots+c_n}$ pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$.

   (c) De plus, N et Y sont indépendantes.

Corrigé : voir le polycopié de cours, section 8.4.

Exercice 3 (Variable Gamma)**.** Soient $a,c\in]0,\infty[$. Une v.a. positive X suit une loi $\mathrm{Gamma}(a,c)$ si elle admet la densité

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\frac{c^a}{\Gamma(a)}e^{-cx}x^{a-1}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue, où $\Gamma(\cdot)$ désigne la fonction de Gamma d'Euler.

1. Calculer $\mathbb{E}[X], \mathrm{var}(X)$ et la transformée de Laplace $\mathbb{E}[e^{-\lambda X}]$.

2. Soient $X_1,\ldots,X_n$ des v.a. indépendantes de loi Gamma de paramètres respectifs $(a_1,c),\ldots,$ (a_n,c). Montrer que $X_1+\cdots+X_n$ suit une loi Gamma de paramètres $(a_1+\cdots+a_n,c)$.

Corrigé : voir le polycopié de cours, section 8.4.

Exercice 4 (Variable de Poisson)**.** Une v.a. $X : \Omega \to \mathbb{N}$ est (de loi) *de Poisson de paramètre* $\theta \in]0, \infty[$ si pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X], \mathrm{var}(X)$ et la fonction génératrice $\mathbb{E}[r^X]$.

2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes de Poisson de paramètres respectifs $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ est une v.a. de Poisson de paramètre $\theta_1 + \cdots + \theta_n$.

3. Plus généralement, soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des v.a. de Poisson indépendantes. On note θ_n le paramètre de X_n. Vérifier que $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est une v.a. de Poisson (éventuellement *dégénérée* [1]) de paramètre $\sum_{n \in \mathbb{N}} \theta_n$.

4. (*Approximation Binomiale-Poisson*) Pour tout $n \geq 1$, on se donne une suite $(Y_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$ de variables indépendantes de Bernoulli de paramètres respectifs $p_{n,k}$. On pose

$$X_n = \sum_{1 \leq k \leq n} Y_{n,k} \quad \text{et} \quad \theta_n = \sum_{1 \leq k \leq n} p_{n,k} \ .$$

   Alors pour tout $\theta > 0$, montrer que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \mathbb{P}(X_n = k) - e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \right| \leq 2|\theta - \theta_n| + 2 \sum_{1 \leq k \leq n} p_{n,k}^2 \ .$$

   En déduire que si $\lim_n \theta_n = \theta$ et si $\lim_n \max_{1 \leq k \leq n} p_{n,k} = 0$, alors $\lim_n \sum_{1 \leq k \leq n} p_{n,k}^2 = 0$ et

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k \in N} \left| \mathbb{P}(X_n = k) - e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \right| = 0 \,.$$

Corrigé : voir le polycopié de cours, section 8.4.

Exercice 5 (Processus de Poisson)**.**
Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose $T_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$T_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$N_t = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

1. Soit $n \geq 1$. Calculer la loi du n-uplet $(T_1, \ldots, T_n)$.

2. En déduire la loi de N_t pour tout $t > 0$.

[1] Lois de Poisson dégénérées : on dit qu'une v.a. suit une loi de Poisson de paramètre infini (resp. nul) si p.s. elle vaut ∞ (resp. si p.s. elle vaut 0).

3. Pour $n \geq 1$ et $t > 0$, on définit sur Ω une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,t}$ par la formule
$$\mathbb{Q}^{n,t}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \{N_t = n\})}{\mathbb{P}(N_t = n)},\ A \in \mathcal{F}.$$
Calculer la loi du n-uplet $(T_1, \ldots, T_n)$ sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,t}$.

Corrigé :

1. Soit $f \colon \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On a
$$\mathbb{E}(f(T_1, \ldots, T_n)) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_n) e^{-(x_1+x_2+\ldots+x_n)}\, dx_1 \ldots dx_n.$$
Or $\phi : (x_1, \ldots, x_n) \in (R_+^*)^n \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \in \{0 < t_1 < \ldots < t_n\}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de jacobien égal à 1 donc d'après la formule du changement de variables,
$$\mathbb{E}(f(T_1, \ldots, T_n)) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(t_1, t_2, \ldots, t_n) e^{-t_n} \mathbf{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n\}}\, dt_1 \ldots dt_n,$$
ce qui signfie que la loi de $(T_1, \ldots, T_n)$ a pour densité $e^{-t_n}\mathbf{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n\}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t, T_{n+1} > t\}$ car la suite $(T_n)_{n\geq 0}$ est p.s. croissante et donc $\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(T_n \leq t, T_{n+1} > t)$. On en déduit d'après la question (1) que pour $n \geq 1$,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = n) &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} e^{-t_{n+1}} \mathbf{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n<t_{n+1}\}} \mathbf{1}_{\{t_n \leq t\}} \mathbf{1}_{\{t_{n+1}>t\}}\, dt_1 \ldots dt_n dt_{n+1} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n\leq t\}}\, dt_1 \ldots dt_n \int_t^\infty e^{-t_{n+1}} dt_{n+1} \\
&= \frac{t^n}{n!}\, e^{-t},
\end{aligned}$$
où la deuxième égalité est une conséquence du théorème de Fubini-Tonelli. Et l'on a
$$\mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(X_1 > t) = \int_t^\infty e^{-x}\, dx = e^{-t}.$$
On voit que N_t suit la loi de Poisson de paramètre t.

3. Soit $f \colon \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On a
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(f(T_1, \ldots, T_n)\mathbf{1}_{\{N_t=n\}}) \\
&\quad = \mathbb{E}(f(T_1, \ldots, T_n)\mathbf{1}_{\{T_n\leq t, T_{n+1}>t\}}) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f(t_1, \ldots, t_n)\mathbf{1}_{\{t_n\leq t, t_{n+1}>t\}}) e^{-t_{n+1}} \mathbf{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n<t_{n+1}\}}\, dt_1 \ldots dt_n dt_{n+1} \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(t_1, \ldots, t_n)\mathbf{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n<t\}}\, dt_1 \ldots dt_n \int_t^\infty e^{-t_{n+1}} dt_{n+1} \\
&\quad = e^{-t} \int_{\mathbb{R}_+^n} f(t_1, \ldots, t_n)\mathbf{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n<t\}}\, dt_1 \ldots dt_n,
\end{aligned}$$

où la troisième égalité est une conséquence du théorème de Fubini-Tonelli. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,t}}(f(T_1,\dots,T_n)) &= \frac{\mathbb{E}(f(T_1,\dots,T_n)\mathbf{1}_{\{N_t=n\}})}{\mathbb{P}(N_t=n)} \\
&= \frac{n!}{t^n}\int_{\mathbb{R}_+^n} f(t_1,\dots,t_n)\mathbf{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n<t\}}\,dt_1\ldots dt_n,
\end{aligned}$$

ce qui signfie que la loi de $(T_1,\dots,T_n)$ sous $\mathbb{Q}^{n,t}$ a pour densité $n!\,t^{-n}\,\mathbf{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n<t\}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6. Soit $\alpha>0$, et soit $(Z_n, n\geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi donnée par

$$\mathbb{P}(Z_n=1)=\frac{1}{n^\alpha} \text{ et } \mathbb{P}(Z_n=0)=1-\frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer que $Z_n\to 0$ dans $\mathbb{L}^1$, mais que p.s.,

$$\limsup_{n\to\infty} Z_n=\left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } \alpha\leq 1 \\ 0 & \text{si } \alpha>1 \end{array}\right. .$$

Corrigé : On a $\mathbb{E}[|Z_n|]=\mathbb{E}[Z_n]=n^{-\alpha}\to 0$, ce qui signifie que $Z_n\to 0$ dans $\mathbb{L}^1$.

Pour tout $n\geq 1$, on note $A_n=\{Z_n=1\}$. Si $\alpha>1$ alors $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(A_n)<\infty$. D'après le lemme de Borel-Cantelli, on a donc $\mathbb{P}(\limsup A_n)=0$ c'est-à-dire p.s., il existe $n_0\geq 1$ tel que pour tout $n\geq n_0$, $Z_n=0$ et ainsi $\limsup Z_n=0$.

Si $\alpha\leq 1$ alors $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(A_n)=\infty$. Les A_n étant indépendants, d'après le lemme de Borel, on a donc $\mathbb{P}(\limsup A_n)=1$ c'est-à-dire p.s., pour tout $n_0\geq 1$, il existe $n\geq n_0$ tel que $Z_n=1$ et ainsi $\limsup Z_n=1$.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1 et on suppose que X_1 n'est pas p.s. constante.

1. Soit $a\in\mathbb{R}$ tel que $0<F(a)<1$. Montrer que p.s.,

$$\liminf_{n\to\infty} X_n\leq a\leq \limsup_{n\to\infty} X_n.$$

2. On pose $\alpha=\inf\{x\in\mathbb{R}\colon F(x)>0\}$ et $\beta=\sup\{x\in\mathbb{R}\colon F(x)<1\}$. Montrer que $\alpha<\beta$, que $\alpha\neq+\infty$ et que $\beta\neq-\infty$.

3. Montrer que p.s.,

$$\limsup_{n\to\infty} X_n=\beta \text{ et } \liminf_{n\to\infty} X_n=\alpha.$$

Corrigé :

1. On a $\limsup\{X_n>a\}\subset\{\limsup_{n\to\infty}X_n\geq a\}$ et $\mathbb{P}(X_n>a)=1-F(a)\in]0,1[$. Donc $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(X_n>a)=+\infty$ et d'après le lemme de Borel (les événements $\{X_n>a\}$ étant indépendants), on a

$$\mathbb{P}\left(\limsup\{X_n>a\}\right)=1.$$

Ainsi p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \geq a$.

De même, $\limsup\{X_n \leq a\} \subset \{\liminf_{n\to\infty} X_n \leq a\}$, et on montre comme précedemment que p.s. $\liminf_{n\to\infty} X_n \leq a$.

2. On a $\alpha \leq \beta$ car F est croissante. Supposons que $\alpha = \beta$. Alors par continuité à droite $F(\alpha) = 1$ et F est la fonction de répartition de la mesure δ_α ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. Si $\beta = -\infty$ cela signifie que $F \equiv 1$ ce qui n'est pas possible car $F(x) \to 0$ quand $x \to -\infty$. De même $\alpha \neq +\infty$.

3. Soit $(\beta_k)_{k\geq 1}$ une suite croissante qui tend vers β telle que $\alpha < \beta_k < \beta$. D'après la question (1), on a pour tout $k \geq 1$, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \geq \beta_k$. Ainsi, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \geq \beta$. Supposons $\beta < +\infty$. Soit $k \geq 1$. On a $\{\limsup_{n\to\infty} X_n > \beta + 1/k\} \subset \limsup\{X_n > \beta + 1/k\}$. Or $F(\beta + 1/k) = 1$, le lemme de Borel-Cantelli assure donc que
$$\mathbb{P}(\limsup\{X_n > \beta + 1/k\}) = 0.$$
Ainsi pour tout $k \geq 1$, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \leq \beta + 1/k$ puis, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \leq \beta$.

Soit $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ une suite décroissante qui tend vers α telle que $\alpha < \beta_k < \beta$. D'après la question (1), on a pour tout $k \geq 1$, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \leq \alpha_k$. Ainsi, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \leq \alpha$. Supposons $\alpha > -\infty$. Soit $k \geq 1$. On a $\{\liminf_{n\to\infty} X_n < \alpha - 1/k\} \subset \limsup\{X_n < \alpha - 1/k\}$. Comme $F(\alpha - 1/k) = 0$ pour tout $k \geq 1$, on conclut comme précedemment que, p.s., $\liminf_{n\to\infty} X_n \geq \alpha$.

Exercice 8. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0) = 1/2$. Posons
$$L_n := \max\{k \geq 1 \colon \text{ il existe } i \leq n-k \text{ tel que } X_{i+1} = \cdots = X_{i+k} = 1\}.$$

1. Montrer que p.s. $\limsup_{n\to\infty} L_n/\ln(n) \leq 1/\ln(2)$.
2. Montrer que p.s. $\liminf_{n\to\infty} L_n/\ln(n) \geq 1/\ln(2)$.
3. Conclure.

Corrigé :

1. Pour $j \geq 1$, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_n \geq j) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{n-j}\{X_{i+1} = \cdots = X_{i+j} = 1\}\right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-j}\mathbb{P}(\{X_{i+1} = \cdots = X_{i+j} = 1\}) = \sum_{i=0}^{n-j}\frac{1}{2^j} = \frac{n-j+1}{2^j} \leq \frac{n}{2^j}.\end{aligned}$$
Soient $\epsilon > 0$ et $j(n) := \lfloor(1+\epsilon)\ln(n)/\ln(2)\rfloor$. Alors $\mathbb{P}(L_n \geq j(n)) \leq 2/n^\epsilon$. Posons $n_k = \lfloor k^{2/\epsilon}\rfloor$ de sorte que $\sum_k \mathbb{P}(L_{n_k} \geq j(n_k)) < \infty$. D'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., pour tout k suffisamment grand on a $L_{n_k} < j(n_k) \leq (1+\epsilon)\ln(n_k)/\ln(2)$.

Soit $n \in [n_{k-1}, n_k[$ suffisamment grand. Alors

$$L_n \le L_{n_k} < (1+\epsilon)\frac{\ln(n_k)}{\ln(2)} \le (1+2\epsilon)\frac{\ln(n_{k-1})}{\ln(2)} \le (1+2\epsilon)\frac{\ln(n)}{\ln(2)},$$

d'où le résultat.

2. Posons $k_n := \lfloor (1-\epsilon)\ln(n)/\ln(2) \rfloor$. Soit

$$A_i := \{X_{(i-1)k_n+1} = X_{(i-1)k_n+2} = \cdots = X_{ik_n} = 1\}, \qquad 1 \le i \le N_n := \lfloor n/k_n \rfloor.$$

Alors $\cup_{i=1}^{N_n} A_i \subset \{L_n \ge k_n\}$. Puisque les événements $A_i, 1 \le i \le N_n$ sont indépendants, ceci entraîne que

$$\mathbb{P}(L_n < k_n) \le \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N_n} A_i^c\right) = \prod_{i=1}^{N_n} \mathbb{P}(A_i^c) = \mathbb{P}(A_1^c)^{N_n} = \left(1 - \frac{1}{2^{k_n}}\right)^{N_n},$$

qui est sommable en n. D'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., pour tout n suffisamment grand, $L_n \ge k_n \ge (1-\epsilon)\ln(n)/\ln(2) - 1$, d'où le résultat.

3. Ainsi, p.s. $\lim_{n\to\infty} L_n/\ln(n) = 1/\ln(2)$.