PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 13
FONCTIONS HARMONIQUES - PROBLÈME DE DIRICHLET

On se place sur $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 1$. On note λ_d la mesure de Lebesgue en dimension d et σ_d la mesure de proba uniforme sur S^{d-1}, la sphère unité. Dans la suite $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien en dimension d défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}^d})$.

Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, on notera $\overline{B}(x,r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r et $\sigma_{x,r}$ la mesure de probabilité uniforme sur la sphère de centre x et de rayon r.

Définition 1 : Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Une fonction mesurable localement bornée $h : D \to \mathbb{R}$ est dite *harmonique* si pour tout $x \in D$ et $r > 0$ tq $\overline{B}(x,r) \subseteq D$, on a

$$h(x) = \int h(y)\sigma_{x,r}(dy).$$

Exercice 1.

1. Montrer que σ_d est la seule probabilité sur la sphère invariante par isométrie vectorielle.
2. Soit h une fonction harmonique sur un domaine D. Soit $r_0 > 0$ et
$$D_0 = \{x \in D,\ \text{dist}(x, D^c) > r_0\},$$
et soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction C^∞ à support compact inclus dans $]0, r_0[$. Montrer que pour tout $x \in D_0$,
$$c_\phi h(x) = \int_{R^d} \phi(|z-x|)h(x)dz.$$
En déduire que h est C^∞ sur D.
3. En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, montrer que $\forall x \in D$, $\triangle h(x) = 0$.

Définition 2 : problème de Dirichlet. Soit D un ouvert borné et g une fonction mesurable bornée et continue de ∂D dans $\mathbb{R}$. On veeut trouver une fonction $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$ telle que

- h est continue sur $\overline{D}$
- h est harmonique sur D
- $h_{|\partial D} = g$

Exercice 2. On se place dans les conditions du problème de Dirichlet.

1. Montrer que si une solution au problème de Dirichlet existe, elle est unique.
2. Soit T_{D^c} =inf $\{t \geq 0, B_t \notin D\}$ le temps de sortie de D. Montrer que la fonction $h : D \to \mathbb{R}$ définie par :
$$h(x) = \mathbb{E}_x \left[g(B_{T_{D^c}})\right]$$
est harmonique sur D.

3. Pour cette question uniquement, on prend $D = B(0,1) \setminus \{0\}$, $g(0) = 0$ et $g(x) = 1$ pour $|x| = 1$. Supposons qu'il existe une solution h au problème de Dirichlet. Montrer que h est invariante par isométrie vectorielle. En déduire que le problème de Dirichlet n'a pas toujours de solution.

   Rappel : Laplacien en coordonnées polaires si h est une fonction radiale, alors

$$\triangle h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}.$$

   Définition 3 : Soit D un ouvert borné. On dit que D vérifie la condition de cône extérieur si pour tout x sur ∂D, il existe un cône de révolution C de sommet x et un $\varepsilon > 0$ tels que $C \cap B(x, \varepsilon) \subseteq D^c$.

   Nous voulons montrer que si D vérifie la condition de cône extérieur, alors le problème de Dirichlet a une solution. On sait que $h(x) = \mathbb{E}_x\left[g(B_{T_{D^c}})\right]$ est harmonique sur D, il suffit de montrer que h est continue sur $\overline{D}$, c'est-à-dire que $\forall y \in \partial D$,

$$\lim_{x \to y,\ x \in D} h(x) = g(y).$$

4. Soit $y \in \partial D$ et $x \in D$. On note $M = \sup g$ et on fixe $\delta, \eta > 0$. Montrer l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} |h(x) - g(y)| \quad &\leq \quad \mathbb{E}_x\left[|g(B_{T_{D^c}}) - g(y)| \mathbb{1}_{\{T_{D^c} < \eta\}} \mathbb{1}_{\{\sup_{t<\eta} |B_t - x| < \delta\}}\right] \\ &\quad + 2M\mathbb{P}_x\left[\sup_{t<\eta} |B_t - x| \geq \delta\right] + 2M\mathbb{P}_x\left[T_{D^c} > \eta\right]. \end{aligned}$$

5. Soit Soit C un cône ouvert de somme 0 et d'angle $\theta/2$et pour tout $a > 0$, $\widetilde{C}_a = C \setminus B(0, \varepsilon)$. On définit $T_C = \inf\{t, B_t \in C\}$ et la même chose pour $T_{\widetilde{C}_a}$. Montrer que $\mathbb{P}_0[T_C = 0] = 1$ et que si a est suffisamment petit, $\mathbb{P}_0[T_{\widetilde{C}_a} < \eta] \geq 1 - \varepsilon$.

6. En déduire que

$$\lim_{x \to y,\ x \in D} \mathbb{P}_x\left[T_{D^c} > \eta\right] = 0.$$

7. Montrer que h est solution du problème de Dirichlet.

8. On prend $D = B(0, a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d,\ a < |x| < b\}$ une couronne ouverte, et $g(x) = 0$ quand $|x| = a$, $g(x) = 1$ pour $|x| = b$. Trouver la solution du problème de Dirichlet. Quelles informations cela donne-t-il sur le mouvement brownien ?

Exercice 3 (Principe du maximum)**.**

1. Soit V un ouvert borné de R^d et u une fonction réelle continue sur $\overline{V}$ et C^2 sur V, telle que $\triangle u > 0$. Montrer que u atteint son maximum sur la frontière de V. Même question mais avec $\triangle u \geq 0$.

2. Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et h une fonction localement bornée sur D. Montrer que h est harmonique ssi h est C^2 et $\triangle h = 0$.