TD13 : Extensions séparables

Diego Izquierdo

Les exercices 0, 1 et 3 sont à préparer avant la séance de TD. Nous traiterons les exercices dans l'ordre suivant : 0, 1, 3, 10.

Exercice 0 : TD12
Faire les exercices 15 et 17 du TD12.

Exercice 1 : Une infinité d'extensions intermédiaires
Trouver une infinité d'extensions intermédiaires entre $\mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$ et $\mathbb{F}_p(X, Y)$. Existe-t'il $\alpha \in \mathbb{F}_p(X, Y)$ tel que $\mathbb{F}_p(X, Y) = \mathbb{F}_p(X^p, Y^p)(\alpha)$?

Exercice 2 : Une extension inséparable en caractéristique 2
Soient $K = \mathbb{F}_2(X, Y)$, $L = K(\alpha)$ avec $\alpha^2 + X\alpha + Y = 0$, et $M = K(\beta)$ avec $\beta^2 = \alpha$. Soit K_s la clôture séparable de K dans M.

1. Montrer que $[M : K] = 4$.
2. Montrer que $K_s = L$. En déduire $[K_s : K]$.
3. Montrer qu'un élément $\gamma \in M$ vérifie $\gamma^2 \in K$ si, et seulement si, $\gamma \in K$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de corps intermédiaire $K \subsetneq F \subseteq M$ purement inséparable sur K.

Exercice 3 : Extensions séparables et degré
Soit L/K une extension finie de corps de caractéristique $p > 0$ de degré premier à p. Montrer qu'elle est séparable.

Exercice 4 : Une caractérisation des extensions séparables
Soit $F \subseteq E$ une extension finie de corps de caractéristique $p > 0$.

1. Montrer qu'un élément $x \in E$ est séparable si et seulement si on a $F(x) = F(x^p)$.
2. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
(i) il existe une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de E sur F telle que $(x_1^p, \ldots, x_n^p)$ est aussi une F-base de E ;
(ii) pour toute base $(y_1, \ldots, y_n)$ de E sur F, $(y_1^p, \ldots, y_n^p)$ est aussi une F-base de E.
3. Montrer que (i) est vraie si et seulement si l'extension $F \subseteq E$ est séparable.

Exercice 5 : Éléments primitifs

1. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \rho)$. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{Q}$ l'élément $\sqrt[3]{2} + t\rho$ est-il un élément primitif de l'extension $K/\mathbb{Q}$? Et $\sqrt[3]{2} + t\rho\sqrt[3]{2}$?
2. Donner un élément primitif de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$.

Exercice 6 : p-dimension

Soit $F \subseteq E$ une extension finie de corps de caractéristique $p > 0$. On suppose l'inclusion $E^{\times p} \subseteq F^{\times}$, de sorte que $F \subseteq E$ est purement inséparable. Appelons famille génératrice de E toute famille d'éléments $(x_1, ..., x_n)$ de E telle que $E = F(x_1, ..., x_n)$. Montrer que les familles génératrices minimales de E sont toutes de même cardinal (on pourra calculer le degré de $[E : F]$). On appelle ce cardinal la p-dimension de E/F.

Exercice 7 : Extensions purement inséparables

Soient K un corps de caractéristique $p > 0$, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et K^s la clôture séparable de K dans $\overline{K}$.

1. Rappeler pourquoi K^s est bien définie.

Soit $P \in K[X]$ un polynôme unitaire irréductible.

2. Montrer que P a une unique racine dans $\overline{K}$ si et seulement si il existe $r \in \mathbb{N}$ et $a \in K$ tels que $P = X^{p^r} - a$.

Soit $K \subseteq L$ une extension algébrique.

3. Montrer que $K \subseteq L$ est purement inséparable si et seulement si il n'existe qu'un homomorphisme de K-algèbres de L dans $\overline{K}$.
4. Montrer que L est une extension purement inséparable de $K^s \cap L$.

On note L^{rad} le sous-corps de L constitué de tous les éléments $x \in L$ tels qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ avec $x^{p^r} \in K$.

5. Montrer que $\overline{K}$ est une extension séparable de $\overline{K}^{\mathrm{rad}}$.
6. Est-ce vrai pour $L \subsetneq \overline{K}$ et L^{rad} ?

Exercice 8 : Plus grand sous-corps parfait

Soient n un entier naturel et q une puissance d'un nombre premier. Quel est le plus grand sous-corps parfait de $\mathbb{F}_q(X_1, ..., X_n)$?

Exercice 9 : Un exemple de corps parfait

Donner un exemple de corps parfait infini de caractéristique positive non séparablement clos.

Exercice 10 : Sous-corps d'un corps parfait

1. Soit M un corps de caractéristique p. Soient n un entier naturel et $a \in M$. Montrer que si a n'est pas une puissance p-ième dans M, alors

le polynôme $X^{p^n} - a$ est irréductible sur M.

2. Soit L/K une extension de corps telle que L est parfait. Montrer que, si $[L : K] < \infty$, alors K est parfait. Que dire si $[L : K] = \infty$?

Exercice 11 : Extensions de type fini d'un corps parfait

Soit L une extension de type fini d'un corps parfait K de caractéristique $p > 0$. Montrer que $[L : L^p] < \infty$.

Exercice 12 : Partiel 2012

Le résultat de cet exercice est important, mais il n'est pas essentiel d'en connaître la preuve. Soit L/K une extension algébrique de corps. On suppose que tout polynôme de $K[X]$ a une racine dans L. On veut montrer que L est une clôture algébrique de K.

1. Montrer la conclusion si on suppose de plus que tout polynôme de $K[X]$ est scindé dans L.

2. Montrer la conclusion si on suppose de plus que K est parfait.

3. On suppose à partir de maintenant que la caractéristique de K est $p > 0$. Montrer que $M = \{x \in L | \exists n \in \mathbb{N}^*, x^{p^n} \in K\}$ est un sous-corps parfait de L.

4. En déduire que L est un corps parfait.

5. Montrer que tout polynôme de $M[X]$ a une racine dans L. Conclure.

Exercice 13 : Produits tensoriels de corps dans le cas non séparable

Calculer $\mathbb{F}_p(t^{1/p}) \otimes_{\mathbb{F}_p(t)} \mathbb{F}_p(t^{1/p})$.

Bonne vacances et bonnes fêtes !