Analyse Complexe TD 13 (22/05)

Exercice 1

1. C'est un homéomorphisme local, et chaque point n'a que deux antécédents. C'est donc un revêtement. Plus généralement, un homéomorphisme local propre est un revêtement. En effet, chaque point n'a qu'un nombre fini de préimages, donc on peut construire la pile d'assiettes à la main.
2. Sur B, P est un homéomorphisme local. De plus P est propre sur B.
3. Il suffit de constater que f est un homéomorphisme local !

Exercice 2 Les questions sont indépendantes

1. Il suffit de constater que la fonction $e^z/P(z)$ a une singularité essentielle en l'infini. On applique donc le grand th. de Picard.
2. On peut écrire $g = e^F$. On cherche alors à résoudre $z - F(z) \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Si cette fonction n'est pas constante, elle prend toute les valeurs de $2i\pi\mathbb{Z}$, sauf peut-être une d'après le petit th. de Picard. Il y a donc une infinité de solutions à l'équation de départ.
3. On se donne une fonction holomorphe f, d'ordre fini, qui ne prend pas 2 valeurs. On peut toujours supposer que l'une de ces valeurs est 0. On peut écrire $f = e^F$. Comme f est d'ordre fini, on trouve que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Re}F(z) \leq C(1 + |z|^k)$. D'après le lemme de la partie réelle, F doit être un polynôme. Mais les fonctions e^P où P est un polynôme, sont surjectives sur $\mathbb{C}^*$.
4. Supposons que f est entière non constante, et ne s'annule pas. On écrit $f = e^F$. Alors on veut résoudre $e^F = a \neq 0$. Cela revient à $F - \log a \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Mais d'après le petit th. de Picard, chacune de ces équations a une solution, sauf au plus une…

Exercice 3

D'après l'exercice 4 du TD 12, la fonction λ est un revêtement de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ par $\mathbb{H}$. On se donne une fonction f entière qui évite deux valeurs de $\mathbb{C}$. On peut toujours supposer que ces deux valeurs sont 0 et 1. Alors d'après le th. du relèvement, on peut factoriser $f = \lambda \circ g$. La fonction g est alors entière à valeur dans $\mathbb{H}$, donc elle est constante !

Exercice 4

On rappelle les questions de l'exercice 2 (modifiées) du partiel : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ qui évite deux points, et $f : U \to U$ une application holomorphe. On suppose que f admet un point fixe $a \in U$. Posons $f_n = f \circ \cdots \circ f$ (n facteurs) pour tout $n \in \mathbb{N}$. On veut établir les trois propriétés suivantes (H. Cartan) : (a) $|f'(a)| \leq 1$; (b) $|f'(a)| = 1$ si et seulement si f est bijective ; (c) si $|f'(a)| < 1$, alors la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact vers l'application constante égale à a.

2 Montrer (a). En déduire que si f est bijective, alors $|f'(a)| = 1$.

D'après le lemme de Montel pour les fonctions qui évitent deux points de $\mathbb{C}$, on peut extraire une sous-suite de (f_n) qui converge uniformément sur les compacts de U vers une fonction g. Mais alors $f_n'(a) \to g'(a)$. Or $f_n'(a) = f'(a)^n$. En particulier, $|f'(a)| \leq 1$. Si f est bijective, on peut appliquer ce raisonnement à f^{-1}, pour obtenir aussi que $|f'(a)| \geq 1$.

3 Montrer que si $f'(a) = 1$, alors f est la fonction identité.

On écrit $f(a + z) = a + z + Cz^k + \ldots$. Alors on trouve que $f_n(a + z) = a + z + nCz^k + \ldots$. En particulier, en extrayant de nouveau, on déduit que $C = 0$. Ceci montre que f est l'identité.

4 (i) Montrer que si une suite de fonctions holomorphes (g_n) sur U converge uniformément sur tout compact vers une fonction non constante g sur U, et si $g_n(U) \subset V$ pour tout n, alors $g(U) \subset V$. (V un ouvert).

Le théorème de Rouché permet de résoudre cette question. La non-compacité de U ne change rien à l'affaire.

(ii) En déduire (b).

On fait encore la même chose ! Si $|f'(a)| = 1$, on peut extraire une sous suite de f_n qui converge vers g telle que $g'(a) = 1$. Comme on sait que g doit donc être l'identité, on utilise la question précédente pour observer que U doit être dans l'image des $f_{n'}$. Comme de plus les $f_{n'}$ convergent vers une fonction injective, elles doivent être injective à partir d'un certain rang. Ceci implique f soit bijective de U dans lui-même.

5 Montrer (c).

Si $|f'(a)| < 1$, on extrait une suite qui converge aussi. La limite g est de derivée nulle en zéro. Mais elle commute avec f, donc on écrit $g(a+z) = a + Cz^n + \dots$, et $g \circ f = C\lambda^n z^n + \dots = f \circ g = C\lambda z^n + \dots$. Ainsi $C = 0$ et g est constante.

Exercice 5

Les fonctions modulaires de poids k sont les fonctions f sur $\mathbb{H}$ qui vérifient

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \tag{1}$$

On pose toujours $q = e^{2i\pi\tau}$. Les fonctions modulaires de poids k ont un développement $f = \sum a_n q^n$. On dit que f est méromorphe en q si ce développement de Laurent a une partie polaire d'ordre fini. On sait que la fonction J a pôle d'ordre 1 en $q = 0$, et que les G_k sont holomorphes en $q = 0$, de valeur non nulle. De plus, la fonction J est elle méromorphe en $q = 0$, avec un pôle d'ordre 1.

Ainsi, si f est une fonction modulaire de poids k, on peut considérer $g := f/G_k$. C'est une fonction méromorphe invariante par $SL_2(\mathbb{Z})$, qui est méromorphe en $q = 0$. D'après les propriétés de J, on peut espérer pouvoir écrire que g est une fraction rationnelle en J. On procède comme pour les fonctions paire et la fonction $\wp$. On considère les $a_i = J(z_i)$ où les z_i sont les zéros de g dans le domaine fondamental habituel. On les compte avec multiplicité s'il sont différents de i, j. Pour i, on divise la multiplicité (qui doit être paire !) par deux. Pour j, on la divise par trois. On fait la même chose pour les pôles $y_1, \dots, y_m$. On considère alors $\prod a_i - J / \prod b_i - J$.

Exercice 6

On suppose tous les espaces connexes et localement connexes par arcs.

1. le fait que l'action soit compatible avec l'action de G sur X veut dire que l'on demande que $g.[x] = [g.x]$. Autrement dit $gHx = Hgx$. Comme le groupe agit librement, cela donne $gHg^{-1} = H$. Autrement dit les éléments qui agissent sont exactement les éléments du normalisateur de H dans G.
2. On se donne A un automorphisme de revêtement de $X/H \to X/G$. On peut le relever en un automorphisme de revêtement sur $X \to X/G$. Cet automorphisme de revêtement est nécessairement un élément de G. Ceci implique A correspondait à un élément du normalisateur de H dans G. Ainsi, le groupe des automorphismes de revêtement de $X/H \to X/G$ est $norm(H,G)/H$. En particulier, le revêtement est Galoisien si et seulement si le normalisateur a autant d'éléments que G, autrement dit si H est distingué !
3. Pour construire la conjugaison, on se donne une courbe γ entre x et y. Un lacet γ' basé en x, c'est $\gamma^{-1}\gamma''\gamma$ où γ'' est un lacet basé en y.
   Réciproquement, il suffit de relever la conjugaison.
4. Si $X/H \to X/G$ est Galoisien, cela implique que $p_*\pi_1(X,x)$ ne dépend pas du point de la fibre. En particuliers, cela implique que toutes les conjugaisons dans G préservent H, autrement dit H est normal.