# TD13 : Topologie de Zariski, irréductibilité, dimension

Diego Izquierdo

*Les exercices 1 et 2 et les questions 1 et 2 de l'exercice 3 sont à préparer avant la séance de TD. Pendant la séance, les exercices seront traités dans l'ordre suivant : 1, 2, questions 1 et 2 de 3, 4, 11, questions 1 et 4 de 12, 13, 15, 16 et 20.*

**Exercice 1 (à préparer) : Spectres d'anneaux**

**1.** Décrire les espaces topologiques suivants :

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]/(X^2)), \quad \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]),$$
$$\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]), \quad \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]), \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[[T]]).$$

Quelles sont leurs dimensions ?

**2.** Mêmes questions pour :

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]/(X^2(X^8+1))), \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X]/(X^3+2X^2+2X)),$$
$$\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T,T^{-1}]), \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/(X^2-Y^2)),$$
$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/(X^2-X)), \quad \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]/(X^2))$$
$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]_{(X,Y)}).$$

Pour chacun des espaces topologiques précédents, faire la liste des composantes connexes et des composantes irréductibles.

**Exercice 2 (à préparer) : Topologie de Zariski sur l'espace affine**

Soient $k$ un corps et $n \geq 1$ un entier. La topologie de Zariski sur $k^n$ est la topologie induite par la topologie de Zariski de $\mathrm{Spec}(k[x_1,\dots,x_n])$ via l'inclusion canonique $k^n \subseteq \mathrm{Spec}(k[x_1,\dots,x_n])$. Supposons $k$ infini. Montrer que la topologie de Zariski sur $k^2$ n'est pas la topologie produit sur $k \times k$ où $k$ est muni de la topologie de Zariski.

**Exercice 3 (à préparer - questions 1 et 2) : Un exemple**

Soit $\Gamma = \{(n, 2^n, 3^n) | n \geq 1\}$, que l'on verra, selon les cas, comme un sous-ensemble de $\mathbb{Q}^3$ ou de $\mathbb{F}_p^3$ pour $p$ premier.

**1.** Montrer que $\Gamma$ est Zariski dense dans $\mathbb{C}^3$.

Soient $p$ un nombre premier et $\overline{\mathbb{F}_p}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$.

**2.** Montrer que $\Gamma$ est fermé pour la topologie de Zariski dans $\overline{\mathbb{F}_p}^3$.

**3.** Déterminer explicitement $\Gamma$ dans $\overline{\mathbb{F}_2}^3$ et $\overline{\mathbb{F}_3}^3$.

**Exercice 4 : Spec versus Max**

**1.** Soit $V$ un espace topologique. Soit $W$ une partie dense de $V$. Montrer que $V$ est irréductible si, et seulement si, $W$ l'est.

**2.** Soit $A$ une algèbre de type fini sur un corps. On munit $\mathrm{Max}(A) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ de la topologie induite. Construire une bijection entre les fermés de $\mathrm{Spec}(A)$ et ceux de $\mathrm{Max}(A)$. Montrer qu'elle induit une bijection entre les fermés irréductibles de $\mathrm{Spec}(A)$ et ceux de $\mathrm{Max}(A)$. Que se passe-t'il si $A$ n'est pas une algèbre de type fini sur un corps ?

**Exercice 5 : $V((I : J))$**

Soient $A$ un anneau et $J \subseteq I$ des idéaux de $A$. Soit $(I : J) = \{a \in A | aJ \subseteq I\}$. Montrer que $V((I : J)) = \overline{V(J) \setminus V(I)}$.

**Exercice 6 : Anneau de fonctions continues**

Soit $X$ un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. On note $C(X, \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues sur $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

**1.** Montrer que les ensembles $U_f = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$ pour $f \in C(X, \mathbb{R})$ forment une base de la topologie de $X$.

On note $\mathrm{Max}\, C(X, \mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathrm{Spec}\, C(X, \mathbb{R})$ constitué des points fermés. On rappelle que $x \mapsto \mathfrak{M}_x = \{f \in C(X, \mathbb{R}) | f(x) = 0\}$ induit une bijection ensembliste

$$\varphi : X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Max}\, C(X, \mathbb{R}).$$

**2.** Montrer que, si l'on munit $\mathrm{Max}\, C(X, \mathbb{R})$ de la topologie de Zariski, $\varphi$ est homéomorphisme.

**Exercice 7 : Fonctorialité**

**1.** Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Montrer que l'image inverse par $f$ induit une application continue $f^\sharp : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$.

**2.** Soit $I$ un idéal de l'anneau $A$ et soit $p : A \to A/I$ la projection canonique. Montrer que $p^\sharp : \mathrm{Spec}\, A/I \to \mathrm{Spec}\, A$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Spec}\, A/I$ sur le fermé $V(I)$ de $\mathrm{Spec}\, A$.

**3.** Montrer que $\mathrm{Spec}\, A^{\mathrm{red}}$ est canoniquement homéomorphe à $\mathrm{Spec}\, A$.

**Exercice 8 : Examen 2012**

Soit $A$ une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini.

**1.** Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Dans toute la suite, on note $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{m}$ l'image inverse de $\mathfrak{m}$ par l'application canonique $\mathbb{Z} \to A$. Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}/(\mathbb{Z} \cap \mathfrak{m})$ est soit $\mathbb{Z}$, soit un corps fini.

**2.** Montrer que le corps $A/\mathfrak{m}$ est une extension finie du corps des fractions de $\mathbb{Z}/(\mathbb{Z}\cap\mathfrak{m})$.

**3.** Si $\mathbb{Z}\cap\mathfrak{m}=0$, montrer qu'on arrive à une contradiction. En déduire que le corps $A/\mathfrak{m}$ est fini.

**4.** Soit $f\in A$ un élément non nilpotent et soit $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de l'anneau de fractions (non nul) $A_f$ . Montrer que le corps $A_f/\mathfrak{n}$ est fini.

**5.** En déduire que $A/(A\cap\mathfrak{n})$ est un corps fini.

**6.** Montrer que l'intersection de tous les idéaux maximaux de A est $\sqrt{(0)}$.

**7.** En déduire que les points fermés sont denses dans toute partie fermée de $\mathrm{Spec}(A)$.

**Exercice 9 : Questions diverses sur l'irréductibilité**

**1.** Montrer que tout sous-espace de $\mathbb{C}^n$ connexe pour la topologie standard est aussi connexe pour la topologie de Zariski.

**2.** Exhiber un contre-exemple à la réciproque.

**3.** Exhiber l'exemple d'un espace Zariski connexe mais non irréductible.

**4.** Montrer qu'un espace irréductible est connexe.

**5.** Montrer que l'image d'un espace irréductible par une application continue est irréductible.

**Exercice 10 : Composantes irréductibles**

Donner les composantes irréductibles de :

$$V(Y^2-X)\subseteq\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}},\quad V(XY)\subseteq\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}},\quad V(X^2+Y^2)\subseteq\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}},$$
$$V(Y^2-X^3-X)\subseteq\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}},\quad V(X^2,XY)\subseteq\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}},\quad V(XY,YZ,ZX)\subseteq\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}},$$
$$V(X^2-2,Y^2-2)\subseteq\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}},\quad V(X^2-2,Y^2-2)\subseteq\mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$$
$$V(ZX^2-2ZY^2,Y^3-Z^3)\subseteq\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}},\quad V(ZX^2-2ZY^2,Y^3-Z^3)\subseteq\mathbb{A}^3_{\mathbb{Q}}.$$

**Exercice 11 : Composantes irréductibles, le retour**

Quelles sont les composantes irréductibles de la variété :

$$V(X^2Y^3-X^3YZ,Y^2Z-XZ^2)\subseteq\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}?$$

Quelle est sa dimension ?

**Exercice 12 : Dimension de Krull**

Soit $X$ un espace topologique.

**1.** Montrer que, si $Y$ est un sous-espace de $X$, alors $\dim Y\leq\dim X$.

**2.** Supposons $X$ irréductible de dimension finie. Soit $Y$ un fermé de $X$ tel que $\dim Y=\dim X$. Montrer que $X=Y$.

**3.** Supposons $X$ noethérien. Montrer que la dimension de $X$ est le maximum des dimensions de ses composantes irréductibles.

**4.** Soit $(U_i)$ un recouvrement ouvert de $X$. Montrer que $\dim X = \sup_i \dim U_i$.

**Exercice 13 : Dimension de Krull d'un ouvert d'une variété**
Soit $k$ un corps. Soit $A$ une $k$-algèbre de type fini. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$. Soit $U$ un ouvert non vide de $X$.

**1.** Supposons $X$ irréductible. Montrer que $\dim U = \dim X$.

**2.** Supposons que $U$ est dense dans $X$ ou que toutes les composantes irréductibles de $X$ sont de même dimension (on dit alors que $X$ est pur). Montrer que $\dim U = \dim X$.

**Exercice 14 : Dimension de Krull et morphismes**

**1.** Exhiber un morphisme d'anneaux $f : A \to B$ tel que $f^\sharp : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ est surjectif et $\dim\ A > \dim B$.

**2.** Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. On suppose que $f$ est fini et que $f^\sharp : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ est surjectif. Montrer que $\dim\ A = \dim\ B$.

**3.** Soient $k$ un corps et $f : A \to B$ un morphisme de $k$-algèbres intègres de type fini. On suppose que $f^*(\{0\}) = \{0\}$ (on dit que $f$ est dominant). Montrer que $\dim\ (f^\sharp)^{-1}(\{0\}) = \dim\ B - \dim\ A$.

**Exercice 15 : Going-up ?**
Soit $k$ un corps. Soit $A \subseteq B$ une extension entière de $k$-algèbres de type fini. Soient $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ des idéaux premiers de $A$ tels que $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$

**1.** Expliquer pourquoi il existe des idéaux premiers $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{q}_2$ de $B$ tels que $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$, et $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$.

**2.** Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $A$ tel que $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_2$. Montrer qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de $B$ tel que $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q}_2$. Peut-on imposer que $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ ?

**Exercice 16 : Anneau local d'une variété en un point fermé**
Soient $K$ un corps et $A$ une $K$-algèbre de type fini. Soient $X = \mathrm{Spec}\ A$ et $\mathfrak{m} \in X$ un point fermé. Montrer que, si l'anneau local $A_\mathfrak{m}$ est une $K$-algèbre de type fini, alors $X = \{\mathfrak{m}\}$.

**Exercice 17 : Séries formelles**
Soit $k$ un corps. Soit $l$ une sous-$k$-algèbre de $k[[t]]$, qui est un corps. Montrer que $k[[t]]$ n'est pas une $l$-algèbre de type fini.

**Exercice 18 : Un exemple de Nagata**
Soient $k$ un corps et $A = k[X_1, \dots, X_n, \dots]$ l'anneau de polynômes en une infinité de variables. Soit $(u_n)$ une suite croissante de $\mathbb{N}$ tendant vers l'infini, avec $u_1 = 0$. On note $\mathfrak{p}_n$ l'idéal premier $(X_{u_n+1}, \dots, X_{u_{n+1}})$. Soit $S$ le

complémentaire de la réunion des $\mathfrak{p}_n$.

**1.** Déterminer les idéaux maximaux de $S^{-1}A$.

**2.** Exhiber une condition suffisante sur $(u_n)$ pour que la dimension de Krull de $S^{-1}A$ soit infinie.

On suppose désormais que $(u_n)$ vérifie la condition exhibée à la question (b). Soit $R$ un anneau dont les localisés en tout idéal maximal sont noethériens et tel que tout élément $x \in R \setminus \{0\}$ soit contenu dans un nombre fini d'idéaux maximaux.

**3.** Montrer que $R$ est noethérien.

**4.** En déduire que $S^{-1}A$ est noethérien.

**Exercice 19 : Points fermés de l'espace projectif**

Soient $k$ un corps algébriquement clos et $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathbb{P}^n(k)$ l'ensemble des droites de $k^{n+1}$. Pour $x = (x_0, ..., x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $[x_0 : ... : x_n] \in \mathbb{P}^n(k)$ la droite engendrée par $x$.

**1.** Soit $I$ un idéal homogène de $A = k[X_0, ..., X_n]$, c'est-à-dire un idéal engendré par des polynômes homogènes. On note :

$$V(I) = \{[x_0 : ... : x_n] \in \mathbb{P}^n(k) | \forall f \in I \text{ homogène}, f(x_0, ..., x_n) = 0\}.$$

Montrer que on définit une topologie sur $\mathbb{P}^n(k)$ en décrétant que les fermés sont les $V(I)$ pour $I$ idéal homogène de $A$.

**2.** Pour $I$ idéal homogène de $A$, montrer que $V(I) = \emptyset$ si, et seulement si, pour $0 \leq i \leq n$, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $X_i^d \in I$.

**3.** Montrer que $\mathbb{P}^n(k)$ est un espace topologique noethérien.

**4.** Montrer que $\mathbb{P}^n(k)$ s'écrit sous la forme $\bigcup_{i=0}^n U_i$ où chaque $U_i$ est un ouvert dense de $\mathbb{P}^n(k)$ homéomorphe à $k^n \subseteq \mathrm{Spec}(k[Y_1, ..., Y_n])$.

**5.** En déduire que $\mathbb{P}^n(k)$ est irréductible de dimension $n$.

**Exercice 20 : Espace projectif**

Soient $k$ un corps et $n \in \mathbb{N}$. Soient $S = k[X_0, ..., X_n]$ et $\mathbb{P}_k^n$ l'ensemble des idéaux premiers homogènes de $S$ ne contenant pas $S_+ = (X_0, ..., X_n)$. Pour $I$ idéal homogène de $S$, on note $V_+(I)$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{P}_k^n$ contenant $I$. Pour $f \in S_+$ homogène, on note $D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_k^n | f \notin \mathfrak{p}\}$.

**1.** Montrer que les $V_+(I)$ sont les fermés d'une topologie sur $\mathbb{P}_k^n$. C'est la topologie de Zariski de $\mathbb{P}_k^n$.

**2.** Montrer que les $D_+(f)$ forment une base de la topologie de $\mathbb{P}_k^n$ et que $\mathbb{P}_k^n$ est recouvert par les $D_+(X_i)$ pour $0 \leq i \leq n$.

**3.** Montrer que, pour $0 \leq i \leq n$, $D_+(X_i)$ est homéomorphe à $\mathbb{A}_k^n$.

**4.** Montrer que $\mathbb{P}_k^n$ est un espace topologique noethérien irréductible de dimension $n$.

**5.** On suppose $k$ algébriquement clos. Construire une bijection entre $\mathbb{P}^n(k)$ et les points fermés de $\mathbb{P}^n_k$. Ces derniers sont-ils denses dans $\mathbb{P}^n_k$ ?