Analyse fonctionnelle
TD n° 14

Espaces de Sobolev

Séance du 22 mai 2017

Exercice 1. *Échauffement : petites questions sur $H^s(\mathbb{R}^d)$*

1. Vérifier que $\delta_0 \in H^s$ pour $s < -d/2$.

2. Montrer que l'injection de H^{s_1} dans H^{s_2}, pour $s_1 \geq s_2$, est continue.

3. Montrer que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \bigcup_s H^s$.

4. On suppose maintenant que $s \in]\frac{d}{2}, \frac{d}{2}+1[$. Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$ et x, y, $\xi \in \mathbb{R}^d$, il existe une constante $C > 0$ (dépendant de d et α) telle que

$$|e^{ix\cdot\xi} - e^{iy\cdot\xi}| \leq C|x-y|^\alpha |\xi|^\alpha.$$

En déduire que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tout $\alpha \in]0, s-\frac{d}{2}[$, il existe $C(\alpha, d)$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(\alpha, d)\|u\|_{H^s}.$$

En conclure que $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$, l'ensemble des fonctions α-höldériennes bornées.

⋆

Exercice 2. *Cas limite d'injection de Sobolev*

1. Montrer que $H^1(\mathbb{R}^2)$ ne s'injecte pas dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Indication : On pourra considérer la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{\ln|x|}$.

2. Soit $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Montrer que

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \|\partial_{x_1} u\|_{L^1} \|\partial_{x_2} u\|_{L^1}.$$

3. En déduire que

$$\forall \theta \geq 2, \quad \|u\|_{L^{2\theta}}^\theta \leq \theta \|u\|_{L^{2(\theta-1)}}^{\theta-1} \|\nabla u\|_{L^2}.$$

4. Montrer que pout tout $\theta \geq 1$, il existe une constante $C(\theta)$ telle que

$$\|u\|_{L^{2\theta}} \leq C(\theta)\left(\|u\|_{L^{2(\theta-1)}} + \|\nabla u\|_{L^2}\right).$$

En conclure que pour tout $q \geq 2$, $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$.

⋆

Exercice 3. *Une autre écriture de H^s*

Soit $0 < s < 1$. On considère, pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$I_s(u) := \iint \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy.$$

1. Réécrire $I_s(u)$ sous la forme

$$I_s(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 f(\xi) d\xi, \quad \text{avec } f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ih\cdot\xi} - 1|^2 \frac{dh}{|h|^{n+2s}}.$$

2. Montrer que

$$f(\xi) = |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\eta\cdot\omega(\xi)} - 1|^2 \frac{d\eta}{|\eta|^{n+2s}}.$$

avec $\omega(\xi) := \xi/|\xi|$, et en déduire que $\|u\|_{H^s}^2 \sim \|u\|_{L^2}^2 + I_s(u)$.

⋆

Exercice 4. *L'équation des ondes*

1. Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N), u_1 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Résoudre dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, \cdot) = u_0, \\ \partial_t u(0, \cdot) = u_1. \end{cases}$$

2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On suppose de plus $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^N \mid 1 \leq |\xi| \leq 2\}$. Montrer que $\mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\hat{f}) = K(t,x) * f$, où

$$K(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi(\xi) e^{it|\xi| + ix\cdot\xi} d\xi,$$

avec $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, radiale, telle que $\chi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et $|\xi| \geq 3$, et $\chi(\xi) = 1$ pour $1 \leq |\xi| \leq 2$.

3. Montrer que $|K(x,t)| \leq \frac{C}{|t|^{\frac{N-1}{2}}}$.

Indication : On pourra séparer les cas $|x| \leq \frac{t}{2}$, $\frac{t}{2} \leq |x| \leq 2t$ et $2t \leq |x|$.

4. En déduire une estimation de décroissance, quand $N \geq 2$, pour la solution de l'équation des ondes, avec des données initiales u_0, u_1 qui vérifient l'hypothèse de la question 2.

⋆