Analyse fonctionnelle
TD n° 14

Propriétés spectrales des opérateurs

Séance du 17 mai 2019

Tous les espaces considérés dans ce TD sont des espaces de Banach.

Exercice 1. *Échauffement*

1. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un opérateur borné. Montrer que $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$, avec de plus $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)}$.

2. Soit H un espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que $\|A\|^2_{\mathcal{L}(H)} = \|A^*A\|_{\mathcal{L}(H)}$.

⋆

Exercice 2. *Opérateur de Volterra*

Notons $E = L^2([0,1])$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur $[0,1]$, et V l'opérateur tel que pour tout $f \in E$,

$$V(f)(x) = \int_0^x f(y)dy, \quad x \in [0,1].$$

1. Montrer que $V : E \to E$ est continu, compact, et montrer que son spectre est réduit à 0.
2. Déterminer l'opérateur V^*.
3. Calculer $\|VV^*\|$, et en déduire que $\|V\| = \frac{2}{\pi}$.

⋆

Exercice 3. *Stabilité du spectre par perturbation compacte*

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ un élément du spectre de A, qui n'est pas une valeur propre. Montrer que, pour tout opérateur compact $K \in K(E)$, λ est dans le spectre de $A + K$.

⋆

Exercice 4. *Une caractérisation de la surjectivité*

Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur non borné, à domaine dense, et fermé.

1. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $B_F(0,r) \subset \overline{T(B_E(0,1) \cap D(T))}$. Montrer que $B_F(0,r) \subset T(B_E(0,2) \cap D(T))$.

Indication : Pour $y \in B_F(0,r)$, on pourra construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_E < +\infty \quad \text{et} \quad T\left(\sum_{n=0}^{N} x_n\right) \xrightarrow{N\to+\infty} y.$$

2. En déduire que s'il existe $r > 0$ tel que

$$r\|\ell\|_{F^*} \leq \|T^*\ell\|_{E^*}, \quad \forall \ell \in D(T^*), \tag{$\star$}$$

alors T est surjectif. On pourra appliquer le théorème de Hahn-Banach à $C = \overline{T(B_E(0,1) \cap D(T))}$ et un élément de son complémentaire.

3. Montrer la réciproque : si T est surjectif, alors il existe $r > 0$ tel que $(\star)$ est satisfaite.

⋆

Exercice 5. *Question de cours : images fermées*

Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur non borné, à domaine dense, et fermé. Le but de cet exercice est de montrer l'équivalence des énoncés suivants :

(i) $\operatorname{Im} T$ est fermé,

(ii) $\operatorname{Im} T^*$ est fermé,

(iii) $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$,

(iv) $\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

1. À l'aide de l'exercice 1 du TD13 ou de la première partie de l'énoncé du cours, montrer que (i) $\Leftrightarrow$ (iii) et que (iv) $\Rightarrow$ (ii).

2. En appliquant le théorème de l'application ouverte à

$$\Gamma : \begin{cases} \operatorname{Gr} T \longrightarrow \operatorname{Im} T \\ (x, Tx) \longmapsto Tx, \end{cases}$$

montrer que (i) $\Rightarrow$ (iv).

3. On suppose (ii), et l'on note $Z := \overline{\operatorname{Im} T}$. On définit $S : x \in D(T) \subset E \mapsto Tx \in Z$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} S^* = \{0\}$ et que $\operatorname{Im} S^* = \operatorname{Im} T^*$ (donc $\operatorname{Im} S^*$ est fermée).

(b) En appliquant le théorème de l'application ouverte à l'application $\Gamma : \operatorname{Gr} S^* \to \operatorname{Im} S^*$, et grâce au résultat de l'exercice 4, montrer que S est surjective. Conclure.

⋆

Exercice 6. *Calculs de spectre*

1. Considérons l'opérateur suivant :

$$T : \begin{cases} \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^1(\mathbb{N}), \\ (u_0, u_1, \dots) \longmapsto (u_1, u_2, \dots). \end{cases}$$

Déterminer le spectre de T. Les opérateurs T et T^* ont-ils même spectre ? Mêmes valeurs propres ?

2. On note E l'espace de Banach des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et bornées, muni de la norme $\| \cdot \|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. On définit sur E l'opérateur $T : E \to E$ par $T(f)(x) = f(x+1)$ pour $f \in E$, $x \in \mathbb{R}$. Déterminer le spectre de T.

Indication : On pourra commencer par étudier les valeurs propres de T, puis remarquer que T est inversible.

⋆

Exercice 7. *Le calcul fonctionnel définit une application isométrique*

Soit H un espace de Hilbert séparable, et A un opérateur auto-adjoint.

1. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, le spectre de $P(A)$ est l'ensemble des images par P des éléments du spectre de A.

2. Montrer que si T est un opérateur auto-adjoint, alors $r(T) = \|T\|$.

3. En déduire que $\|P(A)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|P\|_{L^\infty(\operatorname{Sp}(A))}$, puis que l'application $P \mapsto P(A)$ se prolonge en une application isométrique $U : f \in \mathcal{C}^0(\operatorname{Sp}(A)) \mapsto f(A) \in \mathcal{L}(H)$.

⋆